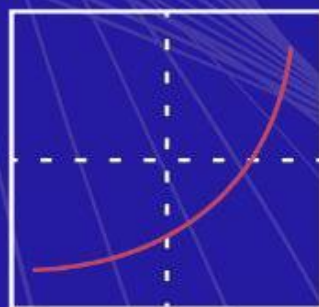
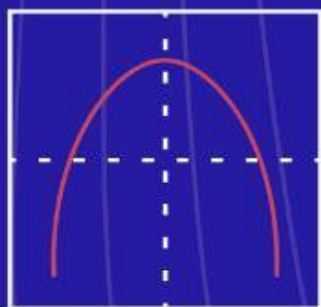
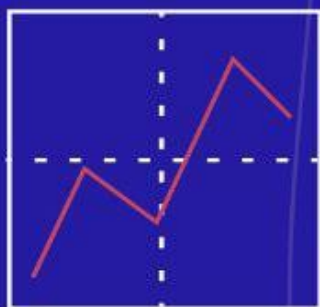


Інна ВИГОДНЕР Світлана МОІСЕЄНКО

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦІЇ
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Хмельницький 2024

Міністерство освіти і науки України
Херсонський національний технічний університет

Інна ВИГОДНЕР Світлана МОІСЕЄНКО
ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Лекції

Навчальний посібник

Хмельницький – 2024 р.

УДК 519.2(075.8)
В41

Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 11 від 16.04. 2024 р.)

Рецензенти:

Д. О. Редчиць — д.ф.-м.н., ст. наук. співр., заступник директора з науково-організаційної роботи Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України

В. В. Македон — д. е. н., професор кафедри міжнародної економіки і світових фінансів, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Вигоднер І.В., Моїсеєнко С.В.

В41 **Вища та прикладна математика. Лекції:** навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання / І. В. Вигоднер, С. В. Моїсеєнко. – Херсон: Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В. С., 2024 р. – 154 с.

ISBN 978-617-8187-27-9 (електронне видання)

Навчальний посібник побудовано відповідно чинній робочій програмі підготовки студентів з дисципліни «**Вища математика**». Посібник містить всі розділи даного курсу. З кожної теми запропоновано досить розгорнутий курс лекційного матеріалу, наведено розв'язки типових прикладів і задач. Кожний розділ супроводжується контрольними запитаннями для самоперевірки.

УДК 519.2(075.8)

ISBN 978–617–8187–26–2 (електронне видання)

© Вигоднер І. В., 2024
© Моїсеєнко С. В., 2024
© ФОП Вишемирський В.С., 2024

ВСТУП

Дисципліна «**Вища математика**» є однією з обов'язкових компонент, які слухають студенти економічних спеціальностей: Маркетинг, Менеджмент, Міжнародні економічні відносини. Якісна математична освіта є стрижневою складовою професійної компетентності бакалавра, який повинен володіти методами математичного моделювання, кількісного та якісного аналізу, прогнозування та оптимізації.

Сьогоднішні студенти - це майбутні фахівці, які будуть працювати в найрізноманітніших сферах: економічній, в тому числі, зовнішньоекономічній, інформаційній, в державному управлінні, тощо. Майбутній фахівець повинен вміти ефективно використовувати людські, матеріальні та фінансові ресурси задля досягнення цілей установи або організації. Сучасний менеджер та маркетолог це спеціаліст, який вміє виконувати математичний аналіз проблем маркетингової діяльності, налагодити установу, оптимізувати її структуру задля знаходження траєкторії розвитку з метою досягнення максимальної ефективності.

Щоб відповідати таким вимогам, необхідно володіти базовими математичними поняттями, розумітися на основних засадах теорії ймовірностей і математичної статистики та володіти методами математичного моделювання (вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів та явищ).

Навчальна дисципліна «Вища математика» покликана допомогти студенту отримати такі знання та навички. Навчальна програма містить необхідний мінімум знань з таких розділів математики: лінійна алгебра та аналітична геометрія, основи теорії ймовірностей та математичної статистики, математичне програмування.

У запропонованому навчальному посібнику викладено теоретичні основи (лекційний матеріал), який відповідає робочій програмі дисципліни та надано алгоритми розв'язування задач. Кожна лекція містить теоретичні запитання для самоперевірки.

ЗМІСТ

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри	6
Розділ 2. Вступ до математичного аналізу. Границя і неперервність функції	22
Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї незалежної змінної	33
Розділ 4. Диференціальне числення функцій кількох змінних	50
Розділ 5. Невизначений інтеграл	58
Розділ 6. Визначений інтеграл	65
Розділ 7. Основні поняття теорії ймовірностей. Випадкові події	76
Розділ 8. Випадкові величини	107
Розділ 9. Елементи економіко – математичного моделювання	121
Додатки	144
Рекомендована література	153

РОЗДІЛ I

Елементи лінійної алгебри

Лекція 1

Тема: Елементи теорії матриць і визначників

Мета: ввести основні поняття з теорії матриць, розглянути дії над матрицями; ввести поняття визначників першого та другого порядків; надати методи обчислення визначників; дати поняття оберненої матриці, метод її знаходження та розв'язання матричних рівнянь.

Матриці, їх види

Означення 1.1.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення 1.2.

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо у неї всі елементи, окрім розташованих по головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення 1.3.

Діагональна матриця, у якій на головній діагоналі знаходяться одиниці, називається **одиничною**.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця A^T називається транспонованою до матриці A , якщо в матриці A стовпці та рядки поміняти місцями.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Дії з матрицями

Означення 1.4.

Сумою двох матриць A і B називається матриця $C = A + B$ розмірності $m \times n$, кожен елемент якої обчислюється за правилом: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Приклад 1.1

Знайти суму матриць A та B .

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 61 & 43 \\ 21 & 58 & 37 \\ 44 & 70 & 56 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 25 & 19 & 37 \\ 39 & 22 & 43 \\ 16 & 10 & 44 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За означенням суми матриць:

$$A + B = \begin{pmatrix} 35+25 & 19+61 & 43+37 \\ 21+39 & 58+22 & 37+43 \\ 44+16 & 70+10 & 56+44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 80 & 80 \\ 60 & 80 & 80 \\ 60 & 80 & 100 \end{pmatrix}$$

Означення 1.5.

Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, кожен елемент якої $\beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$.

Приклад 1.2

Знайти матрицю $3A$.

Помножимо кожний елемент матриці A на число 3:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 35 & 3 \cdot 61 & 3 \cdot 43 \\ 3 \cdot 21 & 3 \cdot 58 & 3 \cdot 37 \\ 3 \cdot 44 & 3 \cdot 70 & 3 \cdot 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 183 & 129 \\ 63 & 174 & 111 \\ 132 & 210 & 168 \end{pmatrix}$$

Означення 1.6.

Матриці A розмірності $m \times r$ і B розмірності $k \times n$ називаються узгодженими для множення, якщо кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої, тобто $r = k$.

Означення 1.7.

Добутком матриці A ($m \times k$) на матрицю B ($k \times n$) називається матриця C ($m \times n$), кожен елемент якої обчислюється за формулою

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \beta_{rj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Приклад 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Знайти добуток } AB \text{ та } BA.$$

Розв'язання.

Скористаємося означенням операції добутку двох матриць:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Визначники

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом** або **визначником** матриці:

$$\det A = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Порядок визначника визначає його кількість рядків та стовпчиків.

Визначник другого порядку обчислюється з формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутника або за методом алгебраїчних доповнень.

Правило трикутника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Це правило зручно запам'ятати за допомогою наступної схеми:

Означення 1.8.

Мінором $(n-1)$ -го порядку елемента a_{ij} матриці n -го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка i і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Такий мінор позначається M_{ij} . **Наприклад**, матриця третього порядку має дев'ять мінорів другого порядку:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Означення 1.9.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} вважають

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Метод алгебраїчних доповнень (або метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпця)

Метод полягає в тому, що визначник обчислюють як суму добутків елементів a_{ij} деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Означення 1.10.

Квадратна матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці A , якщо виконується рівність

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця того ж порядку, що A та A^{-1} .

Якщо $\Delta A = 0$, то матриця називається **виродженою**.

Якщо $\Delta A \neq 0$, то матриця **невироджена** та має обернену матрицю A^{-1} , і при тому єдину.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1) Знаходимо ΔA – визначник матриці A . Якщо $\Delta A = 0$, то матриця не має оберненої.

2) Транспонуємо матрицю A , одержуємо

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) Знаходимо **союзну (приєднану)** матрицю A^* , яка складається з алгебраїчних доповнень до елементів транспонованої матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4) Обернена матриця утворюється діленням кожного елемента союзної матриці на визначник ΔA :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$$

Для знаходження розв'язку системи множимо матрицю A^{-1} на стовпець вільних членів B .

Розв'язання матричних рівнянь

Означення 1.11.

Матричним рівнянням називається рівняння в якому коефіцієнти і невідомі є матрицями.

Наприклад, матричним є рівняння $A \cdot X = B$, де A та B – відомі матриці, X – матриця, елементи якої треба знайти.

Для розв'язання рівняння $A \cdot X = B$ помножимо обидві частини на A^{-1} зліва: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то маємо формулу для розв'язання такого типу рівняння:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для розв'язання рівняння $X \cdot A = B$ помножимо обидві частини на A^{-1} праворуч. Тоді отримаємо: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1}$.

Тобто, формула для розв'язання такого типу рівняння:

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Отже, розв'язання матричного рівняння $X \cdot A = B$ зводиться до відшукування матриці A^{-1} (матриці, оберненої до A) та множення матриці B на матрицю A^{-1} .

Зауважимо, що в усіх випадках матричні рівняння мають розв'язок, якщо матриця A невироджена, тобто $\Delta A \neq 0$, а отже має обернену матрицю.

Приклад 1.4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 7 \\ 4 & -6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & -40 & 96 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Напишемо це рівняння в наступному вигляді

$$X \cdot A = B,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 7 \\ 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}, B = (63 \quad -40 \quad 96).$$

Отже, $X = B \cdot A^{-1}$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 7 \\ 4 & -6 & 11 \end{vmatrix} = -7 \neq 0; \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix};$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -12 & 2 \\ -71 & 25 & -3 \\ -50 & 18 & -3 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 31 & -12 & 2 \\ -71 & 25 & -3 \\ -50 & 18 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} X &= (63 \quad -40 \quad 96) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} 31 & -12 & 2 \\ -71 & 25 & -3 \\ -50 & 18 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{7} (1953 + 2840 - 4800 \quad -756 - 1000 + 1728 \quad 126 + 120 - 288) = \\ &= -\frac{1}{7} (-7 \quad -28 \quad -42) = (1 \quad 4 \quad 6) \end{aligned}$$

Відповідь: $X = (1 \quad 4 \quad 6)$.

Теоретичні запитання

1. Дайте означення матриці.
2. Які бувають матриці?
3. Які відбуваються дії над матрицями?
4. Дайте означення визначника n -го порядку.
5. Як обчислюються визначники 2-го та 3-го порядку?
6. Що називається оберненою матрицею?
7. Який алгоритм знаходження оберненої матриці?
8. Яка матриця не має оберненої?
9. Що називається матричним рівнянням?
10. Який алгоритм розв'язання матричного рівняння?

Лекція 2

Тема: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання

Мета: ввести поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розглянути методи Крамера, Гаусса та матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Означення 2.1.

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається сукупність рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має один чи більше розв'язків, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків. Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного розв'язку.

Розглянемо методи розв'язання систем на прикладі системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

1. Метод Крамера

Для системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

обчислюємо визначник, складений з коефіцієнтів біля невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Знаходимо визначники Δx , Δy , Δz , які утворюються із визначника Δ заміною в ньому відповідного стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Розв'язок системи знаходимо за допомогою **формул Крамера**:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Зауважимо, що можливі такі випадки:

- якщо $\Delta \neq 0$, то одержані значення (x, y, z) – єдиний розв'язок системи;
- якщо $\Delta = 0$ і $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, то система має безліч розв'язків;
- якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δx , Δy або Δz відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

2. Матричний метод

Запишемо систему лінійних рівнянь (1) в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – **матриця-стовпець невідомих**;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – **матриця-стовпець вільних членів** (правої частини системи);

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – **основна матриця системи**, елементами якої є

коефіцієнти біля невідомих.

В рівнянні $A \cdot X = B$ помножимо обидві частини на A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то маємо

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Отже, матричний спосіб зводиться до відшукування оберненої матриці.

3. Метод Гаусса (метод послідовного вилучення невідомих)

Розширеною матрицею системи (2.1) називається матриця складена з коефіцієнтів при невідомих і правих частин системи.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \quad (2.2)$$

Елементарними перетвореннями називаються наступні дії:

- 1) перестановка місцями рядків (або стовпців);
- 2) множення і ділення довільного рядка на одне й те саме число;
- 3) додавання до кожного елемента деякого рядка відповідного елемента другого рядка, помноженого на одне й те саме число.

Суть методу Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю системи зводять до такого вигляду, коли елементи під головною діагоналлю основної матриці дорівнюють нулю.

Алгоритм методу Гаусса:

1) Запишемо розширену матрицю системи. Нехай це матриця (2.2). Припустимо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Якщо $a_{11} = 0$, то змінюємо порядок рядків, обравши першим той рядок, в якому перший елемент (коефіцієнт при x) не дорівнює 0. Для полегшення обчислень зручніше обрати першим рядком той, у якого перший елемент дорівнює 1. Після перестановки рядків нумерацію елементів матриці будемо вважати такою як в (2.2).

- 2) Запишемо еквівалентну матрицю, у якої
 - а) Перший рядок переписуємо незмінним.
 - б) Другий рядок отримується так:
 - множимо елементи першого рядка на $-a_{21}$;

- множимо елементи другого рядка на a_{11} ;
- складаємо елементи першого рядка з відповідними елементами другого рядка.

Оскільки $a_{11} \cdot (-a_{21}) + a_{21} \cdot a_{11} = 0$, то перший елемент другого рядка буде дорівнювати 0 (тобто вилучається невідома x з другого рівняння).

в) Третій рядок отримується аналогічно:

- множимо елементи першого рядка на $-a_{31}$;
- множимо елементи третього рядка на a_{11} ;
- складаємо елементи першого рядка з відповідними елементами третього рядка.

Отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_3 \end{array} \right) \quad (2.3)$$

3) Запишемо наступну еквівалентну матрицю, у якої

- Перший та другий рядки переписуємо незмінними.
- Третій рядок отримується так:
 - множимо елементи другого рядка на $-c_{32}$;
 - множимо елементи третього рядка на c_{22} ;
 - складаємо елементи другого рядка з відповідними елементами третього рядка.

Отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & d_3 \end{array} \right) \quad (2.4)$$

4) Запишемо систему рівнянь, відповідну матриці (2.4):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ c_{22}y + c_{23}z = c_2 \\ d_{33}z = d_3 \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо значення невідомої z . Підставляючи значення z у друге рівняння, знаходимо значення y , значення x одержуємо аналогічно з першого рівняння.

Приклад 2.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) матричним способом;
- 3) методом Гаусса;

Розв'язання.

1) Для розв'язання за формулами Крамера спочатку обчислимо визначник Δ (для прикладу обчислення проведемо за методом трикутника):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 5 - \\ - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = -15 - 1 - 5 + 1 - 25 - 3 = -48 \neq 0$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

Далі обчислимо визначник Δ_x (для прикладу обчислення проведемо за методом алгебраїчних доповнень розкладанням за елементами першого рядка):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \\ + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1)) - 1 \cdot (10 \cdot 5 - (-12) \cdot (-1)) + \\ + 1 \cdot (10 \cdot (-1) - (-12) \cdot (-1)) = -2 \cdot (-6) - 1 \cdot 38 + 1 \cdot (-22) = 12 - 38 - 22 = -48$$

Обчислимо визначник Δ_y (для прикладу обчислення проведемо за методом алгебраїчних доповнень розкладанням за елементами першого стовпця):

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \\ + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (10 \cdot 5 - (-12) \cdot (-1)) - 5 \cdot (-2 \cdot 5 - (-12) \cdot 1) + \\ + 1 \cdot (-2 \cdot (-1) - 10 \cdot 1) = 3 \cdot 38 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 114 - 10 - 8 = 96$$

Визначник Δ_z :

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 144$$

Отже, за формулами Крамера маємо такий розв'язок системи:

$$x = \frac{-48}{-48} = 1, \quad y = \frac{96}{-48} = -2, \quad z = \frac{144}{-48} = -3.$$

Відповідь: $(1; -2; -3)$.

2) Для розв'язання матричним способом також спочатку обчислюють визначник Δ :

$$\Delta A = -48 \neq 0$$

Отже, матриця A має обернену матрицю. Далі знаходимо транс-поновану матрицю, а потім союзну

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$A^{-1} = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -6 \cdot (-2) + (-6) \cdot 10 + 0 \cdot (-12) \\ -26 \cdot (-2) + 14 \cdot 10 + 8 \cdot (-12) \\ -4 \cdot (-2) + 4 \cdot 10 + (-8) \cdot (-12) \end{pmatrix} = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -48 \\ 96 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $(1; -2; -3)$.

3) Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 5 & -12 \end{array} \right)$$

Для зручності поміняємо місцями перший і третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 5 & -1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad (2.5)$$

Приведемо матрицю (7) до виду (3):

- а) перший рядок нової матриці перепишемо із матриці (2.5) без змін;
- б) перший рядок матриці (7) помножимо на -5 , складемо його з другим рядком і запишемо замість другого рядка в новій матриці;
- в) перший рядок матриці (7) помножимо на -3 , складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & -26 & 70 \\ 0 & 4 & -14 & 34 \end{array} \right) \quad (2.6)$$

Приведемо матрицю (8) до виду (4):

- а) перший та другий рядки нової матриці перепишемо із матриці (2.6) без змін;
- б) другий рядок матриці (2.6) помножимо на -1 , складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & -26 & 70 \\ 0 & 0 & 12 & -36 \end{array} \right) \quad (2.7)$$

Для зручності подальших обчислень в матриці (2.7) поділимо другий рядок на 2, а третій – на 12. Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 2 & -13 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad (2.8)$$

Система рівнянь, відповідна матриці (2.8), має вигляд:

$$\begin{cases} x - y + 5z = -12 \\ 2y - 13z = 35 \\ z = -3 \end{cases}$$

Отже маємо, що $z = -3$, тоді з другого рівняння останньої системи $y = -2$, а з першого рівняння $x = 1$.

Відповідь: $(1; -2; -3)$.

4) Спочатку так само як в п.3 задачі приводимо розширену матрицю системи до виду (2.4). Отримаємо матрицю (2.8). Далі приведемо матрицю (2.8) до виду (2.5):

а) третій рядок нової матриці перепишемо із матриці (10) без змін;

б) третій рядок матриці (2.8) помножимо на 13, складемо його з другим рядком і запишемо замість другого рядка в новій матриці;

в) третій рядок матриці (2.8) помножимо на -5, складемо його з першим рядком і запишемо замість першого рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Для зручності подальших обчислень в останній матриці поділимо другий рядок на 2. Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad (2.9)$$

Приведемо матрицю (2.9) до виду (2.6):

а) третій та другий рядки нової матриці перепишемо із матриці (2.9) без змін;

б) складемо другий та перший рядки матриці (2.9) і запишемо замість першого рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Отже, з останньої матриці маємо систему

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Відповідь: $(1; -2; -3)$.

Теоретичні запитання

- о називають системою n лінійних алгебраїчних рівнянь із m невідомими?
 - о називають розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
 - о називають матрицею коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
 - о називають розширеною матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
 - и нерівність нулю визначника матриці коефіцієнтів необхідна для визначеності системи?
 - и нерівність нулю визначника матриці коефіцієнтів достатня для визначеності системи?
 - кі дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають рівносильними?
 - ку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають сумісною?
 - ку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають несумісною?
 - Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають визначеною?
 - Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають невизначеною?
12. Опишіть процедуру знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гаусса, матричним методом та за допомогою формул Крамера.
13. Які переваги та недоліки мають вищезазначені методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

РОЗДІЛ II

Вступ до математичного аналізу. Границя і неперервність функції

Лекція 3

Тема: Границя функції

Мета: ввести поняття границі функції, розглянути основні властивості границь та методи розкриття деяких невизначеностей; ознайомити з першою і другою визначними границями та їх наслідками.

Означення 3.1.

Змінна величина y називається **функцією** незалежної змінної x , якщо кожному значенню x із деякої множини X поставлено у відповідність єдине значення y .

Якщо y є функцією від x , то записують $y = f(x)$.

Змінна x називається **аргументом** функції $y = f(x)$.

Вираз $f(a)$ означає те значення $y = f(x)$, яке приймає функція y при $x = a$.

Означення 3.2.

Множина X , що є сукупністю значень незалежної змінної x , для яких визначаються значення залежної змінної y , називається **областю визначення** функції (або **областю існування**).

Геометрично, область визначення функції $y = f(x)$ є проекцією графіка функції на вісь OX .

Означення 3.3.

Сукупність значень y , які відповідають всім значенням $x \in X$, називається **областю значень** (або **областю зміни**) функції.

Означення 3.4.

Функція $y = f(x)$ називається **однозначною**, якщо кожному значенню x відповідає одне єдине значення y , в протилежному випадку – **многозначною**.

Елементарними функціями називаються степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернено тригонометричні, гіперболічні функції, а також функції, що отримуються із вище перерахованих за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозиції (операції взяття функції від функції), що застосовуються скінченне число разів.

Границя функції

Означення 3.5.

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при x прямуючим до a ($x \rightarrow a$), якщо для всіх значень x , які достатньо мало відрізняються від a , відповідні значення функції $y = f(x)$ достатньо мало відрізняються від числа A , і записується це так

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{або} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a$$

Зауваження:

- 1) a – може бути скінченним числом або ∞ .
- 2) Якщо функція має границю при $x \rightarrow a$, то тільки одну.
- 3) Якщо значення функції $y = f(x)$ прямують до ∞ при $x \rightarrow a$, то

кажуть, що границею функції при $x \rightarrow a$ є нескінченність і записують

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Означення 3.6.

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \rightarrow a$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty.$$

Означення 3.7.

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow a$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Зауваження:

- 1) якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$;
- 2) якщо $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$.

Властивості границі

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} C = C, C = \text{const}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \beta \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^\alpha$
- 6) $\lim_{x \rightarrow a} \log_\alpha f(x) = \log_\alpha \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha^{f(x)} = \alpha^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Методи обчислення границь

Для безпосереднього знаходження границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, не користуючись правилом Лопіталя (див. розділ IV), у вираз під знаком границі підставляють замість x його граничне значення a і обчислюють використовуючи властивості границі та співвідношення нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

Приклад 3.1. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 6}{2 - x};$

Розв'язання.

Підставляючи у заданий вираз $x = 3$, отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 6}{2 - x} = \frac{3^2 - 3 + 6}{2 - 3} = \frac{12}{-1} = -12$$

Приклад 3.2. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 6}{3 - x}$$

Розв'язання.

Так як безпосереднім підставленням отримуємо, що $(x^2 - x + 6) \rightarrow 12$ при $x \rightarrow 3$, $(3 - x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 3$, то, враховуючи співвідношення для нескінченно великих і нескінченно малих функцій, $\frac{12}{3 - x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 3$. Отже

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 6}{3 - x} = \infty$$

Приклад 3.3. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2 - x + 6}$$

Розв'язання.

Безпосередньо підставляючи отримуємо, що при $x \rightarrow \infty$ $(x^2 - x + 6) \rightarrow \infty$,
тоді $\frac{5}{x^2 - x + 6} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2 - x + 6} = 0$.

Якщо при знаходженні границі $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ маємо, що $f(x) \rightarrow \infty$ і $g(x) \rightarrow \infty$,

то отримуємо **невизначеність** виду $\frac{\infty}{\infty}$. Аналогічно, з'являються інші види невизначеностей.

Види невизначеностей:

$$\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 1^\infty; \infty - \infty; 0 \cdot \infty; 0^0; \infty^0$$

Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$

Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при $x \rightarrow \infty$. Для розкриття цієї невизначеності треба чисельник і знаменник поділити на змінну в самому високому степені, який міститься в заданому виразі. Далі обчислюють знов, використовуючи властивості границі та властивості нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

Приклад 3.4. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 1}{2 + x^3}$$

Розв'язання. Безпосереднім підставленням маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тоді

ділимо чисельник і знаменник на x^3 . Маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 1}{2 + x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} + 1} = \frac{3 - 0 + 0}{0 + 1} = 3$$

Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$

1) Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при x прямуючим до якогось скінченного числа. В цьому випадку необхідно многочлени в чисельнику і в знаменнику розкласти на прості множники і скоротити.

Приклад 3.5. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 9x + 9}$$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 9x + 9} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{2(x-3)(x-1,5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{2(x-1,5)} = \frac{27}{3} = 9$$

2) Також невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якій в чисельнику або/і знаменнику знаходиться ірраціональність, при x прямуючим до якогось скінченного числа. Тоді треба зробити перетворення для позбавлення ірраціональності.

3) Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись і при обчисленні границі тригонометричних виразів. Для розкриття невизначеності в цьому випадку заданий вираз перетвореннями зводять до **першої важливої границі**.

Перша важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наслідки першої важливої границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 0, \\ \text{то } kx \rightarrow 0 \end{array} \right| = k \cdot \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Розкриття невизначеності 1^∞

Невизначеність виду 1^∞ утворюється при обчисленні границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$.

Позбавитись цієї невизначеності можна скориставшись одним з двох способів:

1) звести до другої важливої границі: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

або її наслідків: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

2) застосувати формулу $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1) \cdot g(x)}$

Приклад 3.6. Знайти границю, не користуючись правилом Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x}$$

Розв'язання. При застосуванні властивості 8 отримуємо в основі виразу невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$; якщо її позбавитись за відповідним правилом, то отримаємо 1^∞ . Далі

1 спосіб:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2+3}{x-2} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{2 \cdot \frac{x-2+2}{3} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{6 \left(\frac{x-2}{3} + \frac{2}{3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{6 \frac{x-2}{3} + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{\frac{x-2}{3}} \right)^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^4 = e^6 \cdot 1^4 = e^6 \end{aligned}$$

2 спосіб:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1 \right) 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-x+2}{x-2} \right) 2x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{1-\frac{2}{x}}} = e^{\frac{6}{1-0}} = e^6$$

Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

При відніманні від нескінченності нескінченність того ж порядку виникає невизначеність виду $\infty - \infty$. Для її розкриття необхідно перетворити заданий вираз.

Приклад 3.7. Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x});$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2-x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

Теоретичні запитання

1. Дайте означення функції.
2. Що таке область існування функції?
3. Які функції називають елементарними? Назвіть основні елементарні функції.
4. Дайте означення границі функції.
5. Сформулюйте властивості границь.
6. Які ознаки існування границі?
7. Які функції називають нескінченно малими та нескінченно великими? Який зв'язок між ними?
8. Які є невизначеності та які правила їх розкриття?
9. Назвіть першу та другу важливі границі і їх наслідки.

Лекція 4

Тема: Неперервність функції

Мета: ввести поняття неперервної функції, розглянути класифікацію точок розриву.

Означення 4.1.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, яка

дорівнює $f(x_0)$, то ця функція називається **неперервною** в точці x_0 .

Означення 4.2.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо нескінченно малому приросту аргументу ($\Delta x \rightarrow 0$) відповідає нескінченно малий приріст функції ($\Delta y \rightarrow 0$), тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Якщо $x \rightarrow x_0$ і $x < x_0$, то кажуть, що x прямує до x_0 зліва, і записують $x \rightarrow x_0 - 0$.

Якщо $x \rightarrow x_0$ і $x > x_0$, то кажуть, що x прямує до x_0 справа, і записують $x \rightarrow x_0 + 0$.

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – границя функції в точці x_0 зліва.

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – границя функції в точці x_0 справа.

Функція має границю в точці, якщо її односторонні границі (границя зліва і границя справа) в цій точці рівні між собою.

Теорема 4.1.

Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Означення 4.3.

Функція називається **неперервною на інтервалі** (скінченному або нескінченному), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Зауваження. Якщо функція не існує в точці x_0 або не виконується умова теореми про неперервність, то кажуть що функція в точці x_0 має **розрив**, а x_0 називають **точкою розриву функції**.

Класифікація точок розриву

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив **I роду (усувний)**, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0) \text{ або}$$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \text{ а } f(x_0) \text{ не існує (рис. 4.1).}$$

В цьому випадку покладають, що

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

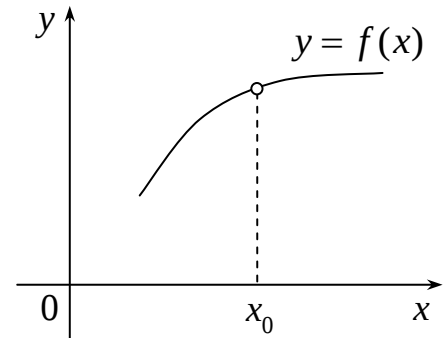


Рис. 4.1

Приклад 4.1. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Розв'язання. В точці $x = 2$ функція не існує, тобто в цій точці функція має розрив. Знайдемо границі в цій точці зліва та справа:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

Маємо, що $f(2 - 0) = f(2 + 0)$. Тобто в точці $x = 2$ функція має розрив I роду.

Розрив в точці $x = 2$ можна „усунути”, якщо покласти

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

$$\text{Так як } \frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3, \text{ то}$$

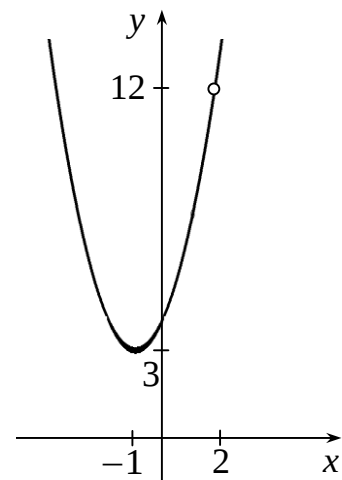


Рис. 4.2

графіком заданої функції є парабола $y = (x+1)^2 + 3$ з виколотою точкою (2,12) (рис. 4.2).

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив **I роду (неусувний)**, якщо

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

В цьому випадку різницю $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають **стрибком** функції в точці x_0 (рис. 4.3).

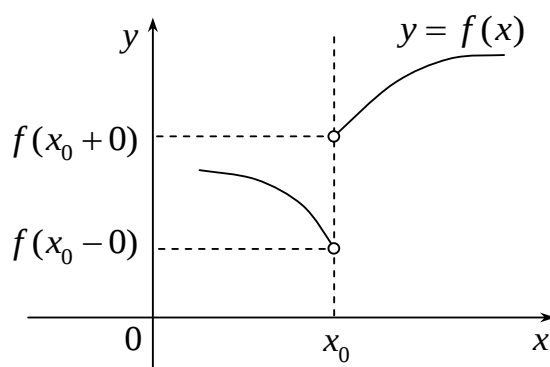


Рис. 4.3

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив **II роду (неусувний)**, якщо хоча б одна з границь $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ дорівнює нескінченності (рис. 4.4) або не існує.

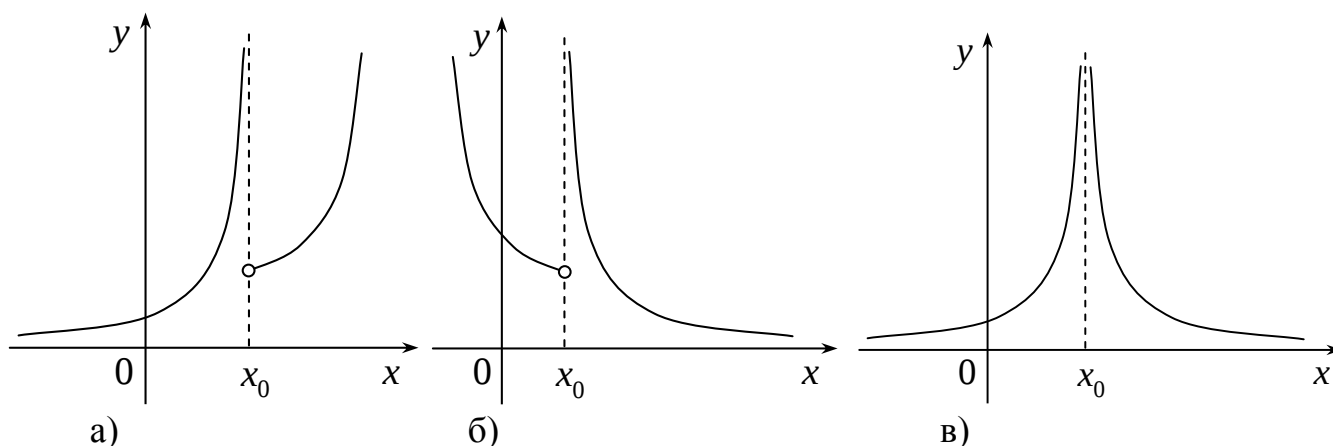


Рис. 4.4.

Теоретичні запитання

1. Дайте означення функції, неперервної в точці.
2. Дайте означення функції, неперервної на інтервалі.
3. Яка класифікація точок розриву відома?
4. Який розрив називається усувний?
5. Який розрив називається неусувний першого роду?
6. Який розрив називається неусувний другого роду?

РОЗДІЛ III

Диференціальне числення функції однієї незалежної змінної

Лекція 5

Тема: Похідна

Мета: ввести поняття похідної функції, показати геометричний, фізичний та економічний зміст похідної, ознайомити з правилами обчислення похідних та з формулами знаходження похідних елементарних функцій; запропонувати методи обчислення похідної складної функції, функції, що задана неявно, степенево – показниковою та заданою параметрично.

Означення 5.1.

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту незалежної змінної Δx , коли Δx прямує до 0 (рис. 1). Тобто:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Зауважимо, що за умови якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ і позначають як

$$f'(x), \text{ або } y', \text{ або } y'_x, \text{ або } \frac{dy}{dx}$$

Похідна показує „швидкість” зміни функції $y = f(x)$ (рис. 5.1).

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням** цієї функції. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0 , називають диференційованою в точці x_0 .

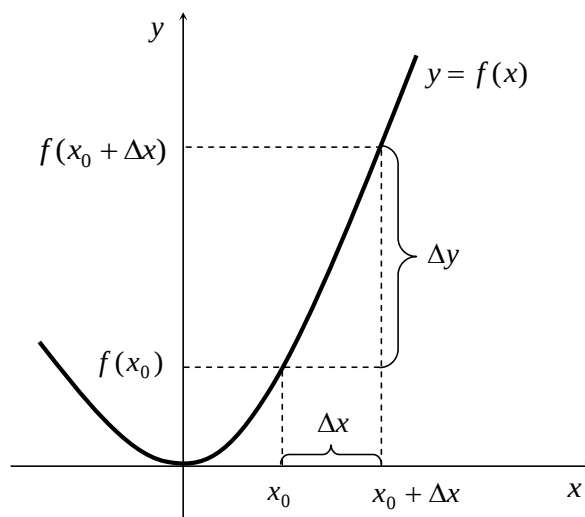


Рис. 5.1

Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку (скінченного або нескінченного), то її називають диференційованою в цьому проміжку.

Геометричний зміст похідної

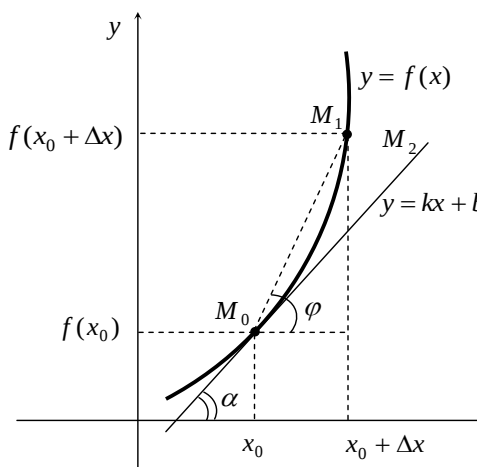


Рис. 5.2

Відношення приросту функції до приросту незалежної змінної

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

де φ – кут нахилу січної M_0M_1 , а при $\Delta x \rightarrow 0$ січна M_0M_1 прямує до дотичної M_0M_2 до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 (рис. 5.2). Якщо

α – кут нахилу дотичної M_0M_2 , то

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Таким чином, **кутовий коефіцієнт k дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 є похідною цієї функції в точці x_0 :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Фізичний зміст похідної

Якщо тіло рухається за законом $s = s(t)$, де s – шлях, а t – час, то середня швидкість руху від моменту часу t до $t + \Delta t$:

$$v_c = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Отже, дійсна швидкість в даний момент часу:

$$v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v_c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

Таким чином: **швидкість в даний момент часу** є похідною від пройденого шляху $s(t)$ по часу t : $v = \frac{ds}{dt}$.

Аналогічно виводиться, що **в даний момент часу**

прискорення є похідною від швидкості по часу: $a = \frac{dv}{dt}$;

теплоємність є похідною від кількості теплоти по температурі: $C = \frac{dw}{d\vartheta}$;

сила струму є похідною від кількості електрики по часу: $I = \frac{dQ}{dt}$.

Економічний зміст похідної

В даний момент часу продуктивність праці Z є похідною від обсягу виробленої продукції u по часу t : $Z = \frac{du}{dt}$.

Еластичність функції $y = f(x)$, де y може бути функцією **попиту** або **пропозиції** при ціні x , **витрат виробництва** при об'ємі продукції x , показує приблизний процентний приріст y при зміні x на 1%, і дорівнює $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Правила диференціювання функцій

Нехай дано функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

1.	$(Cu)' = Cu', C = const$
2.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
3.	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Похідні основних елементарних функцій

1.	$(c)' = 0, c = \text{const}$	6.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(x)' = 1$	7.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1},$ n – будь-яке дійсне число $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	8.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
		9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
		10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a,$ a – дійсне число, $a > 0, a \neq 1$ $(e^x)' = e^x$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приклад 5.1. Знайти похідну функції $y = \frac{\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. За правилом диференціювання дробу маємо

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{\sin x}{x^3} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x^3 - \sin x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} = \\
 &= \frac{x^2(\cos x \cdot x - \sin x \cdot 3)}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{x^4}
 \end{aligned}$$

Похідна складної функції

Означення 5.2.

Якщо $y = f(u)$, а $u = u(x)$, то $y = f(u(x))$ називається **складною функцією**.

Змінна u називається проміжною.

Наприклад:

- 1) $y = \cos^5 x$ – складна функція, де $y = u^5$, $u = \cos x$;
- 2) $y = \operatorname{arctg} x^2$ – складна функція, де $y = \operatorname{arctg} u$, $u = x^2$;
- 3) $y = 2^{\sin^2 3x}$ – складна функція, де $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin w$, $w = 3x$.

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ за змінною x :

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Для знаходження похідних f'_u та u'_x використовуються вище наведені похідні основних елементарних функцій та правила диференціювання, де замість змінної x може бути будь-яка інша змінна (наприклад, u).

Для зручності застосування правила диференціювання складної функції використовують наступну таблицю.

Приклад 5.2. Знайти похідну функції $y = \ln \sin x$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю диференціювання складної функції, маємо:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$$

Приклад 5.3. Знайти похідну функції $y = \ln^3 \sqrt{x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (\ln^3 \sqrt{x})' = 3 \ln^2 \sqrt{x} \cdot (\ln \sqrt{x})' = 3 \ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= 3 \ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Похідна функції, що задана неявно

Означення 5.3.

Функція називається **неявно заданою**, якщо змінні x і y зв'язані між собою рівнянням, що не виражене відносно y , тобто у вигляді $F(x, y) = 0$.

Наприклад: $x^2 + y^2 = 1$ або $e^y \cdot \sin y = \cos x$.

Для знаходження **похідної** y'_x **неявно заданої функції** диференціюють ліву і праву частину заданої рівності, враховуючи, що y – це функція від x , а отриману рівність розв'язують відносно y'_x .

Приклад 5.4. Знайти похідну y'_x функції $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. В цьому випадку задану рівність можна розв'язати відносно y і потім знайти y' :

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}; \quad y' = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Але, по-перше, виразити y в явному вигляді не завжди можливо, по-друге, інколи продиференціювати в неявному вигляді легше, ніж в явному.

Знайдемо похідну $x^2 + y^2 = 1$ як неявно заданої функції (як вона задана). Диференціюємо ліву і праву частину рівності, враховуючи, що y є функцією від x . Похідну лівої частини знаходимо за правило диференціювання суми, тобто як суму похідних: $(x^2)' = 2x$ і $(y^2)' = 2yy'$. Похідна правої частини: $(1)' = 0$. Отримаємо

$$2x + 2yy' = 0$$

З останньої рівності знаходимо y' :

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{або} \quad y' = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Приклад 5.5. Знайти похідну функції $e^y \sin y = \cos x$.

Розв'язання. Диференціюємо ліву і праву частину рівності. Похідну лівої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку:

$$(e^y)' \cdot \sin y + e^y \cdot (\sin y)' = (\cos x)'.$$

Так як y є функцією від x , то $(e^y)'$ і $(\sin y)'$ диференціюємо за правилом диференціювання складної функції:

$$e^y \cdot y' \cdot \sin y + e^y \cdot \cos y \cdot y' = -\sin x.$$

З останньої рівності знайдемо y' :

$$e^y \cdot y' \cdot (\sin y + \cos y) = -\sin x$$

$$y' = -\frac{\sin x}{e^y \cdot (\sin y + \cos y)}$$

Похідна степенево – показникового виразу.

Логарифмічне диференціювання

Степеново – показникова функція має вигляд $y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, тобто u і v вирази, що містять незалежну змінну x .

Для знаходження похідної функції $y = u^v$ використовують **спосіб логарифмічного диференціювання**. Цій спосіб полягає в тому, що задану функцію спочатку логарифмуємо

$$\ln y = \ln u^v,$$

тоді

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

Отримали функцію в неявній формі, тому для знаходження похідної y'_x диференціюємо ліву та праву частину останньої рівності, враховуючи, що y є функцією від x . Похідну правої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку, похідні $\ln y$ і $\ln u$ – за правилом диференціювання складної функції, отримаємо:

$$(\ln y)' = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

З останньої рівності:

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right),$$

де $y = u^v$.

Отже, похідну степенево – показникової функції можна обчислити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right) \quad (5.1)$$

Приклад 5.6. Знайти похідну функції $y = (x+1)^{\cos x}$.

Розв'язання. Скористаємося правилом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln (x+1)^{\cos x};$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(x+1).$$

Знайдемо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot (\ln(x+1))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1} (x+1)'$$

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1} \right)$$

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right)$$

Зауваження. Для диференціювання степеневих-показникових функцій замість логарифмічного диференціювання можна одразу застосовувати вже готову формулу (5.1).

Тоді для нашого прикладу, враховуючи, що $u = x+1$, а $v = \cos x$, отримаємо:

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)^{\cos x} \cdot \left((\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x \cdot (x+1)'}{x+1} \right) = \\ &= (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right) \end{aligned}$$

Похідна функції, заданої параметрично

Означення 5.4.

Функція називається заданою **параметрично**, якщо відповідні одна одній змінні x та y виражені через деякий параметр t :

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t – належить деякому інтервалу; найчастіше цей інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Похідна y'_x параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Приклад 5.7. Знайти похідну y'_x функції

$$\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Розв'язання. Враховуючи, що $\sin 2t$ і $\sin^2 t$ складні вирази і їх треба диференціювати за правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$y'_t = 2 \cdot \sin t \cdot (\sin t)' = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = \sin 2t;$$

$$x'_t = \cos 2t \cdot (2t)' = \cos 2t \cdot 2 = 2 \cos 2t.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{\sin 2t}{2 \cos 2t} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t.$$

Теоретичні запитання

1. Дайте означення похідної функції.
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Який фізичний зміст похідної?
4. Сформулюйте правила відшукування похідних.
5. Напишіть формули і правила відшукування похідних елементарних функцій.
6. Сформулюйте правило відшукування похідних функцій, заданих неявно.
7. Сформулюйте правило відшукування похідних степеневих – показникових функцій.
8. Сформулюйте правило відшукування похідних параметрично заданих функцій.

Лекція 6

Тема: Застосування похідної

Мета: ознайомити із застосуваннями похідної, а саме з рівняннями дотичної та нормалі до графіка функції, з правилом Лопітала, з можливостями дослідження функції; узагальнити застосування похідної в схемі повного дослідження функції і побудови її графіка.

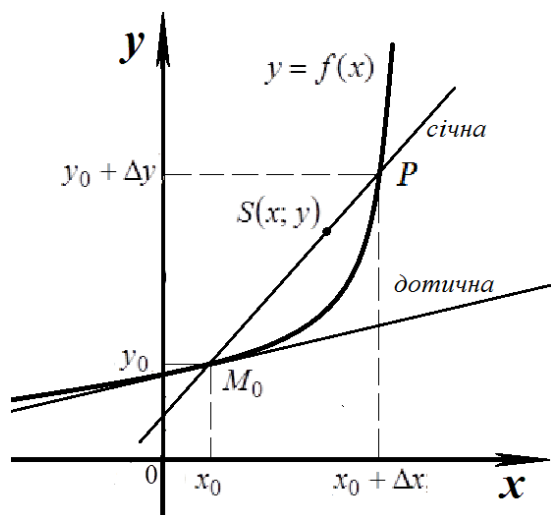


Рис. 6.1.

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою у точці x_0 . У цій точці задана функція приймає значення $y_0 = f(x_0)$. Точка M_0 з координатами $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$.

Придамо значенню x_0 приросту Δx .

Значення заданої функції у точці $x_0 + \Delta x$ позначимо $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Точка P з координатами $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ також належить графіку функції $y = f(x)$. Пряма M_0P є січною для графіка функції $y = f(x)$. Виведемо її рівняння. Для цього на січній візьмемо ще одну довільну точку $S(x; y)$. Утворимо вектори: $M_0S(x - x_0; y - y_0)$ і $M_0P(x_0 + \Delta x - x_0; y_0 + \Delta y - y_0) = (\Delta x; \Delta y)$. Оскільки ці вектори лежать на одній прямій, тому вони є колінеарними, а їх координати пропорційними:

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y}.$$

Перетворимо отримане рівняння до виду:

$$y - y_0 = \frac{\Delta y \cdot (x - x_0)}{\Delta x} \Rightarrow y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_0).$$

до приріст Δx спрямувати до нуля: $\Delta x \rightarrow 0$, тоді точка P буде наближуватися до M_0 , а січна M_0P буде наближуватися до положення дотичної. Обчислимо границі частин останньої рівності, коли $\Delta x \rightarrow 0$. Зауважимо, що від Δx у рівнянні тільки дріб $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, тому послідовно маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y - y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_0) \right) \Rightarrow$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Зробимо два зауваження. По-перше, протягом перетворень ми користувалися властивістю границь проте, що границя від сталою величини дорівнює самій сталій величині. По-друге, границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ за означенням дорівнює похідній функції $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Отже, **рівняння дотичної** до графіка функції остаточно має вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (6.1)$$

Зауваження. Геометричний зміст похідної функції у точці полягає у тому, що її значення дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка заданої функції у тій же точці, який в свою чергу дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі Ox :

$$y'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha,$$

де $y = kx + b$ – рівняння дотичної, кут α нахилу дотичної (рис. 6.2).

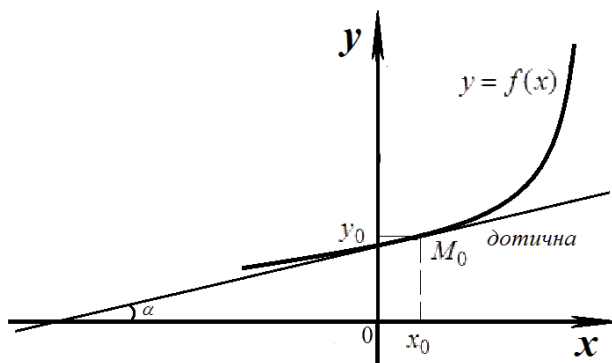


Рис. 6.2.

Рівняння дотичної до графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру t_0 :

$$y - y_0 = y'_x(t_0) \cdot (x - x_0) \quad (6.2)$$

Означення 6.1.

Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається пряма, яка перпендикулярна дотичній у цій точці і проходить через точку дотику.

Із курсу аналітичної геометрії відомо, що добуток кутових коефіцієнтів двох перпендикулярних прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ дорівнює (-1) :

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Із рівняння дотичної (6.1) кутовий коефіцієнт $k_1 = y'(x_0)$, тоді кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (6.3)$$

Рівняння нормалі до графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в

точці, що відповідає параметру t_0 :

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - x_0) \quad (6.4)$$

Приклад 6.1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \frac{2}{x}$ в точці $(1, 2)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y = \frac{2}{x}$:

$$y' = f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дотичної до кривої в заданій точці $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Для цього в похідну $f'(x)$ замість x підставимо значення 1: $f'(x_0) = -2$.

Тоді за формулою (6.1) рівняння дотичної до кривої в точці (1,2):

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

За формулою (6.3) рівняння нормалі до кривої в точці (1,2):

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Приклад 6.2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ в

точці, що відповідає параметру $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. В похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos 2t} = \frac{\sin 2t}{2 \cos 2t} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t$$

замість t підставимо значення $\frac{\pi}{6}$:

$$y'_x(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $t_0 = \frac{\pi}{6}$ маємо

$$x_0 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y_0 = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Тоді за формулою (6.2) рівняння дотичної до кривої:

$$y - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

За формулою (6.4) рівняння нормалі до кривої:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Правило Лопіталя розкриття невизначеності

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ або $\left(\frac{0}{0}\right)$ і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та

диференційовані в околі точки x_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (6.5)$$

Зауваження. Правило Лопітала можна застосовувати для знаходження границі неодноразово.

Достатня умова монотонності функції

Означення 6.1.

Нехай задана диференційована функція $y = f(x)$. Якщо в деякому інтервалі похідна $f'(x) > 0$, то функція в цьому інтервалі **зростає**; якщо в деякому інтервалі $f'(x) < 0$, то функція в цьому інтервалі **спадає**. Інтервали, в яких функція зростає або спадає, називаються **інтервалами монотонності функції**.

Означення 6.2.

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має **максимум (мінімум)**, якщо значення функції в цій точці більше (менше) ніж її значення в деякому околі точки x_0 .

Означення 6.3.

Максимум ($y_{\max}$) і мінімум ($y_{\min}$) функції називають **екстремумом функції**. Точку, в якій функція має максимум або мінімум, називають **точкою екстремуму функції**.

Необхідна умова існування екстремуму функції

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0 , то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює 0 або не існує.

Обернене твердження не вірне: для деякої точки може виконуватись умова, що похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує, проте в цій точці може не існувати екстремуму.

Точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує (можливі точки екстремуму) називають **критичними точками першого роду**.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована. Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з „+” на „-”, то в точці

x_0 функція має максимум; якщо з „-” на „+”, то мінімум; якщо знак не змінюється, то екстремуму немає.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у відрізку $[a; b]$, то в цьому відрізку завжди існують точки, в яких вона приймає найбільше і найменше значення. **Найбільше і найменше значення функції знаходяться або всередині відрізка $[a; b]$ (в критичних точках, що належать цьому відрізку) або на кінцях відрізка $[a; b]$.**

Приклад 6.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ на відрізку $[1; 4]$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо область визначення функції:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Далі знайдемо критичні точки першого роду. Для цього обчислимо похідну заданої функції і прирівняємо її до 0:

$$f'(x) = (x)' + (4x^{-2})' = 1 + 4 \cdot (-2x^{-3}) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}, \quad \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$$

Розв’язуючи останнє рівняння маємо:

$$\begin{array}{ll} x^3 - 8 = 0 & x^3 \neq 0 \\ x = 2 & x \neq 0 \end{array}$$

Отримали дві критичні точки: $x = 2$ і $x = 0$.

В точці $x = 0$ не існує не тільки $f'(x)$, а і сама задана функція. Точка $x = 2$ входить в область визначення. Також вона належить відрізку $[1; 4]$, на якому відшукуємо найбільше та найменше значення функції, а тому її треба розглянути.

Знайдемо значення заданої функції в критичній точці $x = 2$ і на кінцях заданого відрізка, тобто ще в точках $x = 1$, $x = 4$:

$$f(1) = 1 + \frac{4}{1^2} = 5; \quad f(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 3; \quad f(4) = 4 + \frac{4}{4^2} = \frac{17}{4} = 4,25.$$

Серед цих значень функції найбільше 5 і найменше 3.

Таким чином, $\max_{[1; 4]} f(x) = f(1) = 5$, $\min_{[1; 4]} f(x) = f(2) = 3$.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Нехай $f'(x_0) = 0$ і існує $f''(x_0)$. Тоді якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму, а якщо $f''(x_0) > 0$, то мінімуму.

Графік функції $y = f(x)$ називається **опуклим (угнутим)** в деякому проміжку, якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) її дотичних в цьому проміжку.

Достатня умова опуклості графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і двічі диференційована в деякому проміжку. Тоді якщо в цьому проміжку $f''(x) < 0$, то графік функції в цьому проміжку опуклий, а якщо $f''(x) > 0$, то угнутий. Точка графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину від угнутої називається точкою **перегину**.

Означення 6.4.

Точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує, називають **критичними точками другого роду**.

Ознака перегину графіка функції

Точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, якщо вона є її критичною точкою другого роду і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак.

Асимптоти

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими і горизонтальними:

- 1) Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює ∞ ($\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$), то пряма

$x = x_0$ є **вертикальною асимптотою** графіка цієї функції.

Тобто вертикальна асимптота $x = x_0$, де x_0 – точка розриву другого роду функції $y = f(x)$.

- 2) Рівняння **похилої асимптоти** функції $y = f(x)$ шукають у вигляді

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (6.6)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x). \quad (6.7)$$

Зауважимо, що в загальному випадку треба розглядати окремо границі при $x \rightarrow -\infty$ і $x \rightarrow +\infty$.

Для знаходження границь (6.5) та (6.6) часто зручніше користуватися правилом Лопітала (6.4).

Якщо не існує скінченного значення границі (6.6), то похилої асимптоти немає.

Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється у горизонтальну.

- 3) Рівняння **горизонтальної асимптоти** функції $y = f(x)$

$$y = b, \text{ де}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x). \quad (6.8)$$

Треба розглядати окремо границі при $x \rightarrow -\infty$ і $x \rightarrow +\infty$.

Якщо не існує скінченного значення границі (6.7), то горизонтальної асимптоти немає.

Схема повного дослідження функції $y = f(x)$ і побудови її графіка

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Дослідити функцію на парність, непарність (якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна і має віссю симетрії вісь Oy ; якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна і має центром симетрії початок системи координат).
- 3) Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
- 4) Знайти точки розриву функції; знайти односторонні границі зліва та справа від точок розриву.
- 5) Знайти асимптоти графіка функції.
- 6) Знайти критичні точки першого роду; інтервали зростання та спадання; точки екстремумів та екстремальні значення функції.
- 7) Знайти критичні точки другого роду; інтервали опуклості та угнутості графіка функції; точки перегину та значення функції в точках перегину.
- 8) Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції

Теоретичні запитання

1. Сформулюйте правило Лопіталю.
2. Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функцій.
3. Сформулюйте означення максимуму та мінімуму функції.
4. Яка необхідна умова існування екстремуму.
5. Яка достатня умова існування екстремуму.
6. Як знаходять асимптоти?
7. Дайте схему повного дослідження функції та побудови графіка.
8. Дайте означення диференціалу функції.
9. Запишіть формулу застосування диференціалу для наближених обчислень?
10. Що називається дотичною до графіка функції та яке її рівняння?
11. Що називається нормаллю до графіка функції та яке її рівняння?

РОЗДІЛ IV

Диференціальне числення функцій кількох змінних

Лекція 7

Тема: Диференціальне числення функцій кількох змінних

Мета: ознайомити із поняттям функції багатьох незалежних змінних, із диференціюванням таких функцій; дати означення та розглянути рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, похідної за напрямом та градієнта.

Функція двох незалежних змінних

Означення 7.1.

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних величин X і y з деякої області D відповідає певне значення величини Z , тоді величина Z є **функцією двох незалежних змінних X і y** , яка визначена в області D . Позначається така функція:

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

Значення функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ знаходять за формулою:

$$z_0 = z(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = z \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = z \Big|_{M_0}.$$

Графіком функції $z = f(x, y)$ є **поверхня** (рис. 7.1).

Область визначення (існування) функції $z = f(x, y)$ – це множина D всіх таких точок (x, y) площини Oxy (рис. 9.1), для яких вираз $f(x, y)$ має зміст і дає дійсні значення.

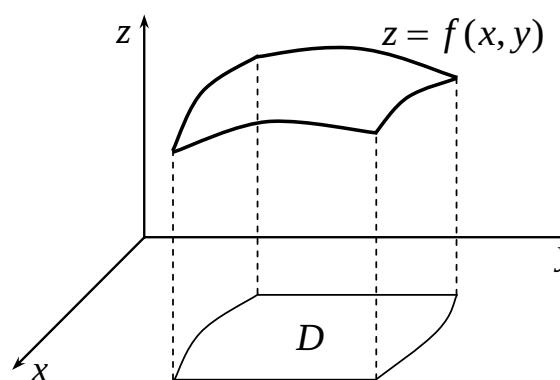


Рис. 7.1

Область визначення функції $z = f(x, y)$ може представляти собою:

- 1) частину площини Oxy , обмежену деякою кривою, при чому точки цієї кривої можуть як належати області визначення, так і ні;
- 2) всю площину Oxy ;
- 3) сукупність декількох частин площини Oxy .

Приклад. Знайти область визначення

функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$.

Зобразити її графічно.

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Область визначення функції D зображена на рис. 7.2 (заштрихована частина).

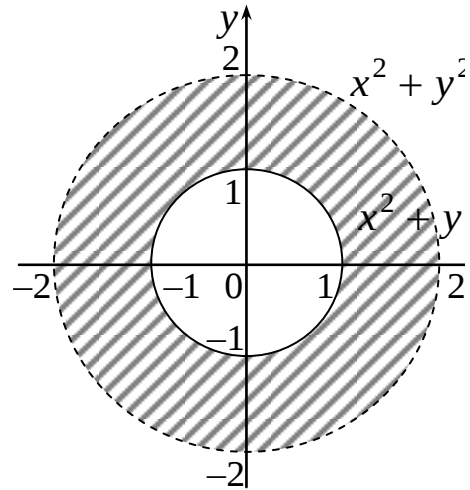


Рис. 7.2

Аналогічним чином визначається функція більшого числа змінних:

$u = f(x, y, z)$ — функція трьох незалежних змінних;

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функція n незалежних змінних.

Область визначення функції трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$ може представляти собою:

- 1) частину простору $Oxyz$, обмежену деякою поверхнею, причому сама поверхня може як належати області визначення, так і ні;
- 2) весь простір $Oxyz$;
- 3) сукупність декількох частин простору $Oxyz$.

Диференціювання функції кількох змінних

Якщо одна із незалежних змінних функції $z = f(x, y)$, наприклад x , отримала приріст Δx , то різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Відповідно, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Означення 7.2.

Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ (що не дорівнює нескінченності), яка не залежить від способу прямування $\Delta x \rightarrow 0$, тоді ця границя називається **частинною похідною (першого порядку)** функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ або } z'_x, \text{ або } f'_x(x, y), \text{ або } f'_x.$$

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній y : z'_y .

Так само визначаються частинні похідні функції трьох і більшого числа змінних.

Обчислення частинних похідних функції кількох змінних здійснюється як для функції однієї незалежної змінної, причому вважають всі незалежні змінні, крім тої по якій диференціюють, постійними величинами.

Приклад 7.1. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = \frac{y}{x}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x} \right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x} \right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{x} (y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Частинні похідні другого порядку є частинними похідними від похідних першого порядку.

Частинні похідні другого порядку для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(f'_x \right)'_x = f''_{xx}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(f'_y \right)'_y = f''_{yy}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(f'_x \right)'_y = f''_{xy}, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(f'_y \right)'_x = f''_{yx}, \quad (7.4)$$

де (7.1) і (7.2) – “чисті похідні” другого порядку;
(7.3) і (7.4) – “мішані похідні” другого порядку.

Дотична площина і нормаль до поверхні

Означення 7.3.

Якщо на поверхні через деяку точку M_0 провести кілька кривих і до них у цій точці провести дотичні прямі, то всі вони будуть лежати в одній площині, яка називається **дотичною площиною** до поверхні у точці M_0 , а перпендикуляр до дотичної площини, який виходить з точки дотику M_0 , називається **нормаллю до поверхні**.

1) Якщо поверхня задана рівнянням в явній формі $z = f(x, y)$, тобто розв’язаним відносно Z , а точка дотику має координати $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тоді **рівняння дотичної площини** має вигляд:

$$(x - x_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} - (z - z_0) = 0;$$

рівняння нормалі до поверхні у точці M_0 :

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

2) Якщо поверхня задана рівнянням у неявній формі $F(x, y, z) = 0$, тобто нерозв’язаним відносно Z , тоді **рівняння дотичної площини** має вигляд:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0;$$

рівняння нормалі до поверхні у точці M_0 :

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0}}.$$

Приклад 7.2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2$ у точці $M(1; -2; 5)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y = 2y;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 2 \cdot 1 = 2; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Таким чином дотична площина має рівняння:

$$z - 5 = 2(x - 1) - 4(y + 2) \quad \text{або} \quad 2x - 4y - z - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$.

Означення 7.4.

Величина $\Delta f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається **повним приростом** функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) .

Повний диференціал першого порядку позначається так:

$$df(x, y) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta y.$$

При достатньо малих Δx і Δy , диференціал і повний приріст функції майже не відрізняються, тому має місце наближена рівність:

$\Delta f(x, y) \approx df(x, y)$, яку можна використовувати при наближених обчисленнях:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta y. \quad (7.5)$$

Приклад 7.3. За допомогою повного диференціала наближено обчислити

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}.$$

Розв'язання. Позначимо $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Покладемо, що $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$, $y_0 = 2$, $\Delta y = -0,03$.

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}};$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{3 \cdot 1^2}{2 \cdot \sqrt{1^3 + 2^3}} = \frac{1}{2}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot \sqrt{1^3 + 2^3}} = 2.$$

Отже, за формулою (7.5) маємо

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 3 + 0,01 - 0,06 = 2,95.$$

Похідна за напрямом

Означення 7.5.

Похідна від функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом $\vec{l}$ характеризує швидкість зміни

функції за цим напрямом і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{l}, Ox) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{l}, Oy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{l}, Oz).$$

Приклад 7.4. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (1, \sqrt{3})$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2;$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = 3 \cdot 1 = 3; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M = -3 \cdot 1 = -3.$$

Враховуючи $\vec{l} = (l_1, l_2) = (1; \sqrt{3})$, маємо

$$\begin{aligned} \cos(\vec{l}, Ox) &= \frac{l_1}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}; \\ \cos(\vec{l}, Oy) &= \frac{l_2}{|\vec{l}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \right|_M &= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Градiєнт функції

Означення 7.6.

Градiєнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, який показує напрямок найбільшого зростання функції і проєкціями якого на координатні осі Ox , Oy , Oz є відповідно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Приклад 7.5. Знайти градiєнт функції $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ у точці $M(1;1)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = 5; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M = 4; \\ \text{grad } f \Big|_M &= 5\vec{i} + 4\vec{j}. \end{aligned}$$

Теоретичні запитання

1. Що називається функцією багатьох змінних, зокрема, двох змінних?
2. Який геометричний зміст функції двох змінних та її області визначення?
3. Що називається функцією трьох змінних та її областю визначення?
4. Як визначаються частинні похідні?

5. Сформулюйте правила знаходження частинних похідних функції кількох змінних.
6. В чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
7. Що називається повним диференціалом функції?
8. В чому полягає правило застосування повного диференціалу для наближених обчислень значень функції?
9. Як знаходиться рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в даній точці?
10. Що називається похідною функції в даній точці за даним напрямом? Запишіть формулу її обчислення.
11. Що називається градієнтом та як він обчислюється?

РОЗДІЛ V

Невизначений інтеграл

Лекція 8

Тема: Невизначені інтеграли, методи їх обчислення

Мета: дати поняття первісної та невизначеного інтегралу, ознайомити із таблицею невизначених інтегралів та деякими методами обчислення інтегралів: методами безпосереднього інтегрування, інтегрування заміною змінної та частинами.

Первісна

Означення 8.1.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$. Процес знаходження первісної для заданої функції називається **інтегруванням**.

Наприклад. Для функції $f(x) = x^2$ первісною є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так як

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x). \text{ Але } F(x) = \frac{x^3}{3} + 5 \text{ теж є первісною для}$$

$$\text{функції } f(x) = x^2, \text{ так як } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 5 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x).$$

Отже, якщо функція $f(x)$ має первісну, то вона має нескінченну кількість первісних $F(x) + C$, які відрізняються лише постійним доданком C .

Означення 8.2.

Сукупність всіх первісних $F(x) + C$, де C – довільна постійна, називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$. Тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x (змінна, що стоїть під знаком диференціала) – змінна інтегрування.

Таблиця основних інтегралів

1.	$\int 0 dx = C$	8	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
2.	$\int dx = x + C$	9.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ де n – будь-яке дійсне число, $n \neq -1$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
		11.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	12.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ де a – дійсне число, $a > 0, a \neq 1$ $\int e^x dx = e^x + C$	13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
		14.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	16.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Геометричний зміст невизначеного інтеграла

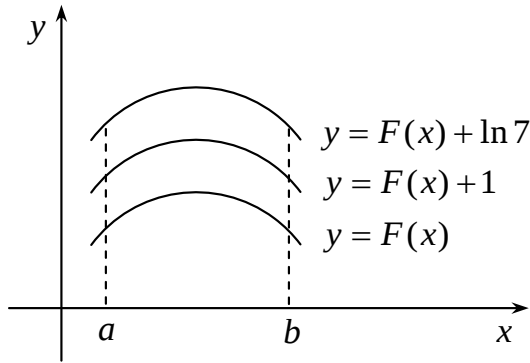


Рис. 8.1

Графік первісної функції $y = F(x)$ називають **інтегральною кривою**.

Невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ геометрично являє собою **сімейство всіх інтегральних кривих** $y = F(x) + C$, кожна з яких може бути отримана з однієї інтегральної кривої $y = F(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy .

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, де $k = const$
2. $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$
3. $d \int f(x)dx = f(x)dx$
4. $\int dF(x) = F(x) + C$

Методи інтегрування

I. Метод безпосереднього інтегрування

Метод полягає в тому, що заданий інтеграл за допомогою властивостей невизначеного інтеграла зводиться до табличних інтегралів.

Приклад 8.1. Знайти $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральну функцію розкладемо на суму:

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx = \int \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{4x}{2x} + \frac{2}{2x} \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

Застосуємо властивість 2 невизначеного інтеграла:

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{x^2}{2} dx + \int 2dx + \int \frac{1}{x} dx$$

До першого та другого інтегралів застосуємо властивість 1:

$$\int \frac{x^2}{2} dx + \int 2dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + 2 \int dx + \int \frac{1}{x} dx$$

Отримали три табличних інтегралів. За формулами 3, 2, 4 відповідно таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\frac{1}{2} \int x^2 dx + 2 \int dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Отже,

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Щоб перевірити правильність відповіді треба отриманий після інтегрування вираз продиференціювати, якщо результат збігається з підінтегральною функцією, то відповідь правильна.

II. Метод заміни змінної

$$1) \quad \int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Підінтегральний вираз в правій частині може стати простим, який можна проінтегрувати, користуючись властивостями інтеграла та таблицею основних інтегралів. Але після знаходження первісної треба повернутись до початкової змінної інтегрування x . Для цього треба для функції $x = \varphi(t)$ знайти обернену $t = \psi(x)$ і підставити в первісну.

Приклад 8.2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}$.

Розв'язання. Щоб позбутись квадратного кореня зробимо заміну $x = t^2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = d(t^2) = (t^2)' dt = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{t^3 + t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Частинний випадок:

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = d(\varphi(x)) = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

Приклад 8.3. Знайти $\int x \sqrt{x-5} dx$.

Розв'язання. Щоб позбутись квадратного кореня, зробимо заміну $x-5 = t^2$.

Тоді

$$\int x\sqrt{x-5} dx = \left| \begin{array}{l} x-5=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{x-5} \\ x=t^2+5 \\ dx=d(t^2+5)=(t^2+5)'dt=2tdt \end{array} \right| = \int (t^2+5) \cdot t \cdot 2tdt =$$

$$= 2 \int (t^4 + 5t^2) dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C$$

Приклад 8.4. Знайти $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$.

Розв'язання. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1} dx$. Зробимо підстановку $e^x = t$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ d(e^x) = dt \\ (e^x)' dx = dt \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t + C = \arctg e^x + C$$

Приклад 8.5. Знайти $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Розв'язання. Так як $(x^2+1)' = 2x$, то

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)' dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left| x^2+1=t \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+1) + C$$

В інтегралі $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x))$ підстановку $\varphi(x) = t$

можна робити уявно і інтегрувати за складною змінною $\varphi(x)$. В такому випадку метод називається **підведенням під знак диференціала**.

Приклад 8.6. Знайти $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання. Так як $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \left| \cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x) \right| =$$

$$= \int \sin^3 x d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C \end{array} \right| = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

III. Метод інтегрування частинами

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Формулу інтегрування частинами можна застосовувати декілька разів підряд.

Зміст цього методу полягає в тому, що за рахунок диференціювання функції u заданий інтеграл спрощується.

Інтеграли, які обчислюються методом інтегрування частинами:

1)	$\int P_n(x) \cdot \sin kx \, dx \quad \int P_n(x) \cdot \cos kx \, dx$	$u = P_n(x), \quad dv = \begin{cases} \sin kx \, dx \\ \cos kx \, dx \\ a^{kx} \, dx \\ e^{kx} \, dx \end{cases}$
	$\int P_n(x) \cdot a^{kx} \, dx \quad \int P_n(x) \cdot e^{kx} \, dx$	

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n ; k, a – дійсні числа, $a > 0$, $a \neq 1$

Приклад 8.7. Знайти $\int x \cos x \, dx$.

Розв’язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами. Зауважимо, що при знаходженні v не має потреби дописувати „+ C ”, так як довільна постійна буде додана в самому кінці розв’язання. Отже,

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \left. \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos x \, dx \quad v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = \\ &= x \cdot \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

2)	$\int P_n(x) \cdot \arcsin kx \, dx$	$u = \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \operatorname{arcctg} kx \\ \log_a kx \\ (\log_a kx)^m \end{cases} \quad dv = P_n(x) \, dx$
	$\int P_n(x) \cdot \arccos kx \, dx$	
	$\int P_n(x) \cdot \operatorname{arctg} kx \, dx \quad \int P_n(x) \cdot \operatorname{arcctg} kx \, dx$	
	$\int P_n(x) \cdot \log_a kx \, dx$ $\int P_n(x) \cdot (\log_a kx)^m \, dx$	

Приклад 8.8. Знайти $\int \ln x \, dx$.

Розв’язання. В даному випадку многочлен $P_n(x) = 1$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

3)	$\int a^{kx} \cdot \sin mx dx \quad \int a^{kx} \cdot \cos mx dx$	Довільний вибір u та dv
----	---	-----------------------------

В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами отримаємо знов заданий інтеграл. Тоді ліву і праву частину рівності розв'язуємо як лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

В цьому випадку не важливо який з множників беремо за u , а який за dv , головне при повторному застосуванні формули розподілити функції подібним чином, як і при першому застосуванні.

Приклад 8.9. Знайти $\int e^x \sin x dx$.

Розв'язання.

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & du = (\sin x)' dx = \cos x dx \\ dv = e^x dx & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x dx$$

Отже,

$$\int e^x \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} \cdot (e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x) + C$$

Теоретичні запитання

1. Дайте означення первісної функції.
2. Що називається невизначеним інтегралом? Укажіть його геометричний зміст.
3. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтегралу.
4. Напишіть таблицю основних інтегралів.
5. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
6. Сформулюйте метод заміни змінної в невизначеному інтегралі.
7. Запишіть формулу інтегрування частинами.

РОЗДІЛ VI

Визначений інтеграл

Лекція 9

Тема: **Визначений інтеграл, його застосування**

Мета: дати поняття визначеного інтегралу, його властивостей; ознайомити із формулою Ньютона – Лейбніца та її використанням при інтегруванні заміною змінної та частинами; розглянути геометричні застосування визначеного інтегралу: знаходження площі, довжини дуги та об'єму тіла обертання.

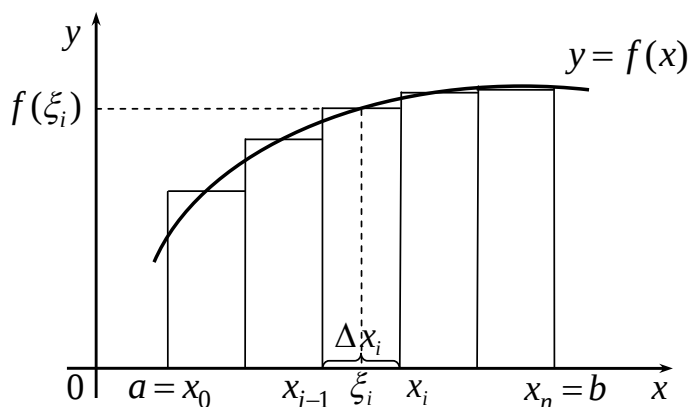


Рис. 9.1

Розглянемо функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Розіб'ємо цей відрізок на n частин, в кожній з яких виберемо точку ξ_i .

Тоді площа деякого i -того сегменту (рис. 1):

$$S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\sum_{i=1}^n S_i$ називають **інтегральною сумою**.

Означення 9.1.

Якщо існує границя інтегральної суми при умові, що довжина відрізків розбиття нескінченно зменшується $\Delta x_i \rightarrow 0$, а їх кількість нескінченно збільшується $n \rightarrow \infty$, і ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a; b]$, ні від вибору точки ξ_i , то така границя називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Теорема існування 9.1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ або обмежена і має скінченну кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

$\int_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 9.1).

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, k = const$
2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$
 $a < c < b$ (рис. 9.2)

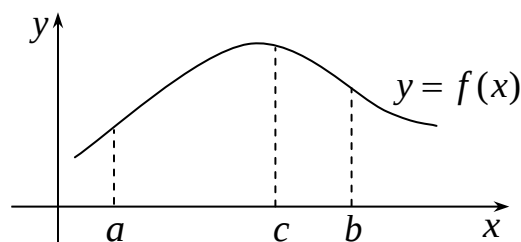


Рис. 9.2

6. Якщо на відрізку $[a; b]$ $f(x) \geq 0$ (рис. 9.3), то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Якщо на відрізку $[a; b]$ $f(x) < 0$ (рис. 9.4), то $\int_a^b f(x)dx < 0$.

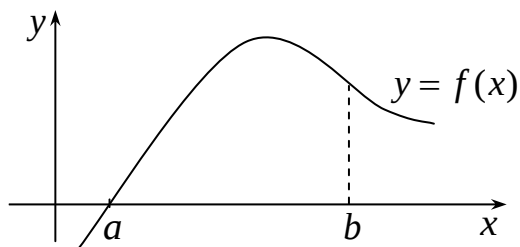


Рис. 9.3

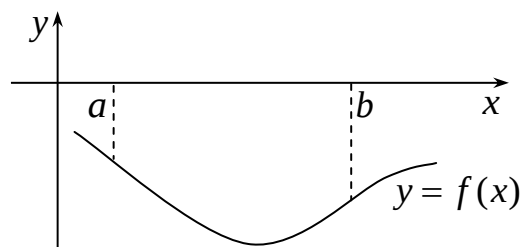


Рис. 9.4

7. Якщо функція $f(x)$ парна (рис. 9.5), тобто $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна (рис. 9.6), тобто $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

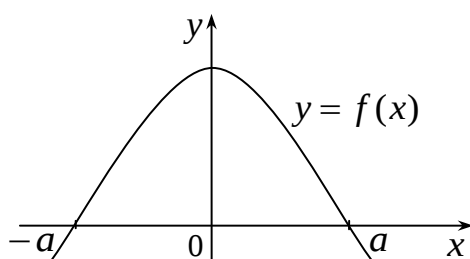


Рис. 9.5

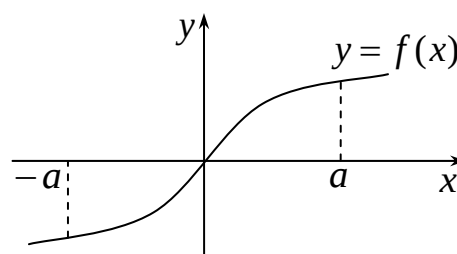


Рис. 9.6

8. Якщо на відрізку $[a; b]$
 $f_1(x) < f_2(x)$ (рис. 9.7), то

$$\int_a^b f_1(x) dx < \int_a^b f_2(x) dx.$$

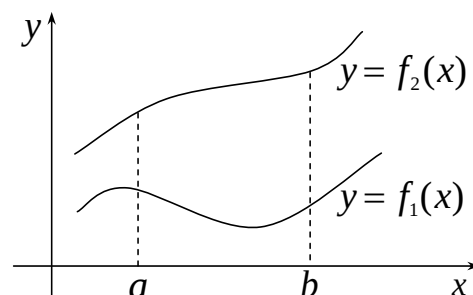


Рис. 9.7

Оцінка визначеного інтеграла

Теорема 9.2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і m – її найменше, а M – найбільше значення на цьому відрізку, то

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$

Приклад 9.1. Оцінити інтеграл $\int_{-1}^1 \sqrt{8 + x^3} dx$

Розв'язання. Знайдемо найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{8+x^3}$ на відрізку $[-1;1]$:

$$y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}}$$

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}} = 0 \Rightarrow x = 0; x \neq -2$$

$$f(0) = \sqrt{8} \approx 2,8; x = -2 \notin [-1;1]; f(-1) = \sqrt{7} \approx 2,6; f(1) = 3$$

Отже, найменше $m = \sqrt{7}$, найбільше $M = 3$. Тоді

$$2\sqrt{7} \leq \int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx \leq 6$$

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Приклад 9.2. Обчислити $\int_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x} dx$.

Розв'язання.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{\ln 2}^{\ln 8} = \frac{1}{2} (e^{2 \ln 8} - e^{2 \ln 2}) = \frac{1}{2} (e^{\ln 64} - e^{\ln 4}) = \frac{1}{2} (64 - 4) = 30$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ \text{при } x_1 = a, t_1 = \alpha \\ \text{при } x_2 = b, t_2 = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Приклад 9.3. Обчислити $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \\ x = 3; t = 2 \\ x = 8; t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\int_2^3 t^2 dt - \int_2^3 dt \right) =$$

$$= 2 \left(\left. \frac{t^3}{3} \right|_2^3 - t \right|_2^3 \right) = 2 \left(\left(9 - \frac{8}{3} \right) - (3 - 2) \right) = \frac{32}{3}.$$

Інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Приклад 9.4. Обчислити $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0) + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -2$$

Середнє значення функції

Теорема 9.3. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку існує така точка c , що буде мати місце рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

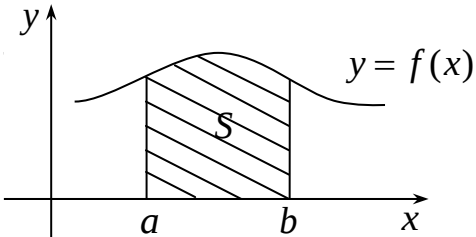
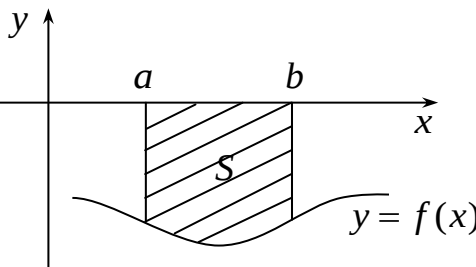
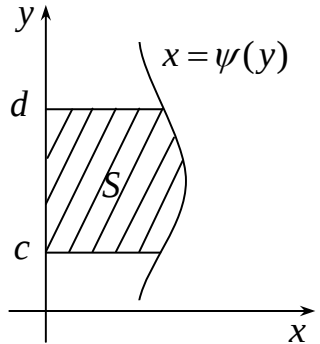
$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

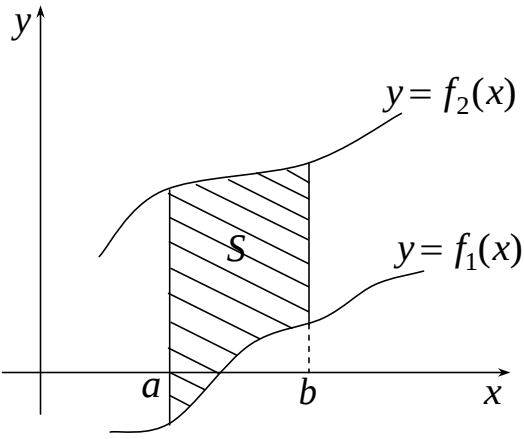
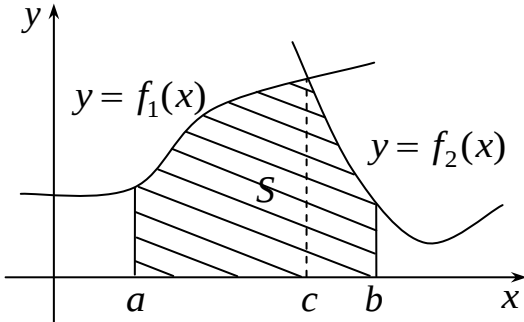
Приклад 9.5. Знайти середнє значення функції $y = x^3$ на відрізку $[0;2]$.

Розв’язання. $f(c) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{8} (2^4 - 0) = 2.$

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі

1	 Рис. 9.8	$S = \int_a^b f(x) dx$
2	 Рис. 9.9	$S = - \int_a^b f(x) dx$
3	 Рис. 9.10	$S = \int_c^d \psi(y) dy$

4	 Рис. 9.11	$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$
5	 Рис. 9.12	$S = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx$

Приклад 9.6. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 3x$, прямими $x = 0$, $x = 4$ і віссю Ox .

Розв'язання. Спочатку будуємо задані лінії.

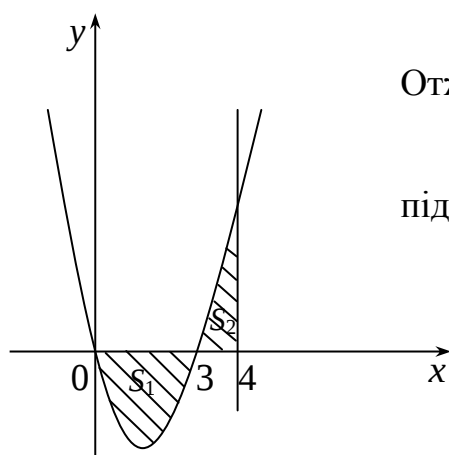


Рис. 9.13

Маємо дві замкнуті фігури (рис. 9.13).

Отже, шукана площа складається з S_1 і S_2 .

Враховуючи, що перша фігура знаходиться під віссю Ox , отримуємо

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 = -\int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx = \\
 &= -\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 + \left. \frac{3x^2}{2} \right|_0^3 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_3^4 - \left. \frac{3x^2}{2} \right|_3^4 = \frac{19}{3} \text{ (кв.}
 \end{aligned}$$

од.)

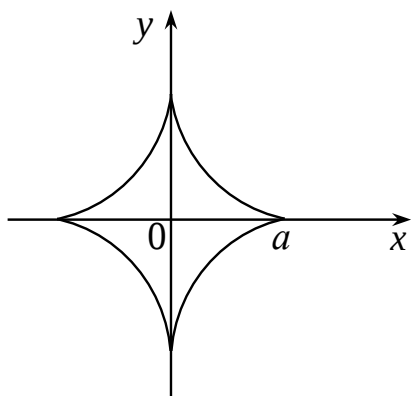
- 6) Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ де $t \in [t_1; t_2]$, то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

Приклад 9.7. Знайти площу астроїди.

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо графік. Для цього покладемо значення t від 0 до 2π і із заданої системи знайдемо точки астроїди з координатами (x, y) .



Так як лінія симетрична (рис. 9.14), то достатньо обчислити площу для однієї чверті:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}: x_1 = 0, y_1 = a$$

$$t_2 = 0: x_2 = a, y_2 = 0$$

$$x' = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$$

Тоді за відповідною формулою маємо:

Рис. 9.14

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot (-3a \cos^2 t \cdot \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt$$

Поступово знижуючи степінь підінтегрального виразу, отримаємо

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t + \cos^3 2t \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t + (1 - \sin^2 2t) \cos 2t \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t - \sin^2 2t \cos 2t \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{\sin^3 2t}{6} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ (кв. од.)}$$

Обчислення довжини дуги

- 1) В декартовій системі координат довжина лінії $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Приклад 9.8. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} \left(e^x \bigg|_0^1 - e^{-x} \bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{e^2 - 1}{2e} \text{ (од.)} \end{aligned}$$

- 2) Довжина лінії, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1; t_2]$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

Приклад 9.9. Знайти довжину астроїди при $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язання. $x' = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$, $y' = 3a \sin^2 t \cdot \cos t$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \\
&= -\frac{3a}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{3a}{2} \text{ (од.)}
\end{aligned}$$

Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$ (рис. 9.15).

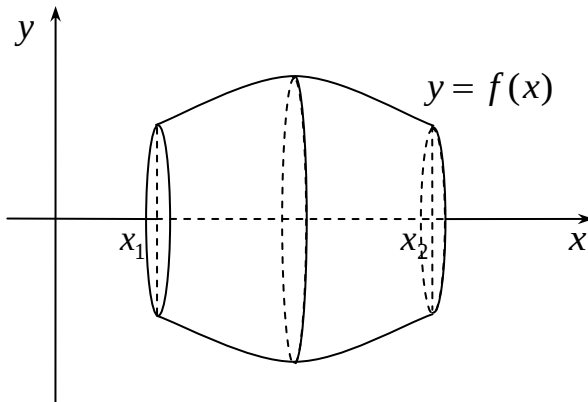


Рис. 9.15

Площа поперечного перерізу:

$$S = \pi R^2 = \pi y^2 = \pi \cdot (f(x))^2.$$

Тоді об'єм тіла обертання

$$V_{Ox} = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi (f(x))^2 dx$$

Аналогічно знаходиться об'єм тіла обертання навколо осі Oy .

Тобто,

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx; \quad V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} (\psi(y))^2 dy$$

Приклад 9.10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо Ox фігури, обмеженої графіками функцій $y^2 = x$ і $x = 3$.

Розв'язання. Побудуємо графік (рис. 9.16).

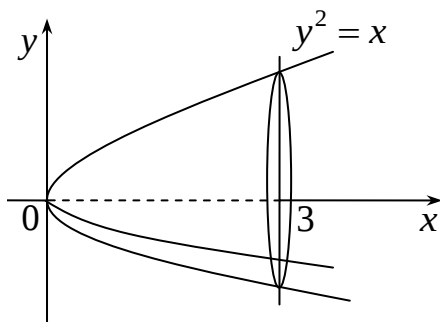


Рис. 9.16

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

Підставимо $y^2 = x$ у формулу, отримаємо

$$V_{Ox} = \pi \int_0^3 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9\pi}{2} \text{ (куб. од.)}$$

Теоретичні запитання

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Які практичні задачі призводять до поняття визначеного інтеграла?
3. Перелічіть всі властивості визначеного інтеграла.
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Запишіть формулу обчислення площі в прямокутних координатах.
6. Запишіть формули для обчислення довжини дуги кривої в прямокутних координатах?
7. Як обчислюється об'єм тіла обертання?

РОЗДІЛ VII

Основні поняття теорії ймовірностей. Випадкові події

Лекція 10

Тема: Основні поняття теорії ймовірностей.
Елементи комбінаторики

Мета: ознайомити студентів з емпіричними та логічними основами теорії ймовірностей; дати означення комбінаторним поняттям та надати приклади їх використання в рішенні задач.

Основні поняття

Народження теорії ймовірностей відноситься до середини XVII ст. й пов'язане з вивченням азартних ігор задля визначення шансів гравця на виграш. Однак поняття "гра" ширше, ніж "азартна гра". Справді, під грою можна розуміти досить далекі від азартних ігор події: воєнна стратегія, тактика, політичні переговори, ділові виробничі стосунки тощо. Теорія ймовірностей вже давно стала всеосяжною наукою про випадок, про випадкові події. Перші роботи з теорії ймовірностей та подальші пов'язані з іменами Д.Кардано, Х.Гюйгенс, Б.Паскаль, П.Ферма, Я.Бернуллі, К.Гаусса, П.С.Чебишова, О.М.Ляпунова, А.А.Маркова та ін.

Означення 10.1

Експериментом (випробуванням, дослідом) деяку сукупність дій, яка може бути повторена в однотипних (незмінних основних) умовах необмежене число разів.

Означення 10.2

Подією називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Позначаються події заголовними буквами латинського алфавіту: А, В, С і т. д.

Приклад 10.1. Експеримент – кидок монети; основні умови – симетричність монети; другорядні умови – сила кидка, швидкість вітру, опір повітря, вологість і т. д.; події – випадання "орла" або "цифри".

Приклад 10.2. Експеримент – проведення лекції, основні умови – періодичність, місце проведення, лектор; другорядні умови – робочий тиждень,

наявність мультимедійної установки в аудиторії і т. д.; подія – присутність студента на лекції.

Означення 01.3

Елементарною подією називається один з взаємовиключних один одного результатів експерименту.

Позначаються елементарні події малими буквами латинського або грецького алфавітів: $a, b, c, \alpha, \beta, \omega$.

Означення 10.4

Множина всіх результатів експерименту, що розглядається, називається **простором елементарних подій**. Позначається простір елементарних подій Ω .

Усі події можна розділити на три види: достовірні, неможливі та випадкові.

Означення 10.5

Достовірною називається подія, яка в результаті експерименту неодмінно повинна відбутися (позначається U).

Означення 10.6

Неможливою називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися (позначається $\emptyset$).

Означення 10.7

Випадковою називається подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в одних виходах відбувається, а в інших – ні.

Для всякої випадкової події A і кожної елементарної події ω можна сказати, сприяє чи ні елементарна подія ω появі випадкової події A . Подію A можна розглядати як підмножину Ω , яка складається з тих подій ω , які сприяють появі події A .

Множина Ω може бути як дискретною (складатися з скінченної кількості подій), так і неперервною (складатися із незчисленної кількості).

Приклад 10.3. Розглянемо експеримент: однократне підкидання монети.

Дослід: кидок монети. Елементарні події: ω_1 – випадання герба, ω_2 – випадання цифри. Простір елементарних подій: $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2 \}$. Випадкові події: A_1 – випав герб, $A_1 = \{ \omega_1 \}$, A_2 – випала цифра, $A_2 = \{ \omega_2 \}$. Таким чином, елементарна подія ω_1 сприятлива випадкової події A_1 , а елементарна подія ω_2 сприятлива випадкової події A_2 .

Приклад 10.4. Розглянемо експеримент однократного підкидання гральної кістки. Дослід: кидок кістки. Елементарні події: ω_1 – випала одиниця, ω_2 – випала двійка, ω_3 – випала трійка, $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ – випали чотири, п'ять і шість відповідно.

Простір елементарних подій: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Випадкові події: A – випало парне число, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. B – випало непарне число, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. C – випала цифра сім, $C = \emptyset$; D – випала цифра, не більше шести, $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = U$.

Означення 10.8

Декілька подій називаються **несумісними**, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.

Приклад 10.5. Прикладами несумісних подій можна відзначити випадіння:

герба і цифри при одному підкиданні монети; парного і непарного числа очок при одному підкиданні грального кубика. Прикладом сумісних подій є випадання цифри «1» і непарного числа очок.

Означення 10.9

Декілька подій в експерименті називаються **рівноможливими**, якщо за умовами експерименту немає підстави вважати появу якоїсь з них більш можливою, ніж появи інших.

Приклад 10.6. Прикладами рівноможливих подій можна відзначити появи: герба і цифри при одному підкиданні монети; парного і непарного числа очок при одному підкиданні грального кубика; випадіння цифр «1», «2», «3», «4», «5», «6» при одному підкиданні грального кубика. Прикладом нерівноможливих подій є випадіння цифри «2» і непарного числа очок.

Означення 10.10

Повною групою подій називаються декілька попарно несумісних подій, таких, що в результаті експерименту одна з них неодмінно повинна відбутися.

Іншими словами, поява хоча б однієї з подій із повної групи подій є достовірною подією.

Приклад 10.7. Прикладами повної групи подій можна відзначити: появу чорної і червоної масті при витягуванні карти з колоди; парної і непарної цифри при одному підкиданні гральної кістки. Таким чином, використовуючи означення повної групи подій, можна дати уточнене поняття простора подій.

Означення 10.11

Множина всіх елементарних подій, що складають повну групу несумісних подій, називається **простором подій**.

Означення 10.12

Якщо виходи експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються **випадками**.

Приклад 10.8. Прикладом випадку є випадання при однократному кидку грального кубика парної або непарної цифри.

Означення 10.13

Випадок називається **сприятливим до події**, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Приклад 10.9. Розглянемо експеримент однократного підкидання гральної кісті. Для випадкової події A – випадіння парного числа очок, сприятливими будуть тільки три випадки: випадіння 2, 4, 6 очок;

$$A = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}.$$

Елементи комбінаторики. Основні принципи комбінаторики

Означення 10.14

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчаються кількісні характеристики різних видів з'єднань елементів, незалежно від природи самих елементів.

Суттєву роль при підрахунках кількості результатів експерименту грають комбінаційні методи, основою яких є два наступних правила.

Правило додавання

Нехай k взаємно заперечних дій можна виконати відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ способами. Тоді якусь одну з цих дій можна виконати $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило множення

Нехай потрібно виконати одна за одною k дій. При цьому першу дію можна виконати n_1 способом, другу – n_2 способами, ... , k -у – n_k способами. Тоді усі k дій разом можуть бути виконані $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Приклад 10.10. Для складання шифру використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки шифрів можна скласти, якщо кожен з них повинен містити не більше, ніж з три цифри, які не повторюються?

Розв'язання. Для складання тризначного шифру потрібно виконати одну за іншою три дії – вибір першої, другої та третьої цифри. Ці вибори можна здійснити відповідно чотирма, трьома та двома способами. Отже, на підставі правила множення, тризначних номерів буде $n_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Аналогічним чином знаходимо кількість двозначних номерів $n_2 = 4 \cdot 3 = 12$ та однозначних номерів $n_1 = 4$. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість шифрів: $n = n_3 + n_2 + n_1 = 24 + 12 + 4 = 40$.

Основні види комбінаторних з'єднань

Комбінаторні з'єднання відрізняються, в першу чергу, наявністю повторень в початковому наборі елементів. Залежно від цього виділяють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів довільної множини, яка не містить повторів: перестановки; розміщення та сполучення. Якщо в початковому наборі є однакові елементи, то розрізняють перестановки з повторами; розміщення з повторами та сполучення з повторами.

Означення 10.15

Перестановками з p елементів називають такі їх з'єднання, що відрізняються одне від одного порядком входження елементів.

Загальна кількість можливих перестановок з p елементів позначається P_n і визначається виразом

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (10.1)$$

Приклад 10.11. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів (a, b, c) та порахувати їх кількість.

Розв'язання. Можливі наступні з'єднання: $abc, bac, cab, acb, bca, cba$. Кількість таких з'єднань: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 10.12. Скількома способами можна розташувати на полиці в ряд чотири різні книги?

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів розташування книг визначається відповідно до виразу $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Легко помітити, що такий же результат можна одержати, застосовуючи правило множення. На перше місце на полицю можна поставити будь-яку з чотирьох книг (n_1 способів, $n_1=4$), після чого на друге місце – будь-яку з трьох, що залишилися (n_2 способів, $n_2=3$), потім – будь-яку з двох, (n_3 способів, $n_3=2$) та на останньому четвертому місці буде стояти остання нерозміщена книга ($n_4=1$). За правилом множення отримуємо $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способи. Таким чином, правило множення можна вважати логічним обґрунтуванням формули (10.1).

Приклад 10.13. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожную цифру використовувати лише один раз?

Розв'язання. Шукана кількість п'ятизначних чисел:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Приклад 10.14. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожен цифру використовувати лише один раз?

Розв'язання. Кількість чисел в цій задачі відрізняється від відповіді з попередньої задачі, оскільки числа, які починаються з 0 не є п'ятизначними. Тому від знайденої в прикладі 1.12 відповіді треба відняти кількість п'ятицифрових перестановок, які починаються з нуля. Таких перестановок стільки, скільки можливо скласти чотиризначних чисел з цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожен цифру використовувати лише один раз. Шукана кількість таких чисел становить $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Звідси кількість п'ятизначних чисел з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожен цифру використовувати лише один раз, становить $120 - 24 = 96$.

Означення 10.16.

Розміщеннями з n елементів по m називають такі з'єднання елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом або порядком їх входження.

Загальна кількість можливих розміщень з n елементів по m позначається A_n^m і визначається виразом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1). \quad (10.2)$$

Приклад 10.15. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів (A, B, C по 2 елементи).

Розв'язання. Можливі наступні з'єднання: AB, AC, BC, BA, CA, CB . Вони відрізняються один від одного або порядком розташування (AB, BA) або складом елементів (AC, AB). Їх кількість знаходиться за формулою (10.2.):

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Приклад 10.16. В змаганні беруть участь чотири спортсмени. Скількома способами можуть бути розподілено три призових місця?

Розв'язання. Оскільки беруть участь чотири спортсмени, а місць три, та також має значення номер призового місця (групи призерів відрізняються один від одного або порядком розташування людей, або складом), то загальна кількість можливих способів визначається відповідно до виразу (1.2):

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Означення 10.17

Сполученнями з n елементів по m називають такі з'єднання елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом, порядок їх входження не враховується.

Загальна кількість можливих сполучень з n елементів по m позначається C_n^m і визначається виразом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (10.3)$$

Приклад 10.17. В класі навчається 30 учнів. Скількома способами можна призначити чотирьох чергових?

Розв'язання. Оскільки в даній ситуації має значення тільки склад групи, а порядок розташування учнів в групі чергових відсутній, то користуємося формулою

$$(10.3). \text{ Шукане число способів: } C_{30}^4 = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405.$$

Приклад 10.18. В турнірі брали участь n шахістів. Кожні два шахісти зустрічалися тільки 1 раз. Скільки матчів було зіграно в турнірі?

Розв'язання. Матчів було зіграно стільки, скільки комбінацій можна скласти з n елементів по два елементи (порядок розташування гравців в парі не важливий). За формулою (10.3):

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Увага. При вирішенні ряду задач можуть бути корисними наступні співвідношення, бажано їх запам'ятати:

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = 1; \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Означення 10.18

Розміщеннями з повтореннями називаються сполучення з n елементів по m елементів, в яких враховується як порядок розташування елементів, так і склад комбінації, причому елементи в утвореній комбінації можуть повторюватися декілька разів. Кількість всіх можливих розміщень з повтореннями становить

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (10.4)$$

Приклад 10.19. При наборі номеру телефону, дівчина забула три останні цифри. Скільки існує різних подібних телефонних номерів?

Розв'язання. При створенні комбінацій телефонного номера використовуються цифри від 0 до 9. Таким чином, $n=10$. Оскільки дівчина не пам'ятає три значення, то $m = 3$. Цифри можуть повторюватися, і порядок їх

послідовності грає роль, тому кількість всіх можливих трицифрових комбінацій відповідно формулі (10.4) дорівнює: $\overline{A_n^m} = \overline{A_{10}^3} = 10^3 = 1000$.

Означення 10.19

Перестановками з повтореннями називаються такі сполучення n елементів, при яких є n_1 елемент одного виду, n_2 елементів другого виду і так далі ($n \cdot 1 + n \cdot 2 + \dots + n \cdot i = n$). Тоді число перестановок з повтореннями позначається і обчислюється так:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_i!}. \quad (10.5)$$

Приклад 10.20. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова "математика"?

Розв'язання. В слові "математика" 10 букв, тобто, $n = 10$. Елемент (буква) "м" повторюється 2 рази, тобто, $n_1 = 2$; "а"- 3 рази, тобто, $n_2 = 3$; "т"- 2 рази, тобто $n_3 = 2$; інші букви не повторюються. Отже, шукана кількість слів за формулою (10.5) дорівнює:

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 1551200$$

Теоретичні запитання

1. Що є предметом вивчення теорії ймовірностей?
2. Дати означення поняттю подія.
3. Дати означення поняттю експеримент.
4. Дати означення поняттю елементарна подія.
5. Дати означення поняттю достовірна подія.
6. Дати означення поняттю неможлива подія.
7. Дати означення поняттю випадкова подія.
8. Які випадкові події називаються рівноможливими?
9. Які випадкові події називаються несумісними?
10. Дати означення поняттю повна група подій.
11. Які події називаються випадками?
12. Дати означення і формулу підрахунку кількості перестановок.
13. Дати означення і формулу підрахунку кількості розміщень.
14. Дати означення і формулу підрахунку кількості сполучень.
15. Дати означення і формулу підрахунку кількості перестановок з повтореннями.
16. Дати означення і формулу підрахунку кількості розміщень з повтореннями.

Лекція 11

Тема: **Класичне означення ймовірності.**
Основні теореми теорії ймовірностей

Мета: ознайомити студентів з класичним та статистичним визначенням ймовірності, з властивостями ймовірності, з застосуванням формул комбінаторики для обчислення ймовірності; з основними операціями: додаванням та множенням подій; продемонструвати теореми додавання ймовірностей несумісних та довільних подій, множення ймовірностей незалежних подій та теорему про ймовірність появи хоча б однієї з подій, незалежних у сукупності; ввести поняття повної групи подій та протилежних подій.

Статистичне та класичне означення ймовірності

Поняття ймовірності події спочатку виникло як інтуїтивне поняття. Ймовірністю події A називається кількісна оцінка можливості появи події A і позначається $P(A)$. При підході до кількісної оцінки можуть зустрічатися такі випадки. Ви маєте або не маєте змоги провести дослід. У першому разі ймовірність називають статистичною і позначається $P^*(A)$, у другому – класичною і позначається $P(A)$.

Перейдемо до кількісної оцінки статистичної ймовірності. Нехай провели n дослідів, у яких m разів відбулася подія A .

Означення 11.1

Статистичною ймовірністю $P^*(A)$ події A називається відношення числа дослідів, за яких відбулася подія A , до загального числа всіх дослідів:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (11.1)$$

У дослідях статистична ймовірність коливається близько якогось сталого числа, змінюючись мало, причому тим менше, чим більше проведено дослідів. Це стале число дістало назву класичної ймовірності. Властивість статистичної ймовірності зберігати стале значення називається властивістю стійкості. Якщо це число від дослідів до дослідів мало змінюється, то $P(A) \approx P^*(A) = \frac{m}{n}$.

Можна виділити такі властивості статистичної ймовірності:

1. $P^*(A) \geq 0$. Це очевидно, оскільки $m \geq 0, n \geq 0$.
2. Статистична ймовірність достовірної події дорівнює 1.
3. Статистична ймовірність неможливої події дорівнює 0.
4. $0 \leq P^*(A) \leq 1$.

Дамо тепер інше означення класичної ймовірності. Нехай подія A визначається множиною елементарних подій $\{\omega_i\}$. Нехай множина елементарних подій містить підмножину, для якої подія A є достовірною. Ці елементарні події сприятливі для події A .

Означення 11.2.

Класичною ймовірністю називається відношення числа елементарних подій, що сприяють події A , до загального числа подій.

Якщо число елементарних подій, що сприяють події A , – це m , а загальне число n , то формула класичної ймовірності має вигляд:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (11.2)$$

Всі властивості, сформульовані вище для статистичної ймовірності, поширюються і на класичну ймовірність.

Приклад 11.1. В урну поклали три червоних, вісім чорних і дев'ять синіх куль. Яка ймовірність дістати червону, чорну та синю кулю?

Розв'язання. Маємо три події: A – вийняти червону кулю, B – вийняти чорну кулю, C – вийняти синю кулю. Загальна кількість куль дорівнює $3+8+9=20$ – це загальна кількість подій (n). Оскільки червоних кульок три, то число елементарних подій, що сприяють події A , (m) дорівнює трьом. Звідси $P(A) = \frac{3}{20}$. Аналогічно,

$$P(B) = \frac{8}{20} \text{ та } P(C) = \frac{9}{20}.$$

Легко помітити, що цією формулою можна користуватися лише тоді, коли m і n – скінченні числа.

Застосування комбінаторних формул при обчисленні ймовірностей

Приклад 11.2. Набираючи пін-код, дівчинка забула дві останні цифри та, пам'ятаючи лише, що вони різні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що код набраний правильно?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що номер набраний правильно. Тоді загальна кількість подій n – це кількість комбінацій, які можна скласти з 10 цифр по 2, маючи на увазі, що порядок розташування елементів та склад комбінації

мають значення. Таким умовам відповідає комбінація розміщення. За формулою (10.2):

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-8)!} = \frac{10!}{2!} = 9 \cdot 10 = 90.$$

Сприяє події лише один результат, тому $m = 1$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}.$$

Приклад 11.3. У партії з 50 виробів 5 бракованих. З партії вибирають навмання 6 виробів. Визначити ймовірність того, що серед цих 6 виробів 2 виявляться бракованими.

Розв'язання. Нехай подія B полягає в тому, що серед 6 виробів 2 виявляться бракованими. Тоді загальна кількість подій n – це кількість комбінацій, які можна скласти з 50 виробів по 6, маючи на увазі, що порядок розташування елементів в комбінації не має значення. Комбінації відрізняються тільки хоча б одним елементом. Таким умовам відповідає комбінація сполучення. За формулою (10.3):

$$\begin{aligned} n = C_{50}^6 &= \frac{50!}{6!(50-6)!} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = \\ &= \frac{45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 15890700 \end{aligned}$$

Для підрахунку сприятливих подій розмірковуємо так: серед 6 виробів – 2 бракованих, тоді їх можливо вибрати лише з 5 бракованих, а 4 якісних – з 45 якісних.

$$\text{Тобто } m = C_5^2 \cdot C_{45}^4 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{45!}{4! \cdot 41!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1489950$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1489950}{15890700}.$$

Приклад 11.4. Двоє знайомих та ще 8 чоловік стоять у черзі. Визначити ймовірність того, що знайомі віддалені один від одного трьома особами.

Розв'язання. Всі 10 чоловік можуть розміститися в черзі $10!$ способами. Це значення n – загальна кількість подій в даній ситуації. Для знаходження m розмірковуємо так: перший знайомий може займати у черзі місце з першого до шостого, щоб другий міг зайняти чергу через три чоловіки. Другий знайомий може зайняти чергу раніше, тому кількість способів подвоюється. 8 чоловік, що залишилися, можуть бути розміщені у черзі $8!$ способами. Тоді сприятливих результатів $m = 2 \cdot 6 \cdot 8!$. Отже, шукана ймовірність:

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{15}.$$

Приклад 11.5. Слово "комбінаторика" складене з карток, на кожній з яких написана одна літера. Картки змішують і виймають без повернення по одній. Знайти ймовірність випадку, коли літери виймаються в порядку зазначеного слова.

Розв'язання. Нехай подія C полягає в тому, що літери виймаються в порядку слова "комбінаторика". Тоді $P(C) = \frac{m}{n}$, де n - кількість перестановок з 13 букв.

Оскільки в слові "комбінаторика" є повторення букв, то маємо перестановку з повтореннями. Звідси $n = P_{13}(2, 2, 2) = \frac{10!}{2!2!2!} = 453600$. Значення $m = 1$. Шукана

ймовірність: $P(C) = \frac{1}{453600}$.

Операції над подіями

Прості випадкові події можуть утворювати складні події, а складні – ще більш складні. Наприклад, подія – випадіння парного числа очок при кидку грального кубика, утворюється з трьох простих випадкових подій: A – випадіння цифри 2, B – випадіння 4, C – випадіння 6.

Теорія ймовірностей дає можливість за відомими ймовірностями простих подій розраховувати ймовірності складних подій.

Для розкладання або утворювання складних подій необхідно застосовувати дві операції над подіями: додавання і множення подій.

Означення 11.3.

Сумою двох подій A і B називають таку подію C , що відбувається тоді, коли відбувається або подія A , або подія B , або події A і B одночасно в одному експерименті.

Суму подій A і B прийнято записувати в такий спосіб: $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

Операція додавання має місце, коли прості події об'єднуються в складну з використанням сполучника "або".

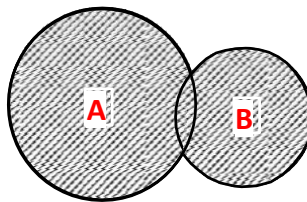


Рис. 11.1

На рис. 11.1 дана графічна інтерпретація операції додавання подій A і B . Тут область A є множиною точок, які відповідають елементарним виходам

експерименту, що сприяють події A ; область B – події B ; заштрихована область $C=A + B$ – принаймні одній з подій A і B .

Операція додавання може бути узагальнена на додавання декількох подій.

Означення 11.4.

Сумою декількох подій називають подію, що полягає у появі принаймні однієї з цих подій.

Приклад 11.6. Розглянемо експеримент підкидання грального кубика. Позначимо події: A – поява парного числа, B – поява непарного числа. Тоді складна подія $C=A+B$ полягає в появі або парного (A) або непарного (B) числа.

Означення 11.5.

Добутком двох подій A і B називають таку подію C , що відбувається тоді, коли відбувається і подія A , і подія B одночасно в одному експерименті.

Добуток подій A і B прийнято записувати в так: $C = AB$.

Операція множення має місце, коли прості події об'єднуються в складну з використанням сполучника "і".

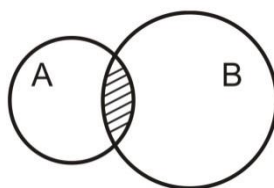


Рис.11.2

На рис. 11.2 дана графічна інтерпретація операції множення подій A і B . Тут область A є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що сприяють події A ; область B – події B . Область, яка є перетином двох областей, є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що одночасно сприяють і події A , і події B . Її можна надати як $C = AB$.

Операція множення може бути узагальнена на множення декількох подій.

Означення 11.6.

Добутком декількох подій називають таку подію, що полягає в одночасній появі в одному експерименті всіх подій.

Приклад 11.7. Нехай подія A полягає в тому, що сьогодні холодна погода. Подія B полягає в тому, що сьогодні дощить. Тоді подія C – "сьогодні холодна погода й дощить" одночасно становить собою добуток подій A і B : $C = AB$.

Виходячи з визначень суми та добутку подій, можна надати теоретико-множинне тлумачення означенням, що розглядались раніше.

Означення 11.7.

Декілька подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ складають **повну групу подій**, якщо їх сума є

достовірною подією: $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Означення 11.8.

Дві подій A і B називають **несумісними**, якщо їх добуток є неможливою подією: $A \cdot B = \emptyset$.

Означення 11.9.

Декілька подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають **попарно несумісними**, якщо поява будь-якої з них виключає появу кожної з останніх: $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

Теорема 11.1.

Нехай події A_1 та A_2 – несумісні, причому ймовірності цих подій відомі. Тоді ймовірність появи тільки однієї з цих подій, незалежно якої, дорівнює сумі ймовірностей подій A_1 та A_2 :

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (11.3)$$

Наслідок. Нехай події $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несумісні. Тоді ймовірність появи тільки однієї з цих подій, незалежно якої, дорівнює сумі ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (11.4)$$

Приклад 11.8. За результатами сесії 13 студентів мають середній бал "3", 12 студентів – "4" і 6 – "5". Яка ймовірність того, що випадково обраний студент здав сесію якісно?

Розв'язання. Здати сесію якісно означає мати середній бал "4" або "5". Оскільки всього студентів $13+12+6=31$, то ймовірність події A_1 (випадково обраний студент здав сесію на "4", становить $\frac{12}{31}$, а ймовірність події A_2 (випадково обраний студент здав сесію на "5" – $\frac{6}{31}$. Оскільки події A_1 та A_2 несумісні, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{12}{31} + \frac{6}{31} = \frac{18}{31}.$$

Повна група подій

Теорема 11.2.

Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (11.5)$$

Протилежні події

Означення 11.10

Дві події називають **протилежними**, якщо вони утворюють повну групу.

Якщо одну з подій позначити A , то протилежну подію позначають $\bar{A}$.

Приклад 11.9. Якщо при одному пострілі можливі тільки дві ситуації – потрапити або не потрапити в мішень, то подія A – попадання та $\bar{A}$ – промах є протилежними подіями.

Теорема 11.3.

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (11.6)$$

Звернемо увагу, що, якщо ймовірність однієї з протилежних подій позначають p , то ймовірність протилежної події позначають q .

Приклад 11.10. Ймовірність p того, що день буде сонячний становить 0,7. Яка ймовірність q того, що сонця не буде?

Розв'язання. Оскільки події "день буде сонячний" та "сонця не буде" – протилежні, то $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$.

Теорема додавання ймовірностей довільних подій

Теорема 11.4.

Ймовірність суми двох довільних подій A_1 та A_2 дорівнює сумі ймовірностей кожної з них без ймовірності їх добутку:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2). \quad (11.7)$$

Зауваження. Теорема справедлива для обчислення ймовірності суми будь-якого скінченного числа довільних подій.

Теорема множення ймовірностей незалежних випадкових подій

Означення 11.11.

Випадкові події A_1 та A_2 називаються незалежними, якщо ймовірність появи

однієї з них не залежить від появи іншої.

Теорема 11.5.

Ймовірність сумісної появи двох незалежних випадкових подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Теорема 11.6.

Якщо випадкові події A_1 та A_2 незалежні, то події A_1 і $\overline{A_2}$, A_2 і $\overline{A_1}$, $\overline{A_1}$ і $\overline{A_2}$ також незалежні.

Зауваження. На практиці для перевірки незалежності подій здебільшого виходять з інтуїтивних міркувань, пов'язаних із характером випробувань, а саме: події вважають незалежними, якщо між ними нема причинного зв'язку.

Приклад 11.11. Ймовірність дістати кольорову кульку з першого ящика становить 0,9, а з другого – 0,6. З кожного ящика взяли по одній кульці. Яка ймовірність того, що обидві вони кольорові?

Розв'язання. Подія A – з першого ящика дістали кольорову кульку; подія B – з другого дістали кольорову кульку теж. Події A і B незалежні, тому ймовірність того, що одночасно відбудуться обидві події, становить:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,6 = 0,54.$$

Означення 11.12.

Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності** (або просто незалежними), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших подій.

Теорема 11.7.

Ймовірність сумісної появи декількох **незалежних в сукупності** подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (11.8)$$

Приклад 11.12. Ймовірність того, що середня температура червня вища за 30 градусів по Цельсію становить 0,1. Для червня ця ймовірність 0,15 та для серпня – 0,2. Знайти ймовірність того, що середня температура була вище за 30 градусів усі літні місяці.

Розв'язання. Оскільки середня температура в кожному місяці не залежить від температури в інші місяці, то події A – середня температура червня, B – середня температура липня та C – середня температура серпня, є незалежними в сукупності. Подія "середня температура вище за 30 градусів усі літні місяці" є добуток цих подій, тобто, ABC . За попередньою теоремою:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,003.$$

Приклад 11.13. Три стрілка стріляють по мішені. Ймовірність того, що перший стрілок потрапить у мішень, становить 0,9; другий – 0,7; третій – 0,6. Знайти ймовірності того, що:

- а) всі три стрілка потраплять в мішень;
- б) тільки один стрілок потрапить в мішень;
- в) тільки два стрілка потраплять в мішень;
- г) жоден стрілок не потрапить в мішень.

Розв’язання. Дамо позначення подіям:

A – перший стрілок потрапить у мішень, B – другий стрілок потрапить у мішень, C – третій стрілок потрапить у мішень, D – всі три стрілка потраплять в мішень, E – тільки один стрілок потрапить в мішень, F – тільки два стрілка потраплять в мішень, G – жоден стрілок не потрапить в мішень.

а) Подія D становить добуток незалежних подій A , B та C . Значить, $D=ABC$. За теоремою множення незалежних подій:

$$P(D) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,378.$$

б) Подія E – тільки один стрілок потрапить в мішень може статися в декількох випадках: або перший стрілок потрапив у мішень, але другий та третій при цьому не потрапили; або другий стрілок потрапив у мішень, але перший та третій не потрапили; або третій стрілок потрапив у мішень, але другий та перший промахнулися. Подія, при якій стрілок промахнувся, є протилежною до події потрапляння в мішень. Тому ймовірності цих подій такі:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1; \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

У вигляді логічної формули подія E надається так:
 $E = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$. Події $A, \bar{B}, \bar{C}, \bar{A}, B, \bar{C}, \bar{A}, \bar{B}, C$ незалежні в сукупності, для них використовуємо теорему множення незалежних подій; а події $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$, $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$, $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ – несумісні, тому працює теорема додавання несумісних подій. Звідси:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = \\ &= P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = \\ &= P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = \\ &= 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,154. \end{aligned}$$

в) Подія F – тільки два стрілки потрапили в мішень може статися в таких випадках: або перший і другий стрілки потрапили в мішень, але третій при цьому промахнувся; або перший та третій потрапили, але другий схибив; або перший промахнувся та другий і третій влучили одночасно.

У вигляді формули подія F має вид: $F = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$. Події $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ незалежні в сукупності, для них використовуємо теорему множення незалежних подій; а події $A \cdot B \cdot \bar{C}, A \cdot \bar{B} \cdot C, \bar{A} \cdot B \cdot C$ – несумісні, тому працює теорема додавання несумісних подій. Звідси:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C) = \\ &= P(A \cdot B \cdot \bar{C}) + P(A \cdot \bar{B} \cdot C) + P(\bar{A} \cdot B \cdot C) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,456. \end{aligned}$$

г) Подія G – жоден стрілок не потрапить в мішень, являє собою добуток трьох незалежних подій: перший стрілок не потрапить в мішень, другий не потрапить в мішень, і третій також промахнеться. Звідси $G = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$.

$$P(G) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,012.$$

Цікаво те, що події D, E, F та G утворюють повну групу подій, оскільки вони перераховують всі можливі в даній ситуації (постріл трьох стрілків) події, тобто, утворюють простір елементарних подій. Виходячи з цього, сума ймовірностей цих подій повинна дорівнювати одиниці:

$$P(D) + P(E) + P(F) + P(G) = 0,378 + 0,154 + 0,456 + 0,012 = 1$$

Ймовірність появи хоча б однієї з подій

Нехай при випробуваннях може з'явитися n подій, незалежних у сукупності, причому ймовірності цих подій відомі. Як знайти ймовірність появи хоча б однієї з цих подій? Наприклад, якщо в наслідок випробування може з'явитися три події, то поява хоча б однієї з цих подій означає появу або однієї, або двох, або трьох подій разом. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 11.8.

Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних до них подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}). \quad (11.9)$$

Якщо позначити ймовірності протилежних подій $q_1, q_2, \dots, q_n$, то формула (11.9) стає наступною:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (11.10)$$

Приклад 11.14. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілок потрапить у мішень (попередній приклад).

Розв'язання. Нехай подія K – хоча б один стрілок потрапить у мішень. Тоді за формулою (3.8):

$$\begin{aligned} P(K) &= 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = \\ &= 1 - 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 1 - 0,012 = 0,988. \end{aligned}$$

Частковий випадок формули (11.10):

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність, яка дорівнює p , то ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (11.11)$$

Приклад 11.15. Ймовірність захворіти під час епідемії грипу становить 0,3. Знайти ймовірність того, що хоча б один з чотирьох випадково обраних людей захворіє.

Розв'язання. В цьому прикладі, на відміну від попереднього, указана загальна ймовірність для всіх об'єктів, які беруть участь у досліді. Це означає, що вказана ймовірність захворіти під час епідемії грипу поширюється на кожну людину і однакова для кожної з них, тобто, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0,3$. Тоді ймовірності того, що кожна людина не захворіє, теж однакові і дорівнюють $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0,7$. Якщо подія M – хоча б одна людина захворіє, то $P(M) = 1 - 0,7^4 = 1 - 0,2401 = 0,7599$.

Принцип значущості подій

При розв'язуванні багатьох практичних задач ми зустрічаємося з подіями, ймовірність яких дуже мала. Чи можна вважати, що така подія в одиночному випробуванні не відбудеться? Вказати єдиний критерій принципу відкидання малих ймовірностей не можна. Все залежить від характеру події і конкретної задачі. Якщо, наприклад, ймовірність аварії літака дорівнює 0,01, то було б недопустимо вважати, що така подія не відбудеться і використовувати цей літак. Також не можна замінити нулем ймовірність 0,01 події, що полягає в розкритті парашута і такий парашут застосовувати не можна. Якщо така сама ймовірність 0,01 буде у події, що полягає у

запізненні поїзда на 1 хвилину, то можна практично вважати, що він прибуде вчасно. Досить мала ймовірність, при якій подію можна вважати неможливою, називається рівнем значущості події, який на практиці вважають числом, що міститься між 0,01 і 0,05.

Практичні задачі і відповідний досвід підтверджують "принцип неможливості малої ймовірності подій": якщо випадкова подія має дуже малу ймовірність, то практично можна вважати, що в одиночному випробуванні ця подія не відбудеться.

Аналогічно можна сформулювати висновок про події, ймовірність яких є близькою до одиниці: якщо випадкова подія має ймовірність, близьку до одиниці, то можна вважати, що в одиночному випробуванні ця подія відбудеться.

Теоретичні запитання

1. Дати визначення поняттю ймовірність події.
2. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?
3. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?
4. Які значення може приймати ймовірність випадкової події?
5. Які випадкові події називаються несумісними?
6. Надати класичну формулу розрахунку ймовірності події
7. Дати визначення поняттю сума двох подій.
8. Дати визначення поняттю сума декількох подій.
9. Дати визначення поняттю добуток двох подій.
10. Дати визначення поняттю добуток декількох подій.
11. Які відомі властивості операцій додавання і множення?
12. Які події називаються протилежними?
13. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
14. Які теореми теорії ймовірностей називають основними?
15. Сформулювати теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
16. Сформулювати теорему додавання ймовірностей довільних подій.
17. Які дві події називаються незалежними?
18. Сформулювати теорему множення ймовірностей двох незалежних подій.
19. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї з n попарно незалежних подій, якщо ймовірності цих подій різні?
20. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї з n попарно незалежних подій, якщо ймовірності цих подій однакові?
21. В чому полягає принцип значущості подій?

Лекція 12

Тема:

Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез Бейєса. Повторні випробування

Мета: ознайомити студентів з поняттям умовної ймовірності, з теоремою добутку двох залежних подій, з формулою повної ймовірності та формулою гіпотез Бейєса; обґрунтувати формули Бернуллі та Пуассона. Показати, в яких випадках використовується локальна та інтегральна теореми Лапласа, розглянути умови їх застосування.

Умовна ймовірність

Означення 12.1.

Умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називається відношення $P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$.

Із даної рівності випливає теорема множення ймовірностей залежних подій.

Теорема 12.1

Якщо $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, то $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, тобто ймовірність добутку двох подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася.

Формулу множення ймовірностей можна узагальнити для будь-якого кінцевого числа випадкових подій.

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – випадкові події, такі, що $P(A_1, A_2, \dots, A_n) > 0$, тоді

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

Приклад 12.1. З урни, в якій міститься 12 куль, серед яких 5 білих і 7 чорних, навмання виймають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі вони чорні?

Розв’язання. Нехай подія A_1 – перша вийнята куля чорна, A_2 – друга куля чорна та A_3 – третя чорна. Позначимо подію – всі кулі чорні – A . Тоді подію A представимо у вигляді добутку залежних подій: $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$.

Ймовірність події $P(A_1) = \frac{7}{12}$, ця подія незалежна. Але, після того, як витягли чорну кулю, всього куль стало 11, причому чорних з них вже 6. Тому подія A_2 – друга вийнята куля чорна – вже залежна від першої і ймовірність $P_{A_1}(A_2)$ умовна і дорівнює $P_{A_1}(A_2) = \frac{6}{11}$.

Аналогічно подія A_3 залежна та її ймовірність $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{10}$.

$$\text{Отже, } P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{7}{44}.$$

Формула повної ймовірності

Наслідком обох основних теорем теорії ймовірностей – теорем додавання і множення – є формула повної ймовірності.

Формула повної ймовірності використовується для визначення ймовірності події A , що може відбутися тільки за умови існування однієї з подій, які складають повну групу несумісних подій $H_i, i = \{1, 2, \dots, n\}$.

Події H_i , що задовольняють вказаним умовам називаються гіпотезами. При цьому відомі апіорні ("перед дослідом") ймовірності подій H_i та умовні ймовірності настання події A за умови, що відбулася та або інша подія H_i .

Нехай деяка подія A може відбутися тільки за умовою появи однієї з несумісних подій (гіпотез) H_i ($i = \{1, 2, \dots, n\}$), які утворюють повну групу подій. Також відомі апіорні ймовірності $P(H_i)$ кожної гіпотези й умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$ події A . Як знайти ймовірність події A ?

Теорема 12.2

Ймовірність події A , яка може відбутися тільки за умовою появи однієї з несумісних подій (гіпотез) H_i ($i = \{1, 2, \dots, n\}$), які утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей подій H_i та умовних ймовірностей настання події A за умови, що відбулася та або інша подія H_i :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (12.1)$$

Приклад 12.2. У магазині реалізується продукція трьох фірм: 50% – 1-ї фірми, 30% – 2-ї фірми і 20% – 3-ї фірми. Для продукції кожної з фірм брак становить: для продукції 1-ї фірми – 4%, для продукції 2-ї фірми – 6% і для продукції 3-ї фірми – 1%. Яка ймовірність того, що навантаження придбана в магазині одиниця продукції є бракована?

Розв'язання. Подія A – навантаження придбана в магазині одиниця продукції є бракована. Тут можливі три події - гіпотези: H_1 – придбана в магазині продукція вироблена на 1-й фірмі; H_2 – на 2-й фірмі; H_3 – на 3-й фірмі. Очевидно, що події H_1

, H_2, H_3 несумісні й утворюють повну групу, а їх ймовірності становлять: $P(H_1) = 0,5$ (в умові указано 50%); $P(H_2) = 0,3$ (30%); $P(H_3) = 0,2$ (20%). Відповідні умовні ймовірності події A складають: $P_{H_1}(A) = 0,04$, $P_{H_2}(A) = 0,06$ та $P_{H_3}(A) = 0,01$. Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,02 + 0,018 + 0,002 = 0,04.$$

Приклад 12.3. Є два ящика: у першому знаходиться 6 чорних та 4 білих кулі; у другому – 5 чорних та 7 білих. З першого ящика переклали в другий одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другого ящика навмання беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

Розв’язання. Подія A – з другого ящика взято білу кулю. Цей результат залежить від кольору перекладеної кулі із першого ящика. Можуть бути дві гіпотези: H_1 – із першого ящика перекладено білу кулю та H_2 – із першого ящика перекладено чорну кулю. Ці події несумісні і одна з них обов’язково відбудеться. Оскільки всього в першому ящику 10 куль, а білих куль 4, то ймовірність першої гіпотези $P(H_1) = \frac{4}{10}$, другої – $P(H_2) = \frac{6}{10}$. Якщо відбудеться подія H_1 , тобто, із першого ящика перекладено білу кулю, то в другому ящику стане 13 куль, серед яких тепер вже буде 8 білих. Отже, умовна ймовірність, за умовою, що відбудеться гіпотеза H_1 , дорівнює $P_{H_1}(A) = \frac{8}{13}$. Якщо відбудеться подія H_2 , тобто, з першого ящика перекладено чорну кулю, то в другому ящику стане 13 куль, але кількість білих куль не зміниться і залишиться 7. Тому умовна ймовірність, за умовою, що відбудеться гіпотеза H_2 , дорівнює $P_{H_2}(A) = \frac{7}{13}$.

$$\text{За формулою повної ймовірності } P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{13} + \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{13} = \frac{74}{130}.$$

Формула гіпотез Бейеса.

У попередній формулі повної ймовірності передбачалось, що події H_i (гіпотези) несумісні, мають із деяких міркувань відомі ймовірності, а також відомими вважаються умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$, $i=1,2,\dots,n$. Далі припустимо, що проведено експеримент, у результаті якого відбулася подія A . Тоді виникає питання про переоцінку ймовірностей виконання гіпотез H_i , тобто обчислення ймовірностей $P_A(H_i)$.

Знайдемо спочатку умовну ймовірність $P_A(H_1)$. За теоремою множення подій маємо $P(AH_1) = P(A)P_A(H_1) = P(H_1)P_{H_1}(A)$. Звідки

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$$

Підставимо в (**) $P(A)$ (формула повної ймовірності):

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}.$$

Аналогічно виводяться формули для обчислення ймовірностей інших гіпотез, тобто, ймовірність будь-якої гіпотези може бути обчислена за формулою:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}. \quad (12.2)$$

Одержану формулу називають формулою Бейєса (по прізвищу англійського математика, який її вивів (1764 рік).

Якщо ймовірності $P_{H_i}(A)$ називаються апіорними (до експерименту), то ймовірності $P_A(H_i)$ – апостеріорними (після експерименту).

Формула Бейєса корисна тим, що дозволяє коректувати відомості про випадкові події на основі інформації, що надійшла. Вона знаходить застосування скрізь, де використовують ймовірнісні методи:

- у розпізнаванні образів для виявлення об'єктів по їх зображенню;
- у радіолокаційній техніці для відділення сигналу від шуму;
- у технічній діагностиці для пошуку несправності;
- у медичній діагностиці для постановки діагнозу;
- у прогнозування погоди і в інших випадках, коли необхідно виявити ймовірну причину (гіпотезу) появи події.

Приклад 12.4. Деталі, які виготовляє завод, перевіряються щодо їх стандартності одним із трьох контролерів. Ймовірність того, що деталь надійде до першого контролера становить 0,6, до другого – 0,3, до третього – 0,1. Відомі також ймовірності того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером, – 0,8, другим – 0,9, третім – 0,97. Після перевірки деталь визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що її перевінив другий контролер.

Розв’язання. Подія A – після перевірки деталей визнана стандартною. Можливі три події - гіпотези: H_1 – деталь надійде на перевірку до першого контролера; H_2 – до другого; H_3 – до третього. Ймовірності гіпотез задано: $P(H_1) = 0,6$; $P(H_2) = 0,3$; $P(H_3) = 0,1$. Також відомі умовні ймовірності події A : $P_{H_1}(A) = 0,8$; $P_{H_2}(A) = 0,9$; $P_{H_3}(A) = 0,97$.

Шукану ймовірність обчислимо за формулою:

$$\begin{aligned} P_A(H_2) &= \\ &= \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,97} = \\ &= \frac{0,27}{0,48 + 0,27 + 0,097} = \frac{0,27}{0,847} \approx 0,32. \end{aligned}$$

Отже, пройшла переоцінка гіпотези H_2 . Якщо до проведення експерименту ця ймовірність складала 0,3, то після того, як деталь була визнана стандартною, ймовірність виявилася рівною 0,32.

Повторні незалежні випробування

Розглянемо декілька задач.

1. Нехай в урні знаходяться білі та чорні кулі. Під подією A розуміємо подію, яка полягає в тому, що з урни виймають білу кулю. Ймовірність $P(A)$ позначимо P і вважатимемо її незалежною від того, який раз ми виймаємо з урни білу кулю. Щоб забезпечити незалежність процесу при вийманні білої кулі, кожний раз повертаємо цю кулю в урну, і перед тим, як провести нове випробування, в урні ретельно перемішуємо. Протилежне випробування – вийняти чорну кулю (подія $\bar{A}$) матимемо ймовірність $q = 1 - p$. Визначити ймовірність $P_n(k)$, того, що в n випробуваннях біла куля з’явиться k разів.

2. Яка ймовірність $P_n(k)$, того, що в n киданнях монети герб з’явиться k разів за умови, що ймовірність кидання герба в одному випробуванні дорівнює p ?

3. Яка ймовірність $P_n(k)$, того, що при n незалежних пострілах кількість влучень у мішень дорівнюватиме k за умови, що ймовірність одного вилучення дорівнює p і не залежить від номера пострілу?

Усі ці задачі зводяться до схеми так званих незалежних випробувань Бернуллі.

Формула Бернуллі

Насамперед визначимо поняття незалежних випробувань. Поставимо у відповідність кожному випробуванню випадкову подію, яку позначимо A_i . Випробування називаються незалежними, якщо результати кожного випробування не залежить від результатів решти випробувань. З означення випливає, що події A_i , які відповідають випробуванням, є незалежними в сукупності, тобто $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$.

Незалежні події, в кожній з яких лише два виходи, називаються випробуваннями Бернуллі. У цьому разі події $A_1, A_2, \dots, A_n$ – група елементарних подій. Наведені вище задачі можна сформулювати в загальному вигляді так: проводиться n незалежних випробувань Бернуллі, в яких спостерігається поява події A . Яка ймовірність появи події A в n випробуваннях k разів, якщо ймовірність появи A в одному випробуванні дорівнює p , а не появи – q ? Позначимо B_k подію, яка полягає в тому, що в n випробуваннях подія A з'явиться k разів і не з'явиться $n - k$ разів. Позначимо через A_i ($i = \overline{1, k}$) подію, яка полягає в появі події A в i -му випробуванні, $\overline{A_i}$ – подію, що полягає в не появи події A в i -му випробуванні. Тоді

$$B_k = A_1 A_2 \dots A_k \overline{A_{k+1}} \overline{A_{k+2}} \dots \overline{A_n} + A_1 \overline{A_2} A_3 \dots A_{n-1} A_n + \dots$$
$$\dots + A_1 A_2 \dots A_{n-k} A_{n-(k-1)} \dots A_n. \quad (*)$$

Тут кожний доданок складається з k співмножників типу A і $n-k$ співмножників типу $\overline{A}$ і має ймовірність $p^k q^{n-k}$. Доданків у (*) стільки, скільки можна скласти з n елементів $A_1, A_2, \dots, A_n$ сполучень по k елементів, тобто C_n^k .

Враховуючи, що доданки в (*) несумісні, дістаємо $P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Проте $P(B_k) = P_n(k)$, отже

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (12.3)$$

Формула (12.3) називається **формулою Бернуллі** і дає відповідь на наведені вище запитання.

Приклад 12.5. Гральний кубик підкидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що цифра "3" випаде два рази.

Розв'язання. Підкидання грального кубика п'ять разів – незалежні випробування. Загальна кількість випробувань $n = 5$, $k = 2$ – стільки разів очікується благоприємний результат випадіння цифри "3", $p = \frac{1}{6}$ – ймовірність того, що випаде

цифра "3", $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – ймовірність того, що цифра "3" не випаде. За формулою Бернуллі:

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{10 \cdot 125}{36 \cdot 216} = \frac{625}{3888}.$$

Теорема Пуассона.

Теорема 12.3. Якщо проводяться випробування Бернуллі при $n \rightarrow \infty$ а $p \rightarrow 0$, але $np = a$, то ймовірність появи k разів події A , що з'являється в окремому випробуванні з ймовірністю p , прямує до

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (12.4)$$

Вираз (12.4) називається **асимптотичною формулою Пуассона**.

Приклад 12.6. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. У даному інтервалі часу абонент може зробити виклик незалежно від решти з ймовірністю 0,005. Потрібно знайти ймовірність того, що в даному інтервалі було не більше, ніж сім викликів.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що відбулося не більш, ніж сім викликів. Це складна подія, вона визначається вісьмома елементарними подіями: A_0 – жодного виклику, A_1 – один виклик, A_2 – два виклики і т.д.; A_7 – сім викликів.

Ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій:

$$P(A) = P_{1000}(A_0) + P_{1000}(A_1) + \dots + P_{1000}(A_7).$$

Для підрахунку кожної ймовірності застосуємо теорему Пуассона. При

$$p = 0,005; n = 1000; a = np = 5;$$

$$P_{1000}(A_i) = e^{-a} \cdot \frac{a^i}{i!} = e^{-5} \frac{5^i}{i!},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 7$$

$$P(A) = e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \dots + \frac{5^7}{7!} \right) \approx 0,875.$$

До недоліків теореми Пуассона треба віднести вимогу $p \rightarrow 0$, оскільки вона не в усіх випадках виконується. У зв'язку з цим розглянемо випадки, коли $p \neq 0$; $p \neq 1$.

При цьому при підрахунку $P_n(k)$ користуються так званою локальною граничною теоремою Муавра – Лапласа.

Локальна теорема Муавра – Лапласа

Якщо кількість незалежних випробувань досить велика, замість формули Бернуллі треба користуватися локальною і інтегральною теоремами Лапласа, які дають приближений результат, але він тим ближче до результату точної формули Бернуллі, чим більше кількість випробувань.

Асимптотична формула, яка дозволяє наближено оцінити ймовірність появи події A в n випробуваннях рівно k раз для окремого випадку $p = 0,5$ була отримана Муавром в 1730 р., а в 1783 р. Лаплас узагальнив формулу для довільного $p \neq 0; p \neq 1$.

Теорема (локальна теорема Лапласа).

Теорема 12.4. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю $\sqrt{npq}$, $p; p \in (0;1)$, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів (байдуже, у якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (12.5)$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \text{функція Гаусса; } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Функція Гаусса затабульована (див. Додатки, Таблиця 3). Це дозволяє уникнути складних обчислень, замінюючи їх простим обчисленням аргументу функції $\varphi(x)$.

Користуючись таблицями значень функції $\varphi(x)$, необхідно мати на увазі властивості цієї функції.

Властивості функції Гаусса

1. Функція Гаусса – парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Тому таблиця складена тільки для додатних значень аргументу.

2. При $|x| \geq 4$ $\varphi(x) \rightarrow 0$.

Тому таблиця значень складена тільки для аргументу $0 \leq x \leq 4$.

Приклад 12.7. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних киданнях монети. Ймовірність появи герба в одному киданні $p = 0,5$.

Розв'язання. $k = 55$; $n = 100$; $p = 0,5$; $q = 0,5$.

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1$$

За таблицею: $\varphi(1) = 0,242$.

$$P_{100}(55) \approx \frac{\varphi(1)}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,2420}{5} = 0,0484$$

Зазначимо, що локальна теорема Муавра - Лапласа дає змогу оцінити окремі ймовірності та їхню поведінку як функцію k при великих n .

Інтегральна теорема Лапласа

Теорема 12.5. (Інтегральна теорема Лапласа).

Якщо робиться n незалежних «випробувань», у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p , то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 разів і не більш k_2 разів (байдуже, в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (12.6)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Функція Лапласа затабульована (див. Додаток Таблиця 4).

Формулу (12.6) можна записати через функцію Гаусса:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx, \quad (12.7)$$

Звичайно вводять функцію: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, яку іноді називають функцією

Лапласа. Тоді через функцію Лапласа при

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

формула набуває вигляд:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (12.8)$$

Властивості функції Лапласа

1. Функція Лапласа – непарна функція, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Тому таблиця складена тільки для додатних значень аргументу.

2. При $|x| \geq 5$ $\Phi(x) \rightarrow 0,5$.

Приклад 12.8. Заводським ВТК встановлено, що в середньому 98% виробів відповідає вимогам до них, а 2% потребує регулювання. Приймальник перевірів 300 виробів. Якщо серед них виявиться 11 чи більше таких, що потребують регулювання, то всю партію буде повернуто на доопрацювання. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

Розв’язання. У нашому прикладі n досить велике і ймовірність того, що $k \leq 10$, можна оцінити за інтегральною теоремою. За умовою маємо:

$$k_1 = 0; k_2 = 10; n = 300; p = 0,02; q = 0,98,$$

$$x_1 = \frac{-6}{\sqrt{5,98}} \approx -2,47; x_2 = \frac{10-6}{\sqrt{5,88}} \approx 1,65$$

$$P(k \leq 10) \approx \Phi(1,65) - \Phi(-2,47) = \Phi(1,65) + \Phi(2,47).$$

$$\Phi(1,65) = 0,4505, \Phi(2,47) = 0,4932.$$

$$P(k \leq 10) = 0,9433$$

Теоретичні запитання.

1. Яка ймовірність називається умовною?
2. Які події називаються гіпотезами?
3. Навести формулу повної ймовірності.
4. Сформулювати теорему Бейеса.
5. Яке призначення формули Бейеса?
6. Які гіпотези називаються апіорними?
7. Які гіпотези називаються апостеріорними?
8. Що називають схемою Бернуллі?
9. Які експерименти є незалежними?
10. Сформулювати теорему Бернуллі.
11. При якому числі незалежних експериментів рекомендується використовувати формулу Бернуллі?
12. Сформулювати локальну теорему Лапласа.
13. У чому принципова відмінність теореми Бернуллі від локальної теореми Лапласа?
14. Сформулювати теорему Пуассона.
15. Яке призначення теореми Пуассона?
16. Сформулювати інтегральну теорему Лапласа.
17. Яке призначення інтегральної теореми Лапласа?

РОЗДІЛ VIII

Випадкові величини

Лекція 13

Тема: Дискретні та неперервні випадкові величини,
їх числові характеристики

Мета: ознайомити студентів з поняттям випадкової величини (дискретної та неперервної) та способами її завдання. Навчити обчислювати числові характеристики дискретних та неперервних випадкових величин.

Випадкові величини

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Означення 13.1.

Одновимірною випадковою величиною, називають величину, що у результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Приклади випадкових величин: кількість студентів, що присутні на лекції; кількість сонячних днів у році; вага осколка снаряда, що розірвався; час очікування громадського транспорту на зупинці; температура навколишнього середовища.

Для позначення випадкових величин використовують великі літери латинського алфавіту X, Y, Z , а для позначення їх можливих значень – відповідно малі літери x, y, z .

За типом простору можливих значень випадкові величини діляться на дискретні і неперервні.

Означення 13.2.

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо:

1) сукупність її можливих значень удається перерахувати – $x_1, x_2, \dots, x_n$ (або $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$), тобто значення належать зчисленної множині – скінченній або нескінченній;

2) можна знайти відповідні ймовірності $p = p_i \{X = x_i\}$ того, що випадкова величина X приймає ці значення..

Означення 13.3.

Неперервною випадковою величиною називається випадкова величина, можливі значення якої безперервно заповнюють будь-який проміжок.

Для того щоб мати вичерпну характеристику випадкової величини, необхідно знати її закон розподілу.

Означення 13.4.

Закон розподілу випадкової величини – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

Форми завдання закону розподілу дискретної випадкової величини

У теорії ймовірностей розрізняють декілька форм завдання закону розподілу дискретної випадкової величини, найбільш корисні з яких є три: ряд розподілу; многокутник розподілу; інтегральна функція розподілу.

Розглянемо послідовно кожен форму завдання закону розподілу дискретної випадкової величини.

Найбільш простою формою завдання закону розподілу є ряд розподілу.

Означення 13.5.

Ряд розподілу являє собою таблицю, що складається з двох рядків. У першому рядку розташовуються в порядку зростання всі можливі значення дискретної випадкової величини. В другому – відповідні їм ймовірності.

Загальний вид ряду розподілу відповідає таблиці:

X	x_1	x_2		x_n
P	p_1	p_2		p_n

В результаті експерименту випадкова дискретна величина повинна прийняти одне з можливих значень.

Оскільки всі можливі події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... утворюють повну групу несумісних подій, то сума відповідних ймовірностей обов'язково повинна дорівнювати одиниці (умова нормування):

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Закон розподілу можна проілюструвати графіком. Якщо на осі абсцис відкласти можливі значення випадкової величини, а на осі ординат – відповідні ймовірності і з'єднати точки (x_i, p_i) відрізками, то будемо мати графік закону розподілу. Одержану ламану називають **многокутником розподілу**.

Означення 13.6.

Многокутник розподілу – це діаграма залежності ймовірностей p_i можливих значень випадкової величини від самих цих значень x_i , ($i=\{1, 2, \dots, n\}$) (рис. 13.1).

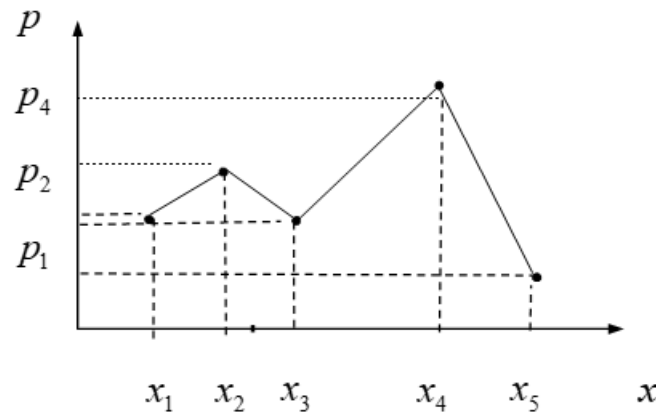


Рис. 13.1

Як відомо, закон розподілу характеризує дискретну випадкову величину. Але іноді закон розподілу невідомий, а іноді зручніше користуватися не таблицею, а числами, які характеризують величину. Такі числа називають **числовими характеристиками дискретних випадкових величин**. До них відносять математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Означення 13.7.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень та їхніх ймовірностей:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n \quad (13.1)$$

Якщо дискретна випадкова величина приймає скінченну кількість значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (13.2)$$

Приклад 13.1. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,6	0,2	0,01

Знайти її математичне сподівання.

Розв'язання.

За формулою (13.1):

$$M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,01 = \\ = 0,1 + 0,18 + 1,8 + 0,8 + 0,05 = 2,93$$

Означення 13.8.

Добутком константи C на дискретну випадкову величину називають величину CX , таку, що її значення дорівнюють добутку відповідних значень величини X на константу C , а ймовірності співпадають з відповідними ймовірностями величини X .

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині: $M(C) = C$.

2. Константу можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Означення 13.9.

Декілька випадкових величин називаються **взаємно незалежними**, якщо закони розподілів будь-якого числа з них не залежать від законів розподілу інших.

Означення 13.10

Добутком незалежних випадкових величин X та Y називається величина XY , така, що її можливі значення дорівнюють добутку кожного значення однієї величини на кожне значення іншої, а ймовірності дорівнюють добутку ймовірностей відповідних значень.

Означення 13.11

Сумою випадкових величин X та Y називається величина $X+Y$, така, що її можливі значення дорівнюють сумі кожного значення однієї величини з кожним значенням іншої, а ймовірності дорівнюють добутку ймовірностей відповідних значень.

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку декількох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z).$$

5. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

6. Математичне сподівання суми декількох незалежних випадкових величини дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y+Z)=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Приклад 13.2. Знайти математичне сподівання суми числа цифр, які можуть з'явитися при підкиданні двох гральних кубиків.

Розв'язання. Позначимо число, яке може випасти на першому кубіку X , на другому – Y . Можливі значення $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$, причому ймовірність кожного із значень $\frac{1}{6}$.

Знайдемо математичне сподівання цифри, яка може з'явитися при підкиданні першого кубика:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

$$\text{Аналогічно } M(Y)=\frac{7}{2}.$$

$$\text{Звідси } M(X+Y)=M(X)+M(Y)=3,5+3,5=7.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини

Математичне сподівання не є характеристикою, яка дає вичерпну інформацію про випадкову величину. За математичним сподіванням неможливо зрозуміти, які значення набуває величина та наскільки ці значення розсіяні навколо математичного сподівання.

Більш вичерпну інформацію дає дисперсія.

Означення 13.12.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$D(X)=M\left[X-M(X)^2\right] \quad (13.3)$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватися наступною теоремою.

Теорема 13.1.

Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2 \quad (13.4)$$

Приклад 13.3. Знайти дисперсію випадкової величини, яка задана законом розподілу:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Розв'язання

1. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X :

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$$

2. Складемо закон розподілу величини X^2 :

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

3. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X^2 :

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$$

4. Шукана дисперсія дорівнює:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія константи дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

2. Константу можна виносити за знак дисперсії, якщо попередньо піднести її до квадрату:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсія суми декількох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

5. Дисперсія суми константи та незалежної випадкової величини дорівнює дисперсії випадкової величини:

$$D(C + X) = D(X).$$

6. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Для оцінки розсіювання значень випадкової величини навколо математичного сподівання існує ще одна характеристика – середнє квадратичне відхилення.

Означення 13.13.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (13.5)$$

Середнє квадратичне відхилення має таку саму розмірність, як і сама випадкова величина. Якщо за умовою задачі це принципово, доцільно знаходити окрім дисперсії ще і середнє квадратичне відхилення.

Теорема 13.2.

Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$\begin{aligned} \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \\ &= \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}. \end{aligned}$$

Приклад 13.4. Незалежна випадкова величина задана законом розподілу:

X	0	1	2	3	7	8	9
P	0,36	0,21	0,08	0,06	0,04	0,1	0,15

Знайти всі числові характеристики випадкової величини.

Розв'язання

1. Обчислимо математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(X) &= 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,21 + 2 \cdot 0,08 + 3 \cdot 0,06 + 7 \cdot 0,04 + 8 \cdot 0,1 + \\ &+ 9 \cdot 0,15 = 0,21 + 0,16 + 0,18 + 0,28 + 0,8 + 1,35 = 2,98 \end{aligned}$$

2. Складемо закон розподілу величини X^2 :

X^2	0	1	4	9	49	64	81
P	0,36	0,21	0,08	0,06	0,04	0,1	0,15

3. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X^2 :

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,21 + 4 \cdot 0,08 + 9 \cdot 0,06 + 49 \cdot 0,04 + 64 \cdot 0,1 + 81 \cdot 0,15 = 0,21 + 0,16 + 0,32 + 0,54 + 19,6 + 6,4 = 27,23$$

4. Дисперсія дорівнює:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 27,23 - (2,98)^2 = 27,23 - 8,8804 = 18,3496$$

5. Шукане середнє квадратичне відхилення таке:

$$\sigma(X) = \sqrt{18,3496} \approx 4,2836$$

Означення 13.14.

Неперервною випадковою величиною називається випадкова величина, можливі значення якої безперервно заповнюють будь-який проміжок.

Означення 13.15.

Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$ називається функція, яка виражає ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше за x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Основні властивості функції розподілу випадкової величини

(Спільні для функцій розподілу дискретних і неперервних випадкових величин)

1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$ визначена на всій числовій прямій: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$ є неспадною функцією, тобто для $x_1 \leq x_2$ значення функції зв'язані тією ж нерівністю $F(x_1) \leq F(x_2)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

4. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$ є неперервною праворуч: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F(x) = F(x_0).$

5. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу $(a; b)$, становить

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (13.6)$$

Приклад 13.5. Неперервна випадкова величина має функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Визначити ймовірність того, що X потрапить в проміжок $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Розв'язання. Проміжок $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ належить проміжку $(-a, a)$. Це другий інтервал у функції розподілу. Тому за формулою (13.6) ймовірність того, що X виявиться у межах $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, дорівнює:

$$P\left(-\frac{a}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Щільність розподілу ймовірностей.

Означення 13.16.

Щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція

$$f(x) = F'(x) \quad (13.7)$$

Часто замість терміну "щільність розподілу" використовують термін "диференціальна функція розподілу". Щільність розподілу задає тільки неперервну випадкову величину.

З означення випливає, що

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (13.8)$$

Використавши формули (13.6) та (13.8), виразимо ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал через щільність розподілу

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (13.9)$$

Дійсно,

$$P(a \leq X < b)F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Основні властивості щільності розподілу

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

$$2. f(x) \geq 0.$$

$$3. F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \text{ тому що } f(x) = \frac{d F(x)}{dx}.$$

$$4. P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Приклад 13.6. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$.

Розв'язання. За означенням: $f(x) = F'(x)$, тому :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання

Нехай X – неперервна випадкова величина, значення якої $a \leq x \leq b$, і $f(x)$ – її щільність розподілу. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин, довжини яких $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Візьмемо в кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i . Добуток $f(\xi_i)\Delta x_i$ приблизно дорівнює ймовірності попадання неперервної випадкової величини в

інтервал Δx_i , а сума $\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$ наближено дорівнює математичному сподіванню неперервної випадкової величини.

Означення 13.17.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини називається

границя $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$, (якщо вона існує).

Звідси одержуємо формулу для обчислення:

$$M[X] = \int_a^b x f(x) dx = \quad (13.10)$$

У випадку, якщо $-\infty < x < +\infty$,

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (13.11)$$

причому інтеграл повинен збігатися абсолютно.

Дисперсія неперервної випадкової величини

Якщо X – неперервна випадкова величина, значення якої $a \leq x \leq b$, і $f(x)$ її щільність розподілу, то її дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad (13.12)$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватися наступною формулою:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X) \quad (13.13)$$

У випадку, якщо $-\infty < x < +\infty$,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad (13.14)$$

Означення 13.18.

Модом M_0 неперервної випадкової величини називається те її значення, при якому щільність ймовірності максимальна.

Означення 13.19.

Медіаною M_e неперервної випадкової величини X називається таке її значення, для якого

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0,5.$$

Зауваження.

Геометрично медіану можна тлумачити як точку, в якій пряма $x = M_e$ ділить навпіл площу, що обмежена графіком функції щільності розподілу ймовірностей і віссю Ox .

Приклад 13.7. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , якщо на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ її щільність розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x, \text{ і дорівнює нулю, коли } |x| > \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. За формулою (13.10)

$$M(X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{2}{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x \, dx = 0.$$

Відзначимо, що для обчислення значення інтеграла доцільно скористатися властивістю визначених інтегралів, яка стосується того, що визначений інтеграл від непарної функції за симетричним проміжком дорівнює нулю.

Підставимо заданий вираз функції щільності $f(x)$ і знайдене значення математичного сподівання у формулу (13.12) для обчислення дисперсії випадкової величини X :

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot f(x) \, dx - M^2(X) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos^2 x \, dx - 0^2 = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot (1 + \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos 2x \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot (I_1 + I_2) = * \\ I_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{4} = \frac{\pi^3}{12}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos 2x dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\| =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2x dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \pi + \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sin \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin 2x dx & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\| =$$

$$= 0 + 0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx =$$

$$= - \left(x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} x \cos 2x \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \cdot \cos \pi + \frac{\pi}{4} \cdot \cos \pi - \frac{1}{4} \cdot \sin 2x \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot (-1) + \frac{\pi}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot \left(\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \\
&= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot (\sin \pi + \sin \pi) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) = -\frac{\pi}{2} \cdot \\
&\quad * = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2 - 6}{12} \cdot
\end{aligned}$$

Теоретичні запитання

1. Яка величина називається випадковою?
2. Яка випадкова величина називається дискретною?
3. Яка випадкова величина називається неперервною?
4. Які способи завдання дискретної випадкової величини?
5. Дати визначення математичному сподіванню дискретної випадкової величини.
6. Як обчислюється математичне сподівання дискретної випадкової величини?
7. Сформулюйте властивості математичного сподівання дискретної випадкової величини.
8. Що називається дисперсією дискретної випадкової величини?
9. Як обчислюється дисперсія дискретної випадкової величини?
10. Сформулюйте властивості дисперсії дискретної випадкової величини.
11. Як обчислюється середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини?
12. В чому різниця дисперсії від середнього квадратичного відхилення?
13. Дати визначення функції розподілу неперервної випадкової величини.
14. Які основні властивості функції розподілу неперервної випадкової величини?
15. Що називається щільністю ймовірності?
16. Як обчислюється математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини?

РОЗДІЛ IX

Елементи економіко – математичного моделювання

Лекція 14

Тема: **Постановка оптимізаційних економічних задач**

Мета: ознайомити студентів з основними поняттями та етапами економіко-математичного моделювання, показати деякі типи економічних задач математичного програмування та класифікацію розділів математичного програмування; дати поняття загальної економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування

Математичне моделювання як метод наукового дослідження економічних явищ і процесів

Означення 14.1.

Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра.) — це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Сутність методології математичного моделювання полягає в заміні досліджуваного об'єкта його «образом» — математичною моделлю — і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп'ютерних програм. Робота не із самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп'ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з

моделями об'єктів дозволяють ретельно та досить глибоко вивчати об'єкт, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту).

Етапи економіко-математичного моделювання

В різних галузях знань, зокрема в економіці, етапи моделювання набувають специфічних рис. Проаналізуймо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

а). Постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі. Головне на цьому етапі — чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, що приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді. З урахування **а)** цілей дослідження проводиться якісний аналіз об'єкта; виокремлюються, абстрагуючись від другорядних, найважливіші риси і властивості об'єкта, що моделюється. З позиції системного підходу вивчаються структура об'єкта й головні взаємозв'язки між його елементами (підсистемами). Обираються та обґрунтовуються основні показники й система гіпотез, що пояснюють поведінку та розвиток об'єкта і на основі яких буде відбуватись подальша формалізація.

На цьому етапі моделювання широко застосовуються якісні методи описання систем, знакові та мовні моделі. Таке попереднє, наближене зображення системи називають концептуальною моделлю.

б). Розроблення математичних моделей. Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). На цьому етапі проводиться теоретичне (аналітичне) дослідження моделі, обираються методи дослідження й розв'язку.

Метою теоретичного (аналітичного) дослідження є з'ясування загальних властивостей моделі. Найважливіший момент — доведення існування розв'язку для моделі. Знання загальних властивостей моделі настільки важливе, що часто задля доведення подібних властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію первинної моделі. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладненні моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

в). Реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм (ППП) та проведення розрахунків. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ (можливе використання існуючих ППП з відповідною адаптацією) і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім великою розмірністю економічних задач, необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі за різних значень деяких параметрів. Дослідження, що проводяться за допомогою числових методів, можуть стати суттєвим доповненням до результатів аналітичного дослідження. Клас економічних задач, які можна розв'язувати числовими методами, значно ширший, ніж клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

г). Перевірка адекватності моделі. Вимога адекватності є суперечною вимозі простоти, і це слід враховувати, перевіряючи модель на адекватність. Початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами: чи всі суттєві параметри включені в модель; чи містить модель несуттєві параметри; чи правильно відображені функціональні зв'язки між параметрами; чи правильно визначені обмеження на значення параметрів тощо.

Для встановлення відповідності створюваної моделі оригіналу використовують такі методи:

- порівняння результатів моделювання з окремими експериментальними результатами, одержаними за однакових (подібних) умов;
- використання інших схожих моделей;
- порівняння структури і функціонування моделі з прототипом.

Головним шляхом перевірки адекватності моделі досліджуваного об'єкта виступає практика. Але вона потребує накопичення статистики, котра не завжди буває достатньою для отримання надійних даних. Для багатьох моделей перші два методи виявляються менш прийнятними. Тоді залишається лише один шлях: висновок про подібність моделі та прототипу робити на підставі порівняння їхніх структур і виконуваних функцій.

Згідно з результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання чи проведення коригування.

д). Аналіз числових результатів та прийняття відповідних рішень. Результати досліджень подаються у вигляді, зручному для огляду, і на основі обробки отриманих результатів проводиться аналіз матеріалів дослідження моделі. На цьому, завершальному, етапі виникає питання про правильність і повноту

результатів моделювання, про можливість практичного застосування останніх, і, найголовніше, про досягнення цілей дослідження.

Деякі типи економічних задач математичного програмування

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

а) Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

б) Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

в) **Транспортна задача:** розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

г) **Задача оптимального розподілу виробничих потужностей:** розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

д) **Задача про призначення:** нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

е) **Задача комівояжера:** розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

ж) **Задача оптимального розподілу капіталовкладень.** Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати у будь-яке

підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початок кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Постановка задачі математичного програмування

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи: $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l)$.

Функцію F називають **цільовою функцією**, або **функцією мети**. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування сформулюється так: **знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).**

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j} (\min) F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо. Це можна описати системою математичних рівнянь та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0; \\ (i = 1, 2, \dots, S).$$

Класифікація розділів математичного програмування за типом цільової функції і обмежень оптимізаційних задач

Залежно від виду та властивостей цільової функції та функцій обмежень в моделях розрізняють розділи математичного програмування:

Лінійне програмування — це клас оптимізаційних задач та методів їх розв'язування, у моделей, у яких цільова функція та обмеження є лінійними функціями.

Нелінійне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких хоча б одна з функцій – чи цільова, чи в обмеженнях – нелінійна.

Опукле програмування – це клас оптимізаційних задач **нелінійного програмування** та методів їх розв’язування, у яких визначають числові значення керованих змінних, що надають мінімального значення опуклій (або максимального значення ввігнутій) функції, заданій на опуклій замкнутій множині.

Квадратичне програмування – це підвид задач опуклого програмування, для яких цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Цілочислове програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких на частину чи на всі змінні накладено умову цілочисловості.

Стохастичне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція або функції обмежень містять випадкові величини.

Динамічне програмування – це клас оптимізаційних задач, у яких використовують методи їх розв’язування за допомогою динамічного, тобто поступового і багатокрокового застосування рекурентних співвідношень.

Параметричне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція або функції, які визначають область допустимих значень, або і ті, й інші, залежать від деяких параметрів, або містять коефіцієнти, які залежать від параметрів.

Дробово-лінійне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція подана у вигляді відношення двох лінійних функцій і функції, що визначають область обмежень задачі, також лінійні.

Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Нехай F — цільова функція, лінійна:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l). \quad (14.1)$$

Необхідно знайти такі значення змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення):

$$\max (\min) F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \quad (14.2)$$

Якщо можливості вибору x_j обмежені умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо, які можна описати системою лінійних рівнянь та нерівностей виду: то маємо таку систему:

[illegible]

Тут набір символів ($\leq$, $=$, $\geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\leq$, для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу $\geq$.

Система (3) називається **системою обмежень**, або **системою умов** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_i мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (14.4)$$

Залежності (14.2)—(14.4) утворюють **економіко-математичну модель** економічної системи. Доцільно пункти (14.3) та (14.4) об'єднувати в одну систему обмежень:

[illegible]

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ або вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє умови (14.5) називають **допустимим планом**, або **планом**. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною **стратегією економічної системи, програмою дій**. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (14.1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (14.5), тобто множина всіх допустимих планів утворює **область існування планів**.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається **оптимальним**. Оптимальний план є **розв'язком задачі МП** (14.2), (14.5).

Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми « Σ ». Тоді цільову функцію можна подати так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (14.6)$$

а систему обмежень так:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (14.7)$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді:

$$\max(\min) F = CX - \text{цільова функція} \quad (14.8)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0 - \text{система обмежень} \quad (14.9)$$

$$x_i \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є векторами коефіцієнтів при змінних,

[illegible]

є матрицею коефіцієнтів при змінних;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор змінних; } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — вектор вільних членів;}$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Виділяють три форми запису задачі лінійного програмування: **загальну, стандартну (симетричну) та канонічну** (Таблиця 14.1).

Таблиця 14.1

Форма запису ЗЛП	Цільова функція $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Система обмежень
Загальна	Максимум або мінімум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$
Стандартна	Максимум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$
Канонічна	Максимум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$

Зауважимо, що коли необхідно знайти мінімум функції F , можна перейти до знаходження максимуму:

$$\max F = - \min F, \min F = - \max F.$$

Для переходу від загальної ЗЛП до канонічної треба обмеження – нерівності перетворити в обмеження-рівності шляхом використання так званих допоміжних невід’ємних змінних.

обмеження в формі нерівності $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$
$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j$

обмеження в формі рівності $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$
$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + x_{n+2} = b_j$

Приклад побудови математичної моделі для задач складання рецептури

Приклад 14.1. Кількість білків, жирів, вуглеводів та ціни за 100 г цих продуктів вказано в таблиці. Господиня намагається скласти рецепт десерту, в якому в 100 г продукту було б не менш, ніж 4,5 г білка, не більш, ніж 13,5 г жирів та

не більш, ніж 22,1 г вуглеводів. Скласти математичну модель такого рецепту десерту, щоб його собівартість була а) мінімальною; б) максимальною.

БЖВ/Продукти	Молоко	Цукор	Вершки	Обмеженість в БЖВ
Білки	3,32	1,12	3	4,5
Жири	1,9	1	20	13,5
Вуглеводи	4,66	88,2	3,6	22,1
Ціна продукту за 100 г	1,4 грн.	2,7 грн.	10,2 грн.	мінімальна, максимальна

Розв’язання: Будуємо математичну модель задачі.

Позначимо x_1 г кількість молока в десерті, x_2 г - кількість цукру, x_3 г - кількість вершків. Тоді білків можливо отримати виразом (показники для всіх інгредієнтів перераховано за 1 грам). Враховуючи, що на кількість білків є обмеження, складемо нерівність:

$$0,0332x_1 + 0,0112x_2 + 0,03x_3 \geq 0,045.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 100, тим самим спростимо

$$\text{нерівність: } 3,32x_1 + 1,12x_2 + 3x_3 \geq 4,5.$$

Аналогічні розміркування застосовуємо для кількості жирів та отримуємо нерівність

$$1,9x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 13,5,$$

і для кількості вуглеводів:

$$4,66x_1 + 88,2x_2 + 3,6x_3 \leq 22,1.$$

Оскільки x_1 , x_2 та x_3 - це показники ваги, то накладаємо на них умову невід’ємності: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Загальна вартість десерту є цільовою функцією та складає

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3$$

(ціни всіх інгредієнтів перераховано за 1 грам). Оскільки потребується скласти рецепт і з мінімальною вартістю, і з максимальною, то

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \min_{\text{та}}$$

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \max.$$

$$X = \{x_1; x_2; x_3\}, \text{ який задовольняє системі обмежень}$$

$$\begin{cases} 3,32x_1 + 1,12x_2 + 3x_3 \geq 4,5; \\ 1,9x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 13,5; \\ 4,66x_1 + 88,2x_2 + 3,6x_3 \leq 22,1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

та надає мінімальне значення цільовій функції

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \min$$

або надає максимальне значення цільовій функції

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \max$$

Теоретичні запитання

1. Дайте поняття математичної моделі.
2. Які відомі етапи математичного моделювання?
3. Яка класифікація економіко-математичних моделей відома?
4. Назвіть типи економічних задач математичного програмування.
5. Запишіть загальну математичну модель лінійного програмування.
6. З яких виразів може складатися система обмежень?
7. З яких виразів може складатися цільова функція?
8. Які є форми запису задач лінійного програмування?
9. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

Лекція 15

Тема: Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Мета: ознайомити з основними властивостями розв'язків задач лінійного програмування, дати алгоритм графічного методу розв'язання задач.

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (15.1)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1=0$ та $x_2=0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 15.1). Сукупність цих точок (розв'язків) називають **багатокутником розв'язків**, або **областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування**. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

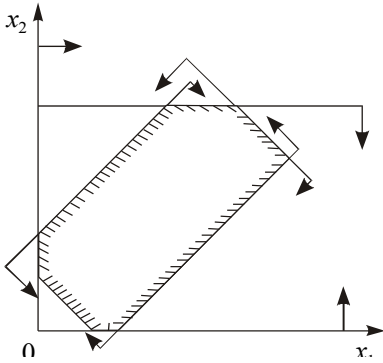


Рис. 15.1.

Якщо в системі обмежень (15.1) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворюють у тривимірному просторі спільну частину, що називається **багатогранником розв'язків**. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (15.1) кількість змінних більша, ніж три: $x_1, x_2, \dots, x_n$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n -вимірного простору з граничною гіперплощиною:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Кожному обмеженню виду (15.1) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами:

$$x_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n -вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукування координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ в n -вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра F .

Приклад 15.1. Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати соняшник і пшеницю на площі 20 га, відвівши під пшеницю не менше, як 5 га. Техніко — економічні показники вирощування цих культур маємо у таблиці 4.1:

Таблиця 15.1:

Показник (із розрахунку на 1 га)	Соняшник	Пшениця	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тони	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Складемо економіко-математичну модель структури вирощування соняшника і пшениці. Введемо такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву соняшника, га, x_2 — шукана площа посіву пшениці, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max F = 0,7x_1 + x_2 \text{ за умов:}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20; \\ 5x_1 + 25x_2 \leq 270; \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 80; \\ x_2 \geq 5; \\ x_1 \geq 0; \end{cases}$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рисунку.15.2.

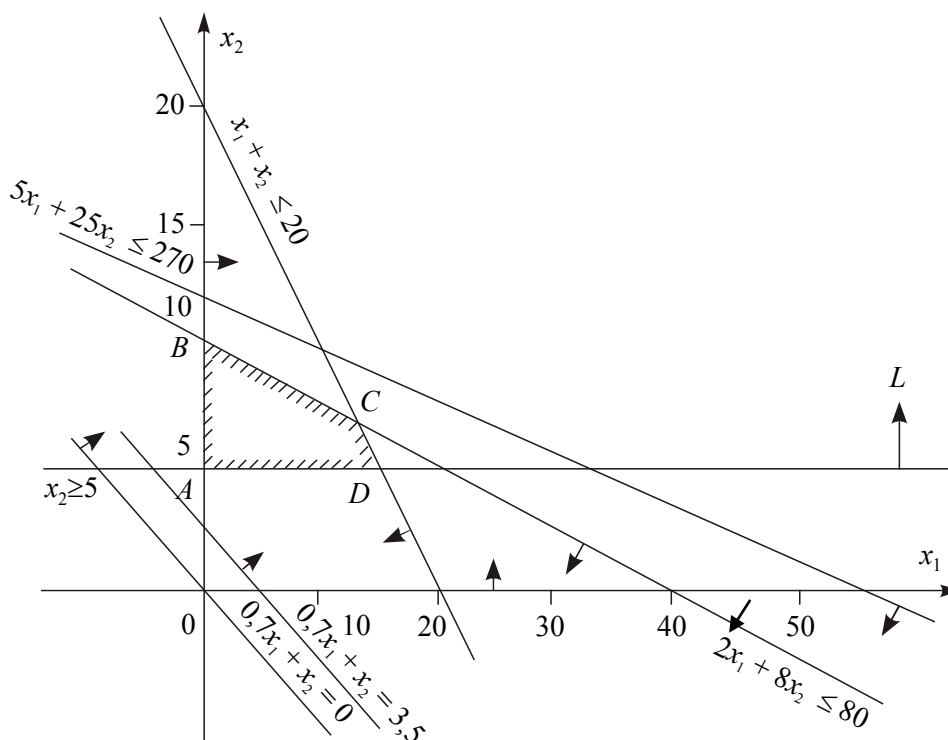


Рис. 15.2. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконаємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \leq 20$. Цей факт на рис. 15.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають іншим нерівностям. У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі — чотирикутник $ABCD$. Цільова функція $F = 0,7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню F . Зокрема, якщо $F = 0$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $F = 3,5$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формуються у вигляді чотирьох теорем.

Властивість 15.1. Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 15.2. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 15.3. Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $x \geq 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 15.4. Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $x \geq 0$, що відповідають додатним x_j , є лінійно незалежними.

Наслідок. Оскільки вектори $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають розмірність m , то кутова точка багатокутника розв'язків має не більше, ніж m додатних компонентів $x_i > 0$ ($i = \overline{1, m}$)

Наслідок. Кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, \dots, A_n$.

З наведених властивостей можна зробити висновки:

якщо функціонал (функція обмежень) задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення; кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (15.3) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Зауваження. У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція $F(Z)$ набирає максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рисунок 15.3).
2. Максимального значення цільова функція $F(Z)$ досягає у будь-якій точці відрізка AB (рисунок 15.4). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.
3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція максимізується, а область необмежена в напрямку зростання функції $F(Z)$ (рисунок 15.5) або система обмежень задачі несумісна (рисунок 15.6).

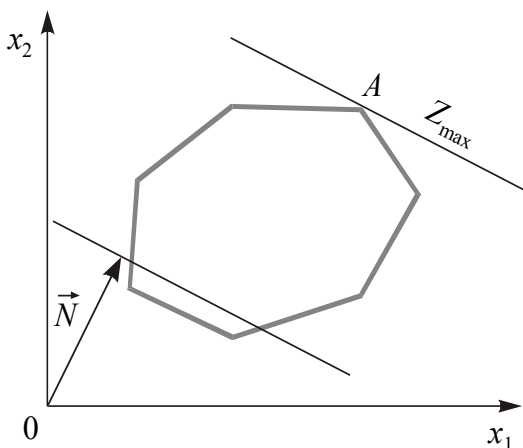


Рис. 15.3

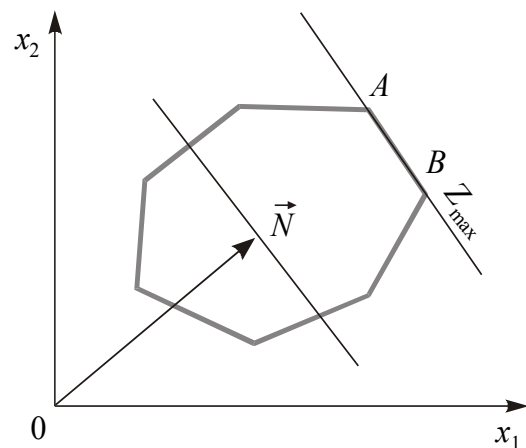


Рис. 15.4

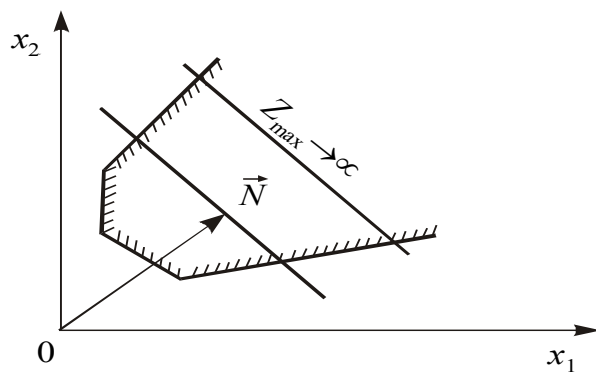


Рис. 15.5

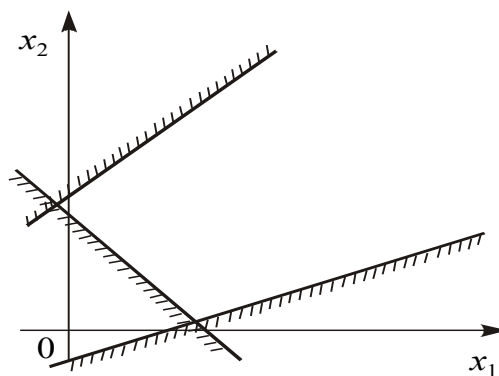


Рис. 15.6

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рисунки 15.7 та 15.8). На рисунку. 15.7 у точці B маємо максимум, на рисунку 15.8 у точці A — мінімум, на рисунку 15.9 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя, що обмежує область.

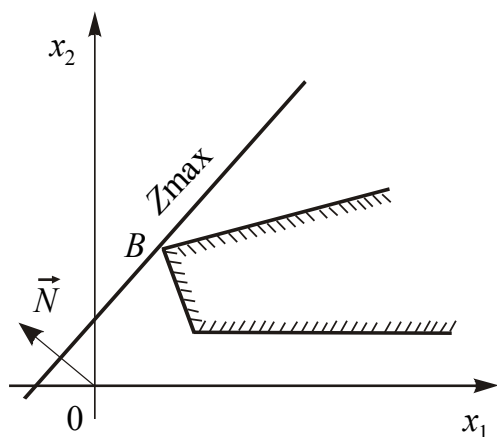


Рис. 15.7

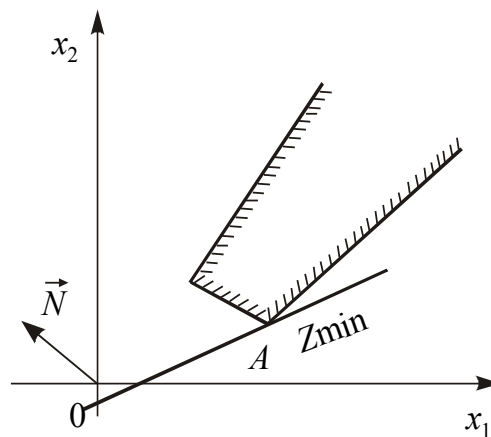


Рис. 15.8

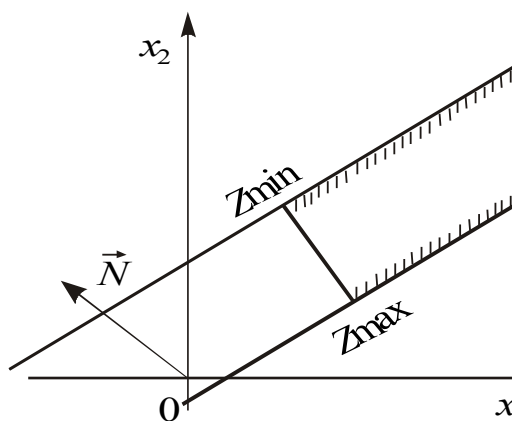


Рис. 15.9

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можна дві з n змінних, наприклад x_1 та x_2 , вибрати як вільні, а інші m зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = n - 2$ рівнянь вигляду:

Оскільки всі значення $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), то мають виконуватись умови:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \quad (15.4)$$

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0.$$
$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$$

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; ...; $x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

140

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Підставивши вирази для $x_3, x_4, x_5, \dots, x_n$ у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2 :

$$F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

де γ_0 — вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2 , що й $F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$. Отже, процедура відшукування оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

Приклад 15.2 Розв'язати графічно ЗЛП

$$f = -3 + 2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -4; \\ x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Реалізуємо пункти 1–3. Оскільки за умовою $x_1, x_2 \geq 0$, отже область допустимих розв'язків буде знаходитися у першому квадранті. Будуємо прямі:

$$x_1 + x_2 = 7,$$

$$-2x_1 + 3x_2 = -4,$$

$$x_2 = 1,$$

та визначаємо півплощини, для яких задовольняються відповідні обмеження (на рис. 4.10 показані стрілками): до рівності підставляємо координати будь-якої точки, що не лежить на цій прямій, якщо нерівність задовольняється, то множиною рішень є півплощина, що містить цю точку; якщо координати цієї точки не задовольняють нерівність, то вибирають протилежну півплощину. Зробимо рисунок області допустимих розв'язків, тобто геометричну інтерпретацію задачі (рис. 15.10).

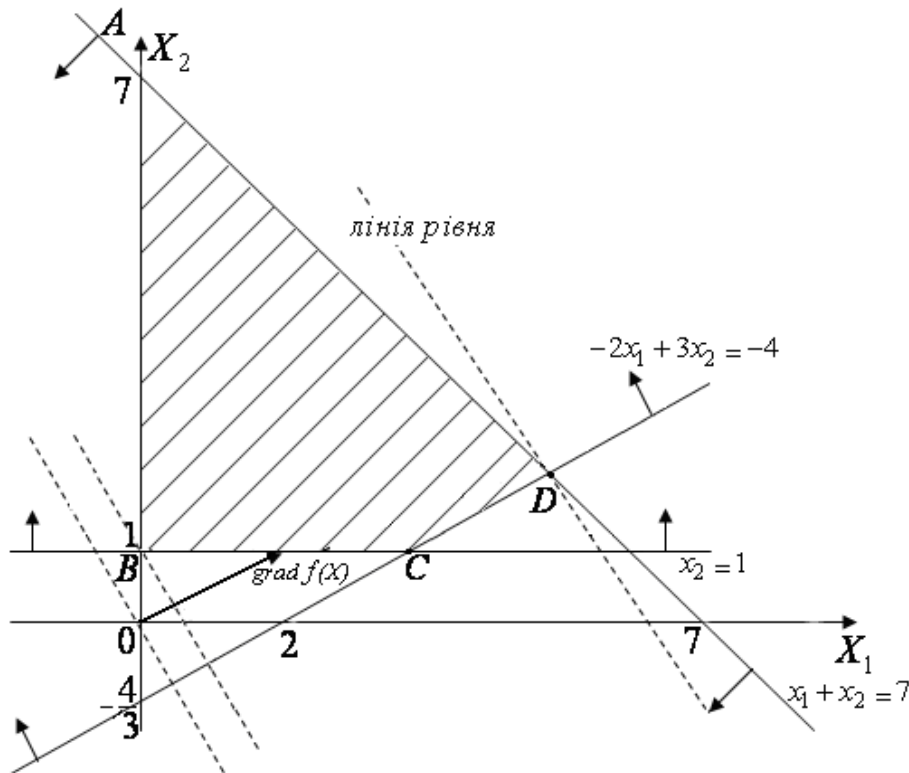


Рис. 15.10

Багатокутник $ABCD$ є областю допустимих розв'язків (ОДР).

4. Для нашої задачі $c_1 = 2, c_2 = 1$. Будуємо точку з координатами $(2;1)$ та вектор $\vec{N}$, початковою точкою якого є початок координат.

5. Лінія рівня цільової функції $2x_1 + x_2 - 3 = 0$, перпендикулярна до вектора $\vec{N} = (2;1)$.

6. Пересуваємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{N}$, знаходимо крайні точки багатокутника розв'язків B і D .

7. Знаходимо координати цих точок і обчислюємо екстремальні значення цільової функції в цих точках.

$$B(0;1): f = -3 + 1 = -2(\min),$$

$$D(5;2): f = -3 + 10 + 2 = 9(\max).$$

Відповідь: $f = -2(\min), X_{opt}(0,1),$
 $f = 9(\max), X_{opt}(5,2).$

З економічної точки зору підприємство повинно виробляти 5 одиниць продукції виду А і 2 одиниці продукції виду В за певний час. Прибуток від реалізації цієї продукції буде максимальним і складатиме 3 у.г.о.

Теоретичні запитання

1. Які задачі можна розв'язувати графічним методом?
2. Які основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте етапи алгоритму графічного методу.
4. Що становить область допустимих планів для задачі з двома та трьома змінними?
5. Як будується область допустимих планів для задачі з двома змінними?
6. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
7. За яких умов задача лінійного програмування має альтернативний розв'язок?
8. За яких умов задача лінійного програмування з кількістю змінних, більше, ніж 3, може бути розв'язана графічно?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Похідні основних елементарних функцій

1.	$(c)' = 0, c = \text{const}$	6.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(x)' = 1$	7.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1},$ n – будь-яке дійсне число $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	8.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
		9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
		10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a,$ a – дійсне число, $a > 0, a \neq 1$ $(e^x)' = e^x$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5.	$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a},$ $a > 0, a \neq 1 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$	13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Таблиця основних інтегралів

1.	$\int 0 dx = C$	8.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
2.	$\int dx = x + C$	9.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, де n – будь-яке дійсне число, $n \neq -1$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
		11.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	12.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, де a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$ $\int e^x dx = e^x + C$	13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
		14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	16.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Таблиця значень функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,2637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732	∞	0,5
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

Таблиця розподілу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$k \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$k \backslash a$	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
0	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129
4	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226
5	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003

7	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003
8	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0	0,000003	0,000014	0,000056	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0	0,000001	0,000003	0,000015	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0	0	0,000001	0,000004	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. В.М. Мацкул Вища математика для економістів. Підручник. — Одеса: Одеський національний економічний університет (ОНЕУ), 2018. — 472 с
2. Васильків І.М. В 28 Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. — 184 с.
3. Практикум з вищої математики. Частина 1: Навчальний посібник / В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура та ін.; За ред. В.М. Мойсишина, Я.І. Савчука. — Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2022. — 623с.
4. А.І. Пілявський Вища математика. Практикум : навчальний посібник / Пілявський А.І., Кісілевич О.В., Мельник М.О. та ін. Львів: вид-во Львівського торговельно-економічного університету, 2019. 180 с
5. Л.Б.Коваленко Вища математика для менеджерів. Підручник. / 2-ге вид., перероб. та допов. — Харків: Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова (ХНУМГ ім. О.М. Бекетова), 2019. — 341 с.
6. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. — Вінниця : ВНТУ, 2019. — 121 с.
7. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. — Вінниця : ВНТУ, 2019. — 121 с.
8. Козак Ю.Г. Математичне моделювання для економістів: бакалавр – магістр – доктор філософії (PhD): Навч. посібник / За ред. Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул. — К.: Центр учбової літератури, 2017. — 252 с.
9. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. — 440 с.
10. Волонтир Л.О. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. — Вінниця: ВНАУ, 2020 — 404 с.
11. Ю.М. Бардачов Практикум з вищої математики. Ч. 2. / Бардачов Ю.М., Крючковський В.В., Цибуленко О.В., Матвієнко А.М., Моїсеєнко С.В., Чуйко Н.М., Белоус Л.Я. - Херсон: "ОЛДІ-плюс", 2014. - 416 с.

Навчальне електронне видання

Вигоднер Інна Валентинівна

Моїсеєнко Світлана Вікторівна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Лекції

Навчальний посібник

ISBN 978-617-8187-27-9 (електронне видання)



Підписано до видання 20.09.2024 р. Формат 60х84/8.

Гарнітура Times.

Ум. друк. арк. 18,02. Обл.-вид. арк. 19,38.

Замовлення №3110.

Видано з готового оригінал-макету у

Книжковому видавництві ФОП Вишемирський В.С.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи:

Серія ХС №48 від 14.04.2005 р.

Видано Управлінням у справах преси та інформації

73000, Україна, м. Херсон, вул. Соборна, 2.

Тел. +38(050)133-10-13

e-mail: printvvs@gmail.com