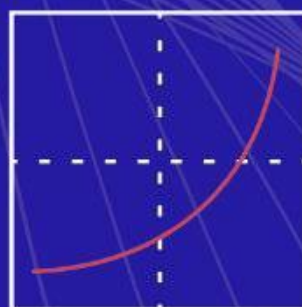
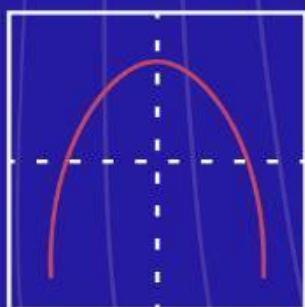
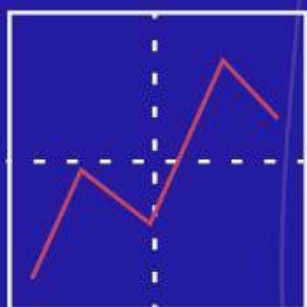


Інна ВИГОДНЕР Світлана МОІСЕЄНКО

# ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ  
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Хмельницький 2024

**Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет**

**І. В. ВИГОДНЕР, С. В. МОІСЕЄНКО**  
**ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**  
**Практикум**  
**Навчальний посібник**

**Хмельницький – 2024**

**УДК 519.2(075.8)**

**B41**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 11 від 16.04. 2024 р.)

**Рецензенти:**

**Д. О. Редчиць** — д.ф.-м.н., ст. наук. співр., заступник директора з науково-організаційної роботи Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України

**В. В. Македон** — д. е. н., професор кафедри міжнародної економіки і світових фінансів, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

**Вигоднер І.В., Моїсеєнко С.В.**

**B41 Вища та прикладна математика. Практикум:** навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання / І. В. Вигоднер, С. В. Моїсеєнко. – Херсон: Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В. С., 2024 р. – 261 с.

**ISBN 978-617-8187-31-6 (електронне видання)**

Навчальний посібник побудовано відповідно чинній робочій програмі підготовки студентів з дисципліни «**Вища математика**». Посібник містить всі розділи даного курсу. З кожної теми запропоновано стислий курс лекційного матеріалу та наведено розв'язання великої кількості типових прикладів і задач. Кожний розділ супроводжується контрольними запитаннями для самоперевірки з теоретичного матеріалу, завданнями для самостійної роботи та завданнями для індивідуальної роботи в 30-ти варіантах.

**УДК 519.2(075.8)**

**ISBN 978–617–8187–31–6 (електронне видання)**

© Вигоднер І. В., 2024  
© Моїсеєнко С. В., 2024  
© ФОП Вишемирський В.С., 2024

## ВСТУП

Дисципліна «**Вища математика**» належить до переліку нормативних навчальних дисциплін, які слухають студенти спеціальностей: 075 Маркетинг, 073 Менеджмент, 292 Міжнародні економічні відносини. Сьогоднішні студенти - це майбутні фахівці в найрізноманітніших сферах: економічній, в тому числі, зовнішньоекономічній, інформаційній, в державному управлінні, тощо. Завданням таких спеціалістів є вміти ефективно використовувати людські, матеріальні та фінансові ресурси задля досягнення цілей установи або організації. Сучасний менеджер та маркетолог це спеціаліст, який вміє налагодити установу, керувати та оптимізувати її структуру задля знаходження траєкторії розвитку з метою досягнення максимальної ефективності.

Щоб відповідати таким вимогам, необхідно володіти базовими математичними поняттями, розумітися на основних засадах теорії ймовірностей і математичної статистики та володіти методами математичного моделювання (вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів та явищ). Такі компетенції дає дисципліна «Вища математика», яка охоплює деякі розділи вищої математики, теорії ймовірності і математичної статистики та математичного програмування.

У запропонованому навчальному посібнику стисло викладено теоретичні основи (лекційний матеріал), який відповідає робочій програмі дисципліни «Вища математика» та наведено розв'язання великої кількості типових прикладів і задач. Кожне практичне заняття супроводжується контрольними запитаннями для самоперевірки з теоретичного матеріалу, завданнями для самостійної роботи та завданнями для індивідуальної роботи в 30-ти варіантах .

## ЗМІСТ

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Розділ 1.</b>                                                   | 6   |
| Елементи лінійної алгебри                                          |     |
| <b>Розділ 2.</b>                                                   | 25  |
| Вступ до математичного аналізу. Границя і<br>неперервність функції |     |
| <b>Розділ 3.</b>                                                   | 54  |
| Диференціальне числення функції однієї<br>незалежної змінної       |     |
| <b>Розділ 4.</b>                                                   | 86  |
| Диференціальне числення функцій кількох<br>змінних                 |     |
| <b>Розділ 5.</b>                                                   | 103 |
| Невизначений інтеграл                                              |     |
| <b>Розділ 6.</b>                                                   | 114 |
| Визначений інтеграл                                                |     |
| <b>Розділ 7.</b>                                                   | 138 |
| Основні поняття теорії ймовірностей.<br>Випадкові події            |     |
| <b>Розділ 8.</b>                                                   | 216 |
| Випадкові величини                                                 |     |
| <b>Розділ 9.</b>                                                   | 227 |
| Елементи економіко — математичного<br>моделювання                  |     |
| <b>Додатки</b>                                                     | 251 |

# РОЗДІЛ І

## Елементи лінійної алгебри

### Практичне заняття 1

**Тема:** **Елементи теорії матриць і визначників**

**Мета:** розглянути основні дії над матрицями, надати методи обчислення визначників; дати алгоритм обчислення оберненої матриці та метод розв'язання матричних рівнянь.

#### Матриці, їх види, дії з матрицями

##### Означення 1.1.

Сумою двох матриць  $A$  і  $B$  називається матриця  $C = A + B$  розмірності  $m \times n$ , кожен елемент якої обчислюється за правилом:  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

##### Означення 1.2.

Добутком матриці  $A$  на число  $\lambda$  називається матриця  $B = \lambda A$ , кожен елемент якої  $\beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$ .

##### Означення 1.3.

Матриці  $A$  розмірності  $m \times r$  і  $B$  розмірності  $k \times n$  називаються узгодженими для множення, якщо кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої, тобто  $r = k$ .

##### Означення 1.4.

Добутком матриці  $A$  ( $m \times k$ ) на матрицю  $B$  ( $k \times n$ ) називається матриця  $C$  ( $m \times n$ ), кожен елемент якої обчислюється за формулою

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \beta_{rj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

**Приклад 1.1.** Для матриць  $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$  та  $B = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$  обчислити лінійну

комбінацію  $12C + 0,1B - 5E$ .

**Розв'язання.**

Для того, щоб помножити матрицю на число, треба кожний елемент матриці помножити на це число.

Для додавання (віднімання) матриць необхідно додати (відняти) відповідні елементи.

$$12C + 0,1B - 5E = 12 \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 60 & 108 \\ 84 & -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,8 & 1 \\ -0,4 & 1,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54,2 & 109 \\ 83,6 & -51,7 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 1.2.** Для матриць  $C$  та  $B$  знайти матрицю  $C \cdot B$ .

**Розв'язання.**

Кожний елемент шуканої матриці дорівнює сумі добутків елементів рядка першої матриці на відповідний елемент стовпчика другої матриці.

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-8) + 9 \cdot (-4) & 5 \cdot 10 + 9 \cdot 13 \\ 7 \cdot (-8) + (-4) \cdot (-4) & 7 \cdot 10 + (-4) \cdot 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -76 & 158 \\ -40 & 18 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 1.3.**

Для матриць  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Знайти: а)  $A+B$ ; б)  $A^T$ ; в)  $C^2$ ; г)  $AB$ ; д)  $BA$ .

**Розв'язання:**

а)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+1 & -1+0 \\ 1+1 & 0-1 & 3+2 \\ 4+3 & -3+2 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

в)

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4 \\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12 \\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 12 \\ 11 & 11 & 2 \end{pmatrix};$$

д)

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0 \\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4 \\ 6+2+16 & 6+0-12 & -3+6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \\ 24 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Помічаємо, що  $AB \neq BA$ .

#### Приклад 1.4.

$$\text{Для матриць } A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \text{ Знайти: } AB + 3E$$

#### Розв'язання:

Перевіримо, чи можливо знайти  $AB$ :

$A$  має розмір  $(3 \times 2)$ ;  $B$ :  $(2 \times 3)$ . Отже кількість стовпчиків матриці  $A$  дорівнює кількості рядків матриці  $B$ , а це значить, що  $AB$  можливо.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-8 & -1-4 & 0+16 \\ 0+4 & 0+2 & 0-8 \\ -15-6 & 5-3 & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -21 & 2 & 12 \end{pmatrix};$$

$$I = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$AB + 3E = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -21 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 & -5 & 16 \\ 4 & 2+3 & -8 \\ -21 & 2 & 12+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 16 \\ 4 & 5 & -8 \\ -21 & 2 & 15 \end{pmatrix};$$

## Визначники

**Визначник другого порядку** обчислюється з формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

**Приклад 1.5.** Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

**Розв'язання.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22.$$

**Визначник третього порядку** обчислюється за правилом трикутника або за методом алгебраїчних доповнень.

**Правило трикутника:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Це правило зручно запам'ятати за допомогою наступної схеми:

**Метод алгебраїчних доповнень (або метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпця)**

**Означення 1.5.**

Алгебраїчним доповненням  $A_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  вважають

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  Метод полягає в тому, що визначник обчислюють як суму добутків елементів  $a_{ij}$  деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

**Приклад 1.6.** Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

**Розв'язання.**

Для визначника третього порядку застосовуємо правило трикутника.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -7.$$

Обчислимо визначник методом алгебраїчних доповнень.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2 - 2) + 2(-8 - 6) + 3(4 + 3) = 0 - 28 + 21 = -7.$$

**Приклад 1.7**

Обчислити визначник:  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$  методом зниження порядку:

**Розв'язання:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -7 & -4 & -11 \\ 4 & 4 & -1 & -3 \\ -5 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + +1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 8 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot 4 \cdot 4 + (-7) \cdot (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 5 \cdot (-11) - (-11) \cdot 4 \cdot (-5) -$$

$$- 4 \cdot (-7) \cdot 4 - 5 \cdot (-3) \cdot 8 = 128 - 105 - 220 - 220 + 112 + 120 = -95$$

### Означення 1.6.

Квадратна матриця  $A^{-1}$  називається **оберненою** до квадратної матриці  $A$ , якщо виконується рівність

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

### Розв'язання матричних рівнянь

#### Означення 1.7.

**Матричним рівнянням** називається рівняння в якому коефіцієнти і невідомі є матрицями.

Наприклад, матричним є рівняння  $AX=B$ , де  $A$  та  $B$  – відомі матриці,  $X$  – матриця, елементи якої треба знайти.

Розв'язок матричного рівняння виду  $AX=B$  знаходимо за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

**Приклад 1.8.** Розв'язати рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ тобто} \\ \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

#### Розв'язання.

1)  $\Delta A = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0$ , отже, матриця  $A$  має обернену.

2)  $A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3)  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

4)  $A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

5)  $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 10 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$

Відповідь:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Розв'язок рівняння  $XA=B$  шукаємо у вигляді  $X = B \cdot A^{-1}$ .

**Приклад 1.9.** Розв'язати рівняння  $XA=B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = (1 \quad 0 \quad 2).$$

**Розв'язання.**

1. Для розв'язання матричним способом також спочатку обчислимо визначник  $\Delta$ :

$$\Delta A = -48 \neq 0$$

Отже, матриця  $A$  має обернену матрицю.

2. Далі знаходимо транспоновану матрицю, а потім союзну

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 3.

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

- 4.

$$A^{-1} = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\begin{aligned} X &= B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{48}\right) \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{48} (1 \cdot (-6) + 0 \cdot (-26) + 2 \cdot (-4) \quad 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 14 + 2 \cdot 4 \quad 1 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot (-8)) \\ &= -\frac{1}{48} (-14 \quad 2 \quad -16) = \left(\frac{7}{24} \quad -\frac{1}{24} \quad \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Відповідь:  $\left(\frac{7}{24} \quad -\frac{1}{24} \quad \frac{1}{3}\right)$ .

**Приклад 1.10.** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Розв'язання.** Запишемо це рівняння в наступному вигляді

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

де  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ . Тоді

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \Rightarrow \quad E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Знаходимо обернені матриці до матриць  $A$  і  $B$ :

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{110} \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 10 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{110} \begin{pmatrix} 150 & -46 \\ 140 & -62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{11} & \frac{46}{110} \\ -\frac{14}{11} & \frac{62}{110} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} -\frac{15}{11} & \frac{46}{110} \\ -\frac{14}{11} & \frac{62}{110} \end{pmatrix}$

### Теоретичні запитання

1. Дайте означення матриці.
2. Які бувають матриці?
3. Які відбуваються дії над матрицями?
4. Дайте означення визначника  $n$ -го порядку.
5. Як обчислюються визначники 2-го та 3-го порядку?
6. Що називається оберненою матрицею?
7. Який алгоритм знаходження оберненої матриці?
8. Яка матриця не має оберненої?
9. Що називається матричним рівнянням?
10. Який алгоритм розв'язання матричного рівняння?

### Завдання для самостійної роботи:

1. Для матриць  $A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 0 & 5 \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 & -4 \end{pmatrix}$  та  $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

обчислити лінійні комбінації  $A-B$ ,  $2A+4B$ ,  $10A-1,2B$ .

2. Задано матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 5 & 6 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислити: а)  $5M - 2N + E$ , б)  $6E + 0,5M - N$ , в)  $M^2 + N^2$ , г)  $MN$ , д)  $NM$ .

3. Обчислити визначники:

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:  $\begin{vmatrix} 12 & 10 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 2 & 7 & -7 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix},$

а) за правилом трикутника;

б) розкладанням за елементами першого рядка;

в) розкладанням за елементами другого стовпчика;

г) використовуючи властивості визначників:

5. Обчислити визначники:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. Перевірити, чи будуть матриці А і В оберненими:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Розв'язати матричні рівняння:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$  б)  $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$  г)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

### Індивідуальні завдання

1. Для заданих матриць  $A$  та  $B$  знайти:

а)  $6A - 4B + 2E$ ,

б)  $A^2, AB, BA$ .

2. Розв'язати матричне рівняння  $X \times A = B$ .

| Варіант | Матриці                                                                                                                                                  | Варіант | Матриці                                                                                                                                                |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.      | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | 2.      | $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & -5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$  |
| 3.      | $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$     | 4.      | $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$    |
| 5.      | $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$     | 6.      | $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$   |
| 7.      | $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$    | 8.      | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ 0 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 9.      | $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ -6 & 9 & 0 \\ -9 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ | 10.     | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$    |
| 11.     | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$    | 12.     | $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 9 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  |
| 13.     | $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | 14.     | $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ 0 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ |

|            |                                                                                                                                                          |            |                                                                                                                                                        |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>15.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$     | <b>16.</b> | $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$   |
| <b>17.</b> | $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | <b>18.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$   |
| <b>19.</b> | $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 0 \\ 8 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$    | <b>20.</b> | $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$    |
| <b>21.</b> | $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$     | <b>22.</b> | $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$   |
| <b>23.</b> | $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | <b>24.</b> | $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ 0 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ |
| <b>25.</b> | $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | <b>26.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$   |
| <b>27.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$      | <b>28.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & -5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$  |
| <b>29.</b> | $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ -6 & 9 & 0 \\ -9 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ | <b>30.</b> | $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$    |

## Практичне заняття 2

**Тема:** Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання

**Мета:** навчити розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами Крамера, Гаусса та матричним.

### **Означення 2.1.**

**Системою лінійних алгебраїчних рівнянь** називається сукупність рівностей вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

### **1. Метод Крамера**

Розв'язок системи знаходимо за допомогою **формул Крамера**:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Зауважимо, що можливі такі випадки:

якщо  $\Delta \neq 0$ , то одержані значення  $(x, y, z)$  – єдиний розв'язок системи;

якщо  $\Delta = 0$  і  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ , то система має безліч розв'язків;

якщо  $\Delta = 0$ , але хоча б один із визначників  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  або  $\Delta z$  відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

**Приклад 2.1.** Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - 5y - z = -3, \\ x - y + 5z = -16. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) матричним способом;
- 3) методом Гаусса;

### Розв'язання.

1) Для розв'язання за формулами Крамера спочатку обчислимо визначник  $\Delta$  (для прикладу обчислення проведемо за методом трикутника):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

Далі обчислимо визначник  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 108$$

Обчислимо визначник  $\Delta y$ :

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -16 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

Визначник  $\Delta z$ :

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & -16 \end{vmatrix} = 90$$

Отже, за формулами Крамера, система має розв'язок:

$$x = \frac{108}{-36} = -3, \quad y = \frac{-18}{-36} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{90}{-36} = -2,5.$$

Відповідь:  $(-3; 0,5; -2,5)$ .

## 2. Розв'язання матричним методом

Запишемо систему лінійних рівнянь в матричній формі:

$$AX=B,$$

де  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець невідомих;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець вільних членів (правої частини системи);

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{основна матриця системи, елементами якої є}$$

коефіцієнти біля невідомих.

Розв'язок будемо шукати за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Отже, матричний спосіб зводиться до відшукування оберненої матриці.

Для розв'язання матричним способом також спочатку обчислюють визначник  $\Delta$ :

$$\Delta A = -36 \neq 0,$$

тобто, матриця  $A$  має обернену матрицю. Далі знаходимо транспоновану матрицю, а потім союзну

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -4 & -6 \\ -6 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$A^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -26 & -4 & -6 \\ -6 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -26 & -4 & -6 \\ -6 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -26 \cdot 0 + (-4) \cdot (-3) + (-6) \cdot (-16) \\ -6 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) + 0 \cdot (-16) \\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-16) \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 108 \\ -18 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Відповідь:  $(-3; 0,5; -2,5)$ .

### 3. Метод Гаусса

(метод послідовного вилучення невідомих)

Запишемо розширену матрицю системи:

$$= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & -16 \end{array} \right)$$

Зробимо з нею такі еквівалентні перетворення:

- а) від першого рядка матриці віднімемо другий рядок;
- б) від першого рядка матриці віднімемо третій рядок;

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 16 \end{array} \right)$$

Зробимо з отриманою системою такі еквівалентні перетворення:

- а) перший рядок залишаємо незмінним;
- б) третій рядок матриці помножимо на - 3, складемо його з другим рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & -45 \end{array} \right).$$

Система рівнянь, яка відповідна матриці, має вигляд:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 6y = 3, \\ 18z = -45; \end{cases}$$

Отже маємо, що  $z = -2,5$ , тоді з другого рівняння останньої системи  $y = 0,5$  а з першого рівняння  $x = -2,5$ .

Відповідь:  $(-3; 0,5; -2,5)$ .

**Приклад 2.2.** Розв'язати систему лінійних рівнянь: 
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ 4x + 6y - 2z = 6, \\ 3x - y + 2z = -1; \end{cases}$$

**Розв'язання.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки  $\Delta$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

Знайдемо розв'язки методом Гаусса.

Помножимо перше рівняння на 2, віднімемо від нього друге рівняння. Таким чином одержимо другий рядок системи. Потім помножимо перше рівняння на 3, а третє на 2 та віднімемо від першого третє. Одержимо третій рядок системи:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ 0 + 0 + 0 = 0, \\ 11y - 7z = 11; \end{cases}$$

Вилучимо з системи друге рівняння та виразимо  $y$  з третього:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ y = \frac{7}{11}z + 1; \end{cases}$$

Підставимо  $y$  в перше рівняння:  $2x + \frac{21}{11}z + 3 - z = 3$

Виразимо  $x$ :  $2x = -\frac{10}{11}z \Rightarrow x = -\frac{5}{11}z$ .

Відповідь:  $\left(-\frac{5}{11}z; \frac{7}{11}z + 1; z\right), z \in R$ .

**Приклад 2.3.** Розв'язати систему лінійних рівнянь: 
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ x - 5y + 2z = 3, \\ 4x + 6y + 2z = 0; \end{cases}$$

**Розв'язання.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -44 \neq 0$$

Оскільки  $\Delta = 0$ , а  $\Delta x \neq 0$ , то система несумісна, тобто вона не має розв'язків.

## Теоретичні запитання

1. Як розв'язуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь: за формулами Крамера, матричним методом, методом Гаусса?

### Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати системи

- а) методом Крамера,  
б) матричним методом,  
в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

### Індивідуальні завдання

Розв'язати систему:

- а) за формулами Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

| Варіант  | Завдання                                                                                | Варіант  | Завдання                                                                                    | Варіант  | Завдання                                                                                 |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> | $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x - 2y + 3z = 1, \\ 2x + 2y + 4z = 2. \end{cases}$     | <b>2</b> | $\begin{cases} 6x + 11y - 2z = 22, \\ 2x - 3y + 11z = 29, \\ 7x - 5y + 3z = 6. \end{cases}$ | <b>3</b> | $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x - 4y = 18. \end{cases}$          |
| <b>4</b> | $\begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$ | <b>5</b> | $\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 2x + 2y + 4z = 2. \end{cases}$        | <b>6</b> | $\begin{cases} x + 6y - 7z = -8, \\ 2x + 4y + 7z = 31, \\ x + 3y + 5z = 22. \end{cases}$ |

|           |                                                                                           |           |                                                                                           |           |                                                                                           |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>7</b>  | $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$      | <b>8</b>  | $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 4x - y + 2z = 8, \\ 6x - 4y + 3z = 7. \end{cases}$    | <b>9</b>  | $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7, \\ 2x + 3y - 2z = 1, \\ x + y + 3z = 12. \end{cases}$     |
| <b>10</b> | $\begin{cases} 6x + 11y - 2z = 22, \\ 3x - 7y + 5z = 4, \\ 2x + 3y + z = 11. \end{cases}$ | <b>11</b> | $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ x + y + 2z = 7. \end{cases}$         | <b>12</b> | $\begin{cases} x - 2y + 2z = 16, \\ 3x + y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 3. \end{cases}$ |
| <b>13</b> | $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = -10, \\ 2x + 2y + 2z = 12, \\ x + y + 3z = 12. \end{cases}$ | <b>14</b> | $\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$     | <b>15</b> | $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = -6, \\ x - y + 8z = 23, \\ 3x - 6y + 2z = -3. \end{cases}$  |
| <b>16</b> | $\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$     | <b>17</b> | $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ x + 5y + 5z = 0. \end{cases}$        | <b>18</b> | $\begin{cases} x - 2y + 2z = 15, \\ 3x + y - 2z = 9, \\ 2x + y - 4z = 18. \end{cases}$    |
| <b>19</b> | $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$            | <b>20</b> | $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$      | <b>21</b> | $\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$     |
| <b>22</b> | $\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 2x + 2y + 4z = 2. \end{cases}$      | <b>23</b> | $\begin{cases} x - 2y + 2z = 16, \\ 3x + y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 3. \end{cases}$ | <b>24</b> | $\begin{cases} 6x + 11y - 2z = 22, \\ 3x - 7y + 5z = 4, \\ 2x + 3y + z = 11. \end{cases}$ |
| <b>25</b> | $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$      | <b>26</b> | $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = -10, \\ 2x + 2y + 2z = 12, \\ x + y + 3z = 12. \end{cases}$ | <b>27</b> | $\begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$   |
| <b>28</b> | $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ x + y + 2z = 7. \end{cases}$         | <b>29</b> | $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$      | <b>30</b> | $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = -10, \\ 2x + 2y + 2z = 12, \\ x + y + 3z = 12. \end{cases}$ |

## РОЗДІЛ II

### Вступ до математичного аналізу. Границя і неперервність функції

#### Практичне заняття 3

**Тема:** Границя функції

**Мета:** розглянути основні властивості границь, методи розкриття деяких невизначеностей; ознайомити з першою і другою визначними границями та їх наслідками та принципами застосування під час обчислення границь.

#### Границя функції

##### Означення 3.1.

Число  $A$  називається **границею функції**  $y = f(x)$  при  $x$  прямуючим до  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), якщо для всіх значень  $x$ , які достатньо мало відрізняються від  $a$ , відповідні значення функції  $y = f(x)$  достатньо мало відрізняються від числа  $A$ , і записується це так

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{або} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a$$

##### Властивості границі

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} C = C, C - \text{const}$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \beta \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^\alpha$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow a} \log_\alpha f(x) = \log_\alpha \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha^{f(x)} = \alpha^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

### Методи обчислення границь

Для безпосереднього знаходження границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , не користуючись правилом Лопіталю, у вираз під знаком границі підставляють замість  $x$  його граничне значення  $a$  і обчислюють використовуючи властивості границі та співвідношення нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

**Приклад 3.1.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталю:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x + 6}{2 - x};$$

**Розв'язання.**

Підставляючи у заданий вираз  $x = 5$ , отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x + 6}{2 - x} = \frac{5^2 + 5 + 6}{2 - 5} = \frac{36}{-3} = -12.$$

**Приклад 3.2.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - x + 6}{7 - x}.$$

**Розв'язання.**

Так як безпосереднім підставленням отримуємо, що  $(2x^2 - x + 6) \rightarrow 97$  при  $x \rightarrow 7$ ,  $(7 - x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 7$ , то, враховуючи співвідношення для нескінченно великих і нескінченно малих функцій,  $\frac{97}{7 - x} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 7$ . Отже

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - x + 6}{7 - x} = \infty.$$

**Приклад 3.3.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{52}{x^2 + 7x - 6}.$$

**Розв'язання.**

Безпосередньо підставляючи отримуємо, що при  $x \rightarrow \infty$ ,  $(x^2 + 7x - 6) \rightarrow \infty$ ,

тоді при  $x \rightarrow \infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{52}{x^2 + 7x - 6} = 0$ .

**Розкриття невизначеності**  $\frac{\infty}{\infty}$

Невизначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$  може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при  $x \rightarrow \infty$ . Для розкриття цієї невизначеності треба чисельник і знаменник поділити на змінну в самому високому степені, який міститься в заданому виразі. Далі обчислюють знов, використовуючи властивості границі та властивості нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

**Приклад 3.4.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x^4 + x + 10}{2 + 15x^4}.$$

**Розв'язання.** Безпосереднім підставленням маємо невизначеність  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , тоді

ділимо чисельник і знаменник на  $x^4$ . Маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x^4 + x + 10}{2 + 15x^4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{30x^4}{x^4} + \frac{x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{2}{x^4} + \frac{15x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30 + \frac{1}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{\frac{2}{x^4} + 15} = \frac{30 + 0 + 0}{0 + 15} = 2.$$

**Розкриття невизначеності**  $\frac{0}{0}$

Невизначеність виду  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  може утворитись при обчисленні границі функції, у

якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при  $x$  прямуючим до якогось скінченного числа. В цьому випадку необхідно многочлени в чисельнику і в знаменнику розкласти на прості множники і скоротити.

**Приклад 3.5.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}.$$

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2.$

**Приклад 3.6.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

**Приклад 3.7.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}.$

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x-10)^2} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x-10)} = \infty$$

**Приклад 3.8.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}.$

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}.$

У даному прикладі була використана формула:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$

де  $x_1, x_2$  – корені квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0.$

**Приклад 3.9.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на суму  $\sqrt{x+4} + 2:$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

У даному прикладі була використана формула:  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ .

**Приклад 3.10.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 9x + 9}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 9x + 9} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{2(x-3)(x-1,5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{2(x-1,5)} = \frac{27}{3} = 9.$$

**Приклад 3.11 .** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x^2-8x+7}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x^2-8x+7} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[3]{x-6}-1) \cdot \left( (\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6} + 1 \right)}{(x^2-8x+7) \cdot \left( (\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[3]{x-6})^3 - 1}{(x-7) \cdot (x-1) \cdot \left( (\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7) \cdot (x-1) \cdot \left( (\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x-1) \cdot \left( (\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6} + 1 \right)} = \frac{1}{6 \cdot (1+1+1)} = \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

### Перша важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

### Наслідки першої важливої границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = \left| \begin{array}{l} \text{якщо } x \rightarrow 0, \\ \text{то } kx \rightarrow 0 \end{array} \right| = k \cdot \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

**Приклад 3.12.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2 - 7x + 10}.$$

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2 - 7x + 10} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-5} = 1 \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.13.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

У даному прикладі була використана формула:  $1 - \cos kx = 2 \sin^2 \frac{kx}{2}$ .

## Розкриття невизначеності $1^\infty$

Невизначеність виду  $1^\infty$  утворюється при обчисленні границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$

Позбавитись цієї невизначеності можна скориставшись **другою важливою границею**:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

або її наслідків:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}.$$

**Приклад 3.14.** Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+10}{x-2}\right)^{3x}$ .

**Розв'язання.** При застосуванні властивості 8 отримуємо в основі виразу невизначеність виду  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ; якщо її позбавитись за відповідним правилом, то отримаємо  $[1^\infty]$ . Далі

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+10}{x-2}\right)^{3x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2+12}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{x-2}\right)^{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{12}}\right)^{3 \cdot \frac{x-2}{12} \cdot 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{12}}\right)^{36 \left(\frac{x-2}{12} + \frac{1}{6}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{12}}\right)^{36 \frac{x-2}{12} + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{12}}\right)^{\frac{x-2}{12}}\right)^{36} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{12}}\right)^6 = e^{36} \cdot 1^6 = e^{36}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.15.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7}\right)^x$ .

**Розв'язання.** Переробимо вираз в дужках способом, відмінним від попереднього прикладу. Поділимо чисельник дробу на знаменник та виділимо цілу частину:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right]^{\frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7}}.$$

Оскільки  $\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} = e.$$

Беручи до уваги, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(8 - \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = 8$ ,

отримуємо такий результат:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = e^8.$$

### Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

При відніманні від нескінченності нескінченності того ж порядку виникає невизначеність виду  $\infty - \infty$ . Для її розкриття необхідно перетворити заданий вираз.

**Приклад 3.16.** Знайти границю, не користуючись правилом Лопіталя:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x})$ .

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x}) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2-x}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}} = 0.$$

**Приклад 3.17.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$ .

**Розв'язання.** Помножимо і розділимо цей вираз на  $\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) &= [\infty - \infty] = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} &= \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

### Теоретичні запитання

1. Дайте означення функції.
2. Що таке область існування функції?
3. Які функції називають елементарними? Назвіть основні елементарні функції.
4. Дайте означення границі функції.
5. Сформулюйте властивості границь.
6. Які ознаки існування границі?
7. Які функції називають нескінченно малими та нескінченно великими? Який зв'язок між ними?
8. Які є невизначеності та які правила їх розкриття?
9. Назвіть першу та другу важливі границі і їх наслідки.

### Завдання для самостійної роботи:

Обчислити границі:

- |                                                                |                                                                 |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x^2+3x+7}$               | 2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$           |
| 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}$    | 4) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-4x^2+20x}{-2x^3+1}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$    |

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^2 + x}{x^3 + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{59x^8 + 6x^4 + 2}{12x^{12} - x^{10}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 8x^2 + 21x - 30}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 + 1}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\operatorname{tg} 20x}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - x^2} \right)$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1 + 2x)}{4 \operatorname{arctg} 2x}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^4}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 7) [\ln(x + 4) - \ln x]$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x^3 + 2x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 5x} - \sqrt{1 - 3x}}{x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x - 6} - 1}{x - 7}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{3x + 1}}{6x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 10x - \cos 8x}{\operatorname{arctg}^2 6x}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin 3x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 12x}{\sqrt{4 + x^2} - 2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{\operatorname{tg} x + \sin x}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{2}{3-x}}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x + 2} \right)^{x+3}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3} \right)^{2x+3}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + 7x}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}}$$

## Індивідуальні завдання

### Варіант 1

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + 5x - 24}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 4x - 5}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^2 + x - 1}$ ;
- г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2 - 5x + 3}$ ;
- д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2 - \sqrt{2+x}}$ ;
- е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x}$ ;
- ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$ ;
- з)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \operatorname{ctg} 3x$ ;
- і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+1}{5x-1} \right)^{2x}$ ;
- к)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$ .

### Варіант 2

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 + 5x - 14}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 2x^3 - 9}{6x^6 + 3x^2 + x}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^8 + 4x^5 + 3}{x^4 + x^5}$ ;
- г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 + x^5 + 7}{3x^9 + x^4}$ ;
- д)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5+x} - 3}{x^2 - x - 12}$ ;
- е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt[3]{x+7} - 2}$ ;
- ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2}$ ;
- з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}$ ;
- і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+5} \right)^{x+1}$ ;
- к)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ .

### Варіант 3

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

- а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 10x + 12}{21 + x - 2x^2}$ ;
- б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x + 4}{3x^4 + x^2 + 2}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 2x^2 - 1}$ ;
- г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 2x + 3}$ ;
- д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4}$ ;
- е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$ ;
- ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{8 \sin 3x}$ ;
- з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 x}$ ;

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+1}{5x-1} \right)^{2x};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

### Варіант 4

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^2 + 1}{x^9 + 3x^5 - x};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 6x + \frac{3}{2}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 1}{2x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{3x^2 + 2x + 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{1}{x-1}};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x.$$

### Варіант 5

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{1 + x^3};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + x^3 - x}{3x^6 - 2x + 1};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - x}{x^7 + x^5};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + x^3 + x}{9x^3 - 4x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{6+x} - 3};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{7x + x^2};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{x-2};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/2x}.$$

### Варіант 6

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 6 + x^2};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9 + 9}{3 + x^5 + 5x^9};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^2 - x + 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+6}{x+2} \right)^{3x-6};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (9-4x)^{\frac{1}{x-2}}.$$

### Варіант 7

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{5x^2+5x-3} - \sqrt{5x^2+3x+2} \right); \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{2x^2+2x-4};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+4};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x-5}{5x^2+3x-1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2+x^4};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+6}{x+2} \right)^{3x-6};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x} \right)^{x+2}.$$

### Варіант 8

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2+3x-18};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^8+3x-1}{5x^8+4x^2+2};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7+x^5+x}{x^5+x^2};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6+x^2+1}{x^9+3x^5-x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{3-\sqrt{4-x}};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1-\cos^2 x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{x+1};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

### Варіант 9

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5+x^3+x+5}{2x^5+x^2+3};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-x+1}{2x^2+5x+2};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4+x^2+6}{2x^5+5x^3-2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{7x + x^2};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x} \right)^{x+2}.$$

### Варіант 10

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x^2 + 3}{x^2 + 3x - 5};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{10 + 3x - x^2}{3x^3 - 10x^2 - 5x - 100};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 - 3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x + 2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x+3} - 3};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 - x^3};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}{\operatorname{tg} x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-2}}.$$

### Варіант 11

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^3 - 27};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 5x + 1}{3x^2 + x - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + 3x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 6x^2 + 1}{x^7 + x^5 + x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x^2 - 3x - 10};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos^2 x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 3x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x} \right)^{x+2};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 2} (9 - 4x)^{\frac{1}{x-2}}.$$

### Варіант 12

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 5x - 4x^3}{5x^3 + x^2 - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{4x^4 - 2x^2 + 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^3 + 2x};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x+3} - 2};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - x - 2};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-6}{x+3} \right)^{x+1};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{1}{x-3}}.$$

### Варіант 13

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 4x + 4}{4x^2 + 3};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{2x^2 + 4x - 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x + 2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-3x}}{x};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arcsin 12x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 5x + 2} \right)^x;$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{x-2}}.$$

### Варіант 14

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{64 - x^3}{x^2 - 5x + 4};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x^2 - 1}{5x^3 + x + 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 4x + 1}{x^3 + 2x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x}{3x^5 + x^2 + 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{x^2 + x - 6};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt[3]{10+x}}{x^2 - 3x - 10};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}{\operatorname{tg} x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+5} \right)^{x-1};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{x-2}}.$$

### Варіант 15

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x + 3}{6x^2 + 1}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{2x^3 + x - 1}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 5x + 1}$ ;  
д)  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{11+x} - 2}{x + 7}$ ;  
е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}}$ ;  
ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x \sin 3x}$ ;  
з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arcsin 12x}$ ;  
і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+12}{x} \right)^{3x+3}$ ;  
к)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+4) - \ln x]$ .

### Варіант 16

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

- а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 4x^2 - 2}{3x^4 + 2x + 1}$ ;;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 + 2x + 3}$ ;  
д)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ ;  
е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$ ;  
ж)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} 7x}{x}$ ;  
з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$ ;  
і)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$ ;  
к)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x-3} \right)^x$

### Варіант 17

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 4x^2 - 2}{3x^4 - 2x + 1}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 2x^4 + x}{5x^8 + 4x^4 + 1}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x - 3}{3x^4 + 2x^2 + x}$ ;  
д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x+1} - 2}$ ;  
е)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$ ;  
ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ ;  
з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ ;  
і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-10}{x+5} \right)^{2x}$ ;  
к)  $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{3}{x-3}}$ ;

### Варіант 18

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x^3 + x + 3};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 7x + 1}{5x^5 - x + 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{4x^2 + x + 2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{2x + 2}};$

е)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{9 - x}}{x - 2};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4 \cos 4x}{x \sin x};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 7}{x + 3} \right)^{2x + 2};$

к)  $\lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\frac{2x}{x+1}}.$

### Варіант 19

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 4x^2 - 2}{3x^4 + 2x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 2}{2x^2 + 4x - 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - 3};$

д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}{x - 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 4};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 4x}{\sqrt{1 + 3x^2} - 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} \right)^{x^2};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$

### Варіант 20

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 5x - 14};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 4x^2 - 2}{3x^4 + 2x + 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{2x^4 + x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 6x - 3}{x^4 + 2x - 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{5x + 4}}{x^2 - 4x + 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2};$

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{x+1} \right)^x;$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{x}{x-2}}.$$

### Варіант 21

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{1 + x^3};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + x^3 - x}{3x^6 - 2x + 1};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - x}{x^7 + x^5};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + x^3 + x}{9x^3 - 4x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{6+x} - 3};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{3 - \sqrt{4-x}};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x};$$

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{2}{3-x}};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{2+x}.$$

### Варіант 22

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 6 + x^2};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9 + 9}{3 + x^5 + 5x^9};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^2 - x + 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 4x - 5};$$

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^4};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$$

### Варіант 23

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{5x^2 + 5x - 3} - \sqrt{5x^2 + 3x + 2} \right);$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x + 5}{2x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{5x^2 + 3x - 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{3x^2 + x^4};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 + 9} \right)^{x^2};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

### Варіант 24

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x - 18};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^8 + 3x - 1}{5x^8 + 4x^2 + 2};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 + x^5 + x}{x^5 + x^2};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^2 + 1}{x^9 + 3x^5 - x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{3 - \sqrt{4 - x}};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 - x^3};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos^2 x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{x}{1-x}};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x}.$$

### Варіант 25

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 + x + 5}{2x^5 + x^2 + 3};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 1}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 + 6}{2x^5 + 5x^3 - 2};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{7x + x^2};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

### Варіант 26

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x^2 + 3}{x^2 + 3x - 5};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{10 + 3x - x^2}{3x^3 - 10x^2 - 5x - 100};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 - 3};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x + 2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x+3} - 3};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$і) \lim_{x \leftarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-5} \right)^x;$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 - x^3};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x-3) - \ln x];$$

### Варіант 27

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^3 - 27};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 5x + 1}{3x^2 + x - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + 3x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 6x^2 + 1}{x^7 + x^5 + x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x^2 - 3x - 10};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}{\operatorname{tg} x};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos^2 x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 3x};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x;$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{2x}{x-1}}.$$

### Варіант 28

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 5x - 4x^3}{5x^3 + x^2 - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{4x^4 - 2x^2 + 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^3 + 2x};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x+3} - 2};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - x - 2};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{2x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-1}}.$$

### Варіант 29

Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 4x + 4}{4x^2 + 3};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 - 1};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{2x^2 + 4x - 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-3x}}{x};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x + 2};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}}.$$

### Варіант 30

Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{64 - x^3}{x^2 - 5x + 4};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 4x + 1}{x^3 + 2x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{x^2 + x - 6};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x};$$

$$\text{і)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-4} \right)^{4+x};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x^2 - 1}{5x^3 + x + 1};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x}{3x^5 + x^2 + 1};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt[3]{10+x}}{x^2 - 3x - 10};$$

$$\text{з)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}}.$$

## Практичне заняття 4

### Тема: Неперервність функції

**Мета:** дати поняття неперервної функції, розглянути класифікацію точок розриву, навчити досліджувати функцію на неперервність та визначати характер точок розриву.

#### Означення 4.1.

Якщо функція  $y = f(x)$  визначена в точці  $x_0$  і існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , яка дорівнює  $f(x_0)$ , то ця функція називається **непервною** в точці  $x_0$ .

#### Теорема 4.1.

Функція  $y = f(x)$  неперервна в точці  $x_0$  тоді і тільки тоді, коли  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

#### Означення 4.2.

Функція називається **неперервною на інтервалі** (скінченному або нескінченному), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

**Зауваження.** Якщо функція не існує в точці  $x_0$  або не виконується умова теореми про неперервність, то кажуть що функція в точці  $x_0$  має **розрив**, а  $x_0$  називають **точкою розриву функції**.

### Класифікація точок розриву

Функція  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має розрив **I роду (усувний)**, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0) \text{ або}$$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \text{ а } f(x_0) \text{ не існує (рис. 4.1).}$$

В цьому випадку покладають, що

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

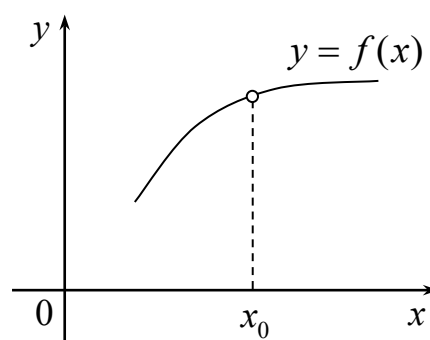


Рис. 4.1

Функція  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має розрив **I роду (неусувний)**, якщо

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

В цьому випадку різницю  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  називають **стрибком** функції в точці  $x_0$  (рис. 4.2).

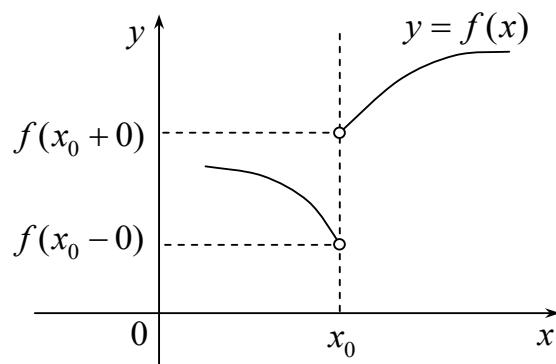


Рис. 4.2

Функція  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має розрив **II роду**, якщо хоча б одна з границь  $f(x_0 - 0)$  або  $f(x_0 + 0)$  дорівнює нескінченності (рис. 4.3) або не існує.

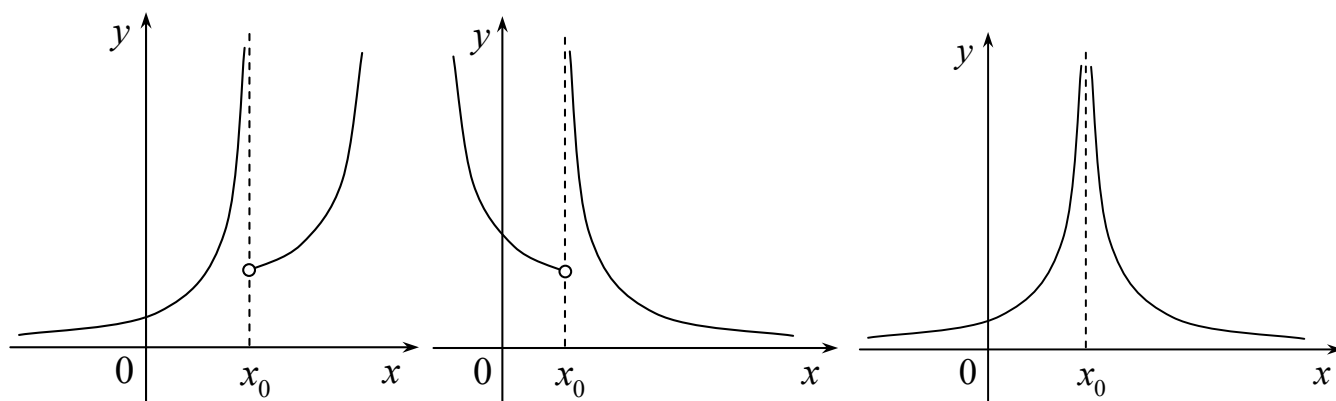


Рис. 4.3

**Приклад 4.1.** Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1; \\ 2x^2 - 2, & 1 < x \leq 3; \\ 5, & x > 3. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Задана функція визначена на множині всіх дійсних чисел. Дослідимо її поведінку в точках  $x=1$  та  $x=3$ . Для цього знайдемо в цих точках односторонні границі та значення функції.

В точці  $x=1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x + 1) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x^2 - 2) = 0;$$

$$f(1) = -1 + 1 = 0.$$

Оскільки  $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$ , то функція неперервна в точці  $x=1$ .

В точці  $x=3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (2x^2 - 2) = 16;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 5 = 5;$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 = 16.$$

Так як  $f(3-0) \neq f(3+0)$ , то в точці  $x=3$  функція має розрив I роду (неусувний), тобто в цій точці стрибок (рис. 4.4).

Рис. 4.4

**Приклад 4.2.** Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = 1 + 5^{\frac{1}{x+1}}$$

**Розв'язання.** Задана функція неперервна при всіх дійсних значеннях  $x$ , окрім  $x=-1$ , оскільки при цьому значенні знаменник дробу  $\frac{1}{x+1}$  дорівнює нулю. Отже, в точці  $x=-1$  функція має розрив. Дослідимо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left( 1 + 5^{\frac{1}{x+1}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -1-0} 5^{\frac{1}{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{так як } \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty, \\ \text{то } \lim_{x \rightarrow -1-0} 5^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 5^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^t} = 0 \end{array} \right| = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \left( 1 + 5^{\frac{1}{x+1}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -1+0} 5^{\frac{1}{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{так як } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty, \\ \text{то } \lim_{x \rightarrow -1+0} 5^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5^t = +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Оскільки границя справа дорівнює нескінченності, то в точці  $x=-1$  функція має розрив другого роду.

Для зображення функції дослідимо її ще при  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + 5^{\frac{1}{x+1}} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5^{\frac{1}{x+1}} = 1 + \lim_{t \rightarrow 0} 5^t = 1 + 1 = 2.$$

Враховуючи, що  $f(-1)$  не існує,  
 при  $x \rightarrow -1-0$   $f(x) \rightarrow 1$ , при  $x \rightarrow -1+0$   
 $f(x) \rightarrow +\infty$ , при  $x \rightarrow -\infty$  і  
 $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \rightarrow 2$ , побудуємо  
 графік заданої функції (рис. 4.5).

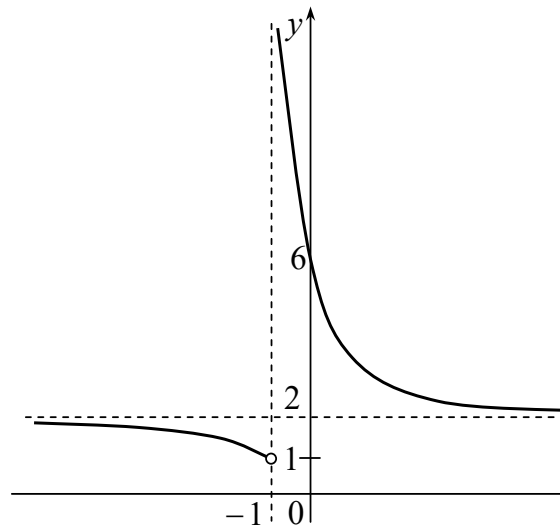


Рис. 4.5

### Теоретичні запитання

1. Дайте означення функції, неперервної в точці.
2. Дайте означення функції, неперервної на інтервалі.
3. Яка класифікація точок розриву відома?
4. Який розрив називається усувний?
5. Який розрив називається неусувний першого роду?
6. Який розрив називається неусувний другого роду?

### Завдання для самостійної роботи:

Дослідити функції на незалежність, та встановити характер розривів:

$$1) y = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{x}{4}, & x > 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}},$$

$$3) y = 7^{\frac{1}{6-x}}.$$

### Індивідуальні завдання

Знайти точки розриву, якщо вони існують, установити характер розривів та зробити схематичні рисунки:

#### Варіант 1

a)  $y = 13^{\frac{1}{5+x}};$

б)  $y = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$

#### Варіант 2

a)  $y = 10^{-\frac{1}{x^2}};$

б)  $y = \begin{cases} x+3, & x \leq -1; \\ 2x^2, & -1 < x \leq 1; \\ 3, & x > 1. \end{cases}$

#### Варіант 3

a)  $y = 2^{\frac{1}{x}} + 1;$

б)  $y = \begin{cases} x, & x < 1; \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$

#### Варіант 4

a)  $y = 11^{\frac{1}{4+x}};$

б)  $y = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

#### Варіант 5

a)  $y = \frac{1}{1+2^x};$

б)  $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$

#### Варіант 6

a)  $y = 1 + 3^{\frac{1}{1-x}};$

б)  $y = \begin{cases} -2x, & x < -1; \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 0; \\ x+1, & x \geq 0. \end{cases}$

#### Варіант 7

a)  $y = 15^{\frac{1}{8-x}};$

б)  $y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

#### Варіант 8

a)  $y = 1 + 2^{\frac{1}{3+x}};$

б)  $y = \begin{cases} -x, & x < -1; \\ x^2, & x > -1. \end{cases}$

**Варіант 9**

$$\text{a) } y = 1 + 2^{\frac{1}{3+x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} 2, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ 2 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Варіант 10**

$$\text{a) } y = 14^{\frac{1}{6-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

**Варіант 11**

$$\text{a) } y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 12**

$$\text{a) } y = e^{\frac{1}{x+5}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x \leq -1; \\ \sin x, & -1 < x \leq 1; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 13**

$$\text{a) } y = 10^{\frac{1}{7-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ x - 2, & x > \pi. \end{cases}$$

**Варіант 14**

$$\text{a) } y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x + 1, & x < 1; \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

**Варіант 15**

$$\text{a) } y = 3^{\frac{1}{4-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x + 2, & x \leq 1; \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 16**

$$\text{a) } y = 3^{\frac{1}{1-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

**Варіант 17**

$$\text{a) } y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1+x}}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x+4, & x \leq 0; \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2; \\ \frac{1}{1-x}, & x > 2. \end{cases}$$

**Варіант 18**

$$\text{a) } y = 6^{\frac{1}{4-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x+2, & x \leq 1; \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 19**

$$\text{a) } y = 8^{\frac{1}{4-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

**Варіант 20**

$$\text{a) } y = 2^{\frac{1}{x+1}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x < 3; \\ x^2, & x \geq 3. \end{cases}$$

**Варіант 21**

$$\text{a) } y = \frac{1}{1 + 2^x};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x^2, & x < 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

**Варіант 22**

$$\text{a) } y = 1 + 3^{\frac{1}{1-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -2x, & x < -1; \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 0; \\ x+1, & x \geq 0. \end{cases}$$

**Варіант 23**

$$\text{a) } y = 15^{\frac{1}{8-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

**Варіант 24**

$$\text{a) } y = 1 + 2^{\frac{1}{3+x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x < -1; \\ x^2, & x > -1. \end{cases}$$

**Варіант 25**

$$\text{a) } y = 1 + 2^{\frac{1}{3+x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} 2, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ 2 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Варіант 26**

$$\text{a) } y = 14^{\frac{1}{6-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

**Варіант 27**

$$\text{a) } y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 28**

$$\text{a) } y = e^{\frac{1}{x+5}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x \leq -1; \\ \sin x, & -1 < x \leq 1; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

**Варіант 29**

$$\text{a) } y = 10^{\frac{1}{7-x}};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ x - 2, & x > \pi. \end{cases}$$

**Варіант 30**

$$\text{a) } y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x + 1, & x < 1; \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

## РОЗДІЛ III

### Диференціальне числення функції однієї незалежної змінної

#### Практичне заняття 5

**Тема:** Похідна

**Мета:** ознайомити з правилами обчислення похідних та з формулами знаходження похідних елементарних функцій; розглянути методи обчислення похідної складної функції, функції, що задана неявно, степенево – показникової та заданої параметрично.

#### Означення 5.1.

**Похідною** функції  $y = f(x)$  називається границя відношення приросту функції  $\Delta y$  до приросту незалежної змінної  $\Delta x$ , коли  $\Delta x$  прямує до 0 (рис. 1). Тобто:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Зауважимо, що за умови якщо ця границя існує, то її називають похідною функції  $y = f(x)$  і позначають як

$$f'(x), \text{ або } y', \text{ або } y'_x, \text{ або } \frac{dy}{dx}$$

Похідна показує «швидкість» зміни функції  $y = f(x)$  (рис. 5.1).

Операція знаходження похідної функції називається **диференціюванням** цієї функції. Функцію  $y = f(x)$ , яка має похідну в точці  $x_0$ , називають диференційованою в точці  $x_0$ .

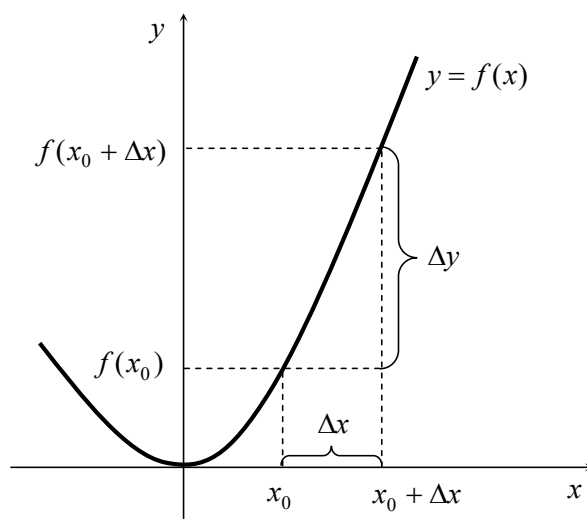


Рис. 5.1

## Правила диференціювання функцій

Нехай дано функції  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$ , тоді:

|   |                                                                   |
|---|-------------------------------------------------------------------|
| 1 | $(Cu)' = Cu', C = \text{const}$                                   |
| 2 | $(u \pm v)' = u' \pm v'$                                          |
| 3 | $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$                          |
| 4 | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ |

## Похідні основних елементарних функцій

|    |                                                                                                                                                                                            |     |                                                 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------|
| 1. | $(c)' = 0, c = \text{const}$                                                                                                                                                               | 6.  | $(\sin x)' = \cos x$                            |
| 2. | $(x)' = 1$                                                                                                                                                                                 | 7.  | $(\cos x)' = -\sin x$                           |
| 3. | $(x^n)' = nx^{n-1}, n \text{ — будь-яке дійсне число}$<br>$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2},$<br>$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 8.  | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   |
|    |                                                                                                                                                                                            | 9.  | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
|    |                                                                                                                                                                                            | 10. | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         |
| 4. | $(a^x)' = a^x \ln a,$<br>$a \text{ — дійсне число, } a > 0, a \neq 1$<br>$(e^x)' = e^x$                                                                                                    | 11. | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        |
|    |                                                                                                                                                                                            | 12. | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$   |
| 5. | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$<br>$(\ln x)' = \frac{1}{x}$                                                                                                             | 13. | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

**Приклад 5.1.** Знайти похідну функції  $y = 2x^3 + \sqrt{x} - \sin x$ .

**Розв'язання.** За правилом диференціювання суми та різниці маємо

$$y' = (2x^3)' + (\sqrt{x})' - (\sin x)' = 2 \cdot 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x.$$

**Приклад 5.2.** Знайти похідну функції  $y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$ .

**Розв'язання.** За правилом диференціювання добутку маємо

$$y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \sqrt{x} + \operatorname{tg} x \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{x} + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}$$

**Приклад 5.3.** Знайти похідну функції  $y = \frac{\cos x}{x^2}$ .

**Розв'язання.** За правилом диференціювання дробу:

$$y' = \frac{(\cos x)' \cdot x^2 - \cos x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 \cdot \sin x - 2x \cdot \cos x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$$

### Похідна складної функції

**Означення 5.2.**

Якщо  $y = f(u)$ , а  $u = u(x)$ , то  $y = f(u(x))$  називається **складною функцією**. Змінна  $u$  називається проміжною.

**Похідна складної функції**  $y = f(u(x))$  за змінною  $x$  обчислюється за формулою:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

**Приклад 5.4.** Знайти похідну функції  $y = \cos(x^2 - 2x + 4)$ .

**Розв'язання.** Використовуючи формулу диференціювання складної функції, маємо:

$$y' = -\sin(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)' = -\sin(x^2 - 2x + 4)(2x - 2).$$

**Приклад 5.5.** Знайти похідну функції  $y = 5^{\arcsin \sqrt[3]{x}}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} y' &= 5^{\arcsin \sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot (\arcsin \sqrt[3]{x})' = 5^{\arcsin \sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}} (x^{\frac{1}{3}})' = \\ &= 5^{\arcsin \sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \ln 5 \cdot 5^{\arcsin \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.6.** Знайти похідну функції  $y = \ln \frac{e^{2x} + x}{\cos 5x}$ .

**Розв'язання.** Запишемо функцію у вигляді  $y = \ln(e^{2x} + x) - \ln \cos 5x$ . Маємо

$$y' = \frac{1}{e^{2x} + x} (e^{2x} + x)' - \frac{1}{\cos 5x} (\cos 5x)' = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + \frac{5 \sin 5x}{\cos 5x} = \frac{2e^{2x} + 1}{e^{2x} + x} + 5 \operatorname{tg} 5x.$$

**Приклад 5.7.** Знайти похідну функції  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

**Розв'язання.** 
$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**Приклад 5.8.** Знайти похідну функції  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$ .

**Розв'язання.** 
$$y' = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x} \left( \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} - 1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}.$$

### Похідна функції, що задана неявно

#### Означення 5.3.

Функція називається **неявно заданою**, якщо змінні  $x$  і  $y$  зв'язані між собою рівнянням, що не виражене відносно  $y$ , тобто у вигляді  $F(x, y) = 0$ . Для знаходження похідної  $y'_x$  неявно заданої функції диференціюють ліву і праву частину заданої рівності, враховуючи, що  $y$  – це функція від  $x$ , а отриману рівність розв'язують відносно  $y'_x$ .

**Приклад 5.9.** Знайти похідну  $y'_x$  функції.  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $y$  є функцією від  $x$ , то  $y^2$  розглядатимемо як складну функцію від  $x$ , тобто  $(y^2)' = 2y \cdot y'$ .

Продиференціювавши по  $x$  обидві частини заданого рівняння, дістанемо

$$2x + 2yy' = 0.$$

Звідси

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

**Приклад 5.10.** Знайти похідну функції  $e^y \sin y = \cos x$ .

**Розв'язання.** Диференціюємо ліву і праву частину рівності. Похідну лівої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку:

$$(e^y)' \cdot \sin y + e^y \cdot (\sin y)' = (\cos x)'.$$

Так як  $y$  є функцією від  $x$ , то  $(e^y)'$  і  $(\sin y)'$  диференціюємо за правилом диференціювання складної функції:

$$e^y \cdot y' \cdot \sin y + e^y \cdot \cos y \cdot y' = -\sin x.$$

З останньої рівності знайдемо  $y'$ :

$$e^y \cdot y' \cdot (\sin y + \cos y) = -\sin x$$

$$y' = -\frac{\sin x}{e^y \cdot (\sin y + \cos y)}.$$

**Приклад 5.11.** Знайти похідну функції  $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$ .

**Розв'язання.** Продиференціювавши за  $x$  обидві частини рівняння, дістанемо

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2xe^y = 0.$$

Звідки

$$y' = \frac{(2xye^y - 3x^2)y}{1 - x^2 ye^y}.$$

**Похідна степенево – показникового виразу.**

**Логарифмічне диференціювання**

**Степеново – показникова функція** має вигляд  $y = u^v$ , де  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ , тобто  $u$  і  $v$  вирази, що містять незалежну змінну  $x$ .

Для знаходження похідної функції  $y = u^v$  використовують **спосіб логарифмічного диференціювання**.

**Приклад 5.12.** Знайти похідну функції  $y = (\sin x)^{\tan x}$ .

**Розв'язання.** Скористаємося правилом логарифмічного диференціювання:

$$\begin{aligned}\ln y &= \operatorname{tg} x \ln \sin x, \quad \frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \frac{1}{\sin x} \cos x + \\ &+ \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x, \\ y' &= y \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x \right).\end{aligned}$$

**Приклад 5.13.** Знайти похідну функції  $y = x^{x^2}$ .

**Розв'язання.** Логарифмуючи функцію, дістаємо

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y',$$

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2 \ln x),$$

$$y' = xy(1 + 2 \ln x) = xx^{x^2} (1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1} (1 + 2 \ln x).$$

### Похідна функції, заданої параметрично

#### Означення 5.4.

Функція називається заданою **параметрично**, якщо відповідні одна одній змінні  $x$  та  $y$  виражені через деякий параметр  $t$ :

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

де  $t$  – належить деякому інтервалу; найчастіше цей інтервал  $(-\infty; +\infty)$ .

Похідна  $y'_x$  параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

**Приклад 5.14.** Функцію задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi).$$

Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ : а) при будь-якому  $t$ ; б) при  $t = \frac{\pi}{4}$ .

**Розв'язання.** а)  $y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctgt};$

б) У знайдену похідну  $y'_x$  підставимо значення параметра:  $t = \frac{\pi}{4}$ :

$$(y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

**Приклад 5.15.** Знайти  $y'_x$ , якщо

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Знайдемо

$$\begin{aligned} x'_t = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1), \quad y'_t = 15t^2(t^2 + 1) &\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \\ &= \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2. \end{aligned}$$

### Теоретичні запитання

1. Дайте означення похідної функції.
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Який фізичний зміст похідної?
4. Сформулюйте правила відшукування похідних.
5. Напишіть формули і правила відшукування похідних елементарних функцій.
6. Сформулюйте правило відшукування похідних функцій, заданих неявно.
7. Сформулюйте правило відшукування похідних степеневих – показникових функцій.
8. Сформулюйте правило відшукування похідних параметрично заданих функцій.

### Завдання для самостійної роботи:

Обчислити похідні наступних простих функцій:

$$1) y = 2x^5 - 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^3} - 10x + 3;$$

$$2) y = \frac{8}{\sqrt[2]{x^{13}}} (0,1 \log_3 x - 3 \operatorname{tg} x);$$

$$3) y = x^3 (\sqrt[5]{x^4} + \frac{4}{x});$$

$$4) y = \frac{\operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{tg} x}{\arcsin x \cdot \arccos x};$$

$$5) y = \frac{(6^x - x^6)}{5e^x} - 4^\pi;$$

$$6) y = x^8 (\sqrt[5]{x^9} + \frac{47}{7x^6}) \frac{6}{\sin 5};$$

$$7) y = \frac{3 \cos x \cdot \sin x}{7 \ln x} + \ln 7;$$

$$8) y = (\cos 6)^x \cos x - \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} 4)^x.$$

Обчислити похідні наступних складних функцій:

$$1) y = \ln^3(7x - 3);$$

$$2) y = 6^{\sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + 4)}};$$

$$3) y = \operatorname{arctg} \sqrt{3x};$$

$$4) y = \cos \ln 5^x;$$

$$5) y = \operatorname{tg}^4(2x \cdot e^{5x});$$

$$6) y = \operatorname{ctg} \arcsin \frac{x}{24};$$

$$7) y = \sqrt[8]{\arcsin \frac{1}{x}};$$

$$8) y = \frac{1}{\sin(44x^2 + 6x - 6)};$$

$$9) y = \log_3 \frac{x^3 - 7}{\sqrt{x}};$$

$$10) y = \lg \sqrt{3} \lg \sqrt[9]{9 - \frac{x}{6}}.$$

Обчислити похідні наступних функцій:

$$1) \frac{x^3}{5} + \frac{y^4}{7} = 10;$$

$$2) \cos(x + y) = \sin xy;$$

$$3) x + y = e^{x+y};$$

$$4) \operatorname{ctg} \ln 2 + \operatorname{ctg} \ln y = \operatorname{ctg} \ln x;$$

$$5) \operatorname{tg} xy = e^{xy};$$

$$6) y = (x + 7)^{8x};$$

$$7) x^2 y^3 - x^3 - y^2 = 3\pi;$$

$$8) y = (\cos x)^{x^3};$$

$$9) y = \sqrt[6]{\frac{x(x^4 + 7)}{x - 9}};$$

$$10) y = \begin{cases} x = \frac{t^5}{\arccos t} \\ y = e^{\sqrt[7]{x}} \end{cases};$$

$$11) y = (\sqrt{x - 7})^x;$$

$$12) y = \begin{cases} x = \frac{4}{\cos(12 - t)} \\ y = \frac{\cos(12 - t)}{4} \end{cases};$$

$$13) y = x^{\lg 4x};$$

$$14) y = (\operatorname{arctg} 4x)^{\sin 5x};$$

$$15) y = x^6 (x^2 + 5)^{10} (x^3 + 1)^7;$$

$$17) y = \begin{cases} x = \pi \sin t \cos t \\ y = \sqrt{1-t^6} \end{cases};$$

$$16) y = \begin{cases} x = \operatorname{tgt} t - \sqrt{t} \\ y = 4^t \end{cases};$$

$$18) y = \begin{cases} x = \cos^2 t - \sqrt{8} \\ y = 3^{\sin t} + 3^5 \end{cases}.$$

### Індивідуальні завдання

#### Варіант 1

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) y = (x^2 + 4) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3};$$

$$2) y = \log_4 \operatorname{tg} \frac{3x}{2};$$

$$3) y = (\operatorname{arctg} x)^{x^3+2};$$

$$4) y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}};$$

$$5) \ln y + \frac{y}{x} = 2;$$

$$6) 2^y - 2^x + 3 = 0;$$

$$7) y = \frac{3x^3 + 4x^2 - x - 2}{\sqrt{1+x}};$$

$$8) y = (x-2)(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x}});$$

$$9) y = \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x};$$

$$10) y = \ln \frac{\sqrt{5} \cdot \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x};$$

$$11) y = \arcsin x \ln \sqrt{1-x^2};$$

$$12) y = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x);$$

$$13) x^2 - y + 3 = y^3;$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \begin{cases} x = 3 \cos^2 t; \\ y = 2 \sin^2 t; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x = 3t - t^3; \\ y = 3t^2. \end{cases}$$

#### Варіант 2

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) y = 4\sqrt{x^2-3} - \operatorname{arctg} \frac{2}{x};$$

$$2) y = \arcsin \sqrt{1-e^{2x}};$$

$$3) y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$4) y = (\ln 3x)^{\frac{2}{x}};$$

$$5) \cos 3x^2 + \ln y = 80;$$

$$6) \operatorname{tgy} + 2x = 10y;$$

$$7) \quad y = \frac{2x^2 - 1 - 5^x}{3x^3};$$

$$9) \quad y = \ln(x + \sqrt{tgx});$$

$$11) \quad y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$13) \quad y = x^5 - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2};$$

$$8) \quad y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x);$$

$$10) \quad y = \arccos \sqrt{5x};$$

$$12) \quad y = \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}};$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 3 - \cos t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t^3 + t^2; \\ y = 1 - 2^t. \end{cases}$$

### Варіант 3

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$2) \quad y = \ln^3(1-x);$$

$$3) \quad y = (x+1)^{\cos x};$$

$$4) \quad y = (\operatorname{ctgx})^{x^3+1};$$

$$5) \quad e^y \sin y = \cos x;$$

$$6) \quad e^x + y \operatorname{tg} x + 4 = 0;$$

$$7) \quad y = \frac{x^4 - 8x^2}{x^2 - 4};$$

$$8) \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2};$$

$$9) \quad y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x});$$

$$10) \quad y = (2x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 1};$$

$$11) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$12) \quad y = e^{-2x} \arcsin e^{2x};$$

$$13) \quad y = \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \log t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t^3 - t; \\ y = \sqrt{t+3}. \end{cases}$$

### Варіант 4

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \left( \arccos \frac{1}{x} \right)^2 + \sqrt{x^2 - 1};$$

$$2) \quad y = x 2^{x-8};$$

$$3) \quad y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x};$$

$$5) \quad y^3 = x \sin y;$$

$$7) \quad y = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{2 + 4x}};$$

$$9) \quad y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}};$$

$$11) \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x};$$

$$13) \quad y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \cdot \sqrt[6]{x}.$$

$$4) \quad y = (\sqrt{x})^{\ln 2x};$$

$$6) \quad \arcsin \sqrt{x} + e^y = 10;$$

$$8) \quad y = \log_5 \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x};$$

$$10) \quad y = \frac{\cos^2 3x}{\sin 8x};$$

$$12) \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos 2x}};$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos t + t \sin t; \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = t^2. \end{cases}$$

### Варіант 5

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = 5^{\sin x};$$

$$2) \quad y = \frac{2}{\operatorname{ctgx} - 1} + \ln \operatorname{tg} x;$$

$$3) \quad y = (x - 7)^{\sin 3x};$$

$$4) \quad y = (\arcsin 2x)^x;$$

$$5) \quad y + \sqrt{x} \ln y = 1;$$

$$6) \quad x^2 - y^2 = e^x;$$

$$7) \quad y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{12x^{12}};$$

$$8) \quad y = 2\sqrt{x^2 + 1} + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - 1);$$

$$9) \quad y = \log_6 \frac{1 + \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x};$$

$$10) \quad y = \frac{\sin^2 4x}{\cos 4x};$$

$$11) \quad y = \frac{2}{x-1} \sqrt[6]{2 - x^2};$$

$$12) \quad y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1};$$

$$13) \quad y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$$

## Варіант 6

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}};$

2)  $y = \sqrt{e^{2x} - e^{3x}};$

3)  $y = (\log_4 x)^{\frac{x}{2}};$

4)  $y = (\arcsin x)^x;$

5)  $\cos^2 y = x - y;$

6)  $x^2 + y^2 + x = 0;$

7)  $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}};$

8)  $y = \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3};$

9)  $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x};$

10)  $y = \frac{x^4}{81} + (x^2 + 18)\sqrt{x - 9};$

11)  $y = \sin \frac{\sqrt[3]{x^2}}{9};$

12)  $y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2});$

13)  $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

## Варіант 7

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = e^{2x^2} (3 + 2x^2 + 2x^4);$

2)  $y = 2^{\arccos 2x};$

3)  $y = (2x + 3)^{\sqrt{x}};$

4)  $y = (\sqrt{x})^{2x};$

5)  $y = \sin(x - y);$

6)  $\sqrt{y} + e^x + 5 = 0;$

7)  $y = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3};$

8)  $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)$

9)  $y = \ln^2(x + \cos x);$

10)  $y = \frac{\sin^2 7x}{\cos 14x};$

11)  $y = \frac{3x-1}{3x^2-2x+1};$

12)  $y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12};$

13)  $y = \frac{\cos 3x}{9 + \ln^2 7}.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = 1 + t^2. \end{cases}$

### Варіант 8

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \ln \cos\left(\frac{4}{x}\right);$

2)  $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+2};$

3)  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}};$

4)  $y = (x^2 - 1)^x;$

5)  $\sqrt{y} + \sqrt[3]{x} = 2;$

6)  $y^2 + e^y - 5 \cos x = 0;$

7)  $y = \log_7 \operatorname{tg}(x+8);$

8)  $y = \ln(e^x + 1)(e^x + 1)^3;$

9)  $y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^2};$

10)  $y = \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x};$

11)  $y = 9 \arccos \sqrt{\frac{x-1}{6}};$

12)  $y = e^{-2x} \arcsin(e^{3x});$

13)  $y = 7^{2x} \sqrt{x^2 + 1}.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sqrt[3]{\sin t}. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}; \\ y = \ln t \end{cases}$

### Варіант 9

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \ln \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x;$

2)  $y = (x^2 + 1)^x;$

3)  $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1};$

4)  $y = (\sin x)^x;$

5)  $y = \cos x^2 + y;$

6)  $x - y^5 + e^x = e;$

7)  $y = \frac{4 - 3x^2}{\sqrt[3]{2 + x^3}};$

8)  $y = \frac{\sqrt{2^x - 1}}{\log_5 2x};$

9)  $y = \operatorname{arctg} 6x \sqrt{\sin x};$

10)  $y = \sqrt{16x^2 - 8x + 2} \cdot \operatorname{arctg}(4x - 1);$

11)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^8};$

12)  $y = \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x};$  13)  $y = 7^{\cos x} + \frac{6}{\sqrt[8]{x}}.$

II. Знайти другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = t + \sin t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \cos x^7. \end{cases}$

### Варіант 10

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{x}$

2)  $y = x^{\lg x}$ ;

3)  $y = (\ln x)^x$ ;

4)  $y = \sqrt{1 + \sin^2 2x}$ ;

5)  $y + \sin x^3 = e^y$ ;

6)  $e^{(x-y)} = \operatorname{ctg} x$ ;

7)  $y = 2(x-3)\sqrt{1+e^x}$

8)  $y = -2 \ln \frac{e^x - 1}{8^x + 1}$ ;

9)  $y = \log_9 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;

10)  $y = \frac{1}{20} \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$ ;

11)  $y = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9}$ ;

12)  $y = \frac{1}{x^3} \ln \frac{5}{\sqrt[6]{x}}$ ;

13)  $y = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}$ ;

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = t-1. \end{cases}$

### Варіант 11

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$ ;

2)  $y = (2x+3)^4 \arcsin x$

3)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 - 1}$ ;

4)  $y = (\operatorname{ctg} x)^x$ ;

5)  $x^2 \sin y - y^2 = 0$ ;

6)  $y = x^{\ln x}$

7)  $y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

8)  $2^{x-y} = 3 + x^2$ ;

9)  $y = \ln 4 \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ ;

10)  $y = \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$ ;

$$11) \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$12) \quad y = \frac{4 \ln x}{1 - \ln x};$$

$$13) \quad y = (1 + x^2) e^{\operatorname{arctg} x}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = t^7. \end{cases}$$

### Варіант 12

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$2) \quad y = \ln(1 + \operatorname{tg} x - x);$$

$$3) \quad y = (\sin x)^x;$$

$$4) \quad y = \operatorname{arctg}(\cos x);$$

$$5) \quad y = \operatorname{arctg}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$6) \quad y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2};$$

$$7) \quad y = (x^2 - 2)\sqrt{1+x^2};$$

$$8) \quad y = (x^2 - 2)^{\cos x};$$

$$9) \quad y = e^{-5x} \arcsin e^{5x};$$

$$10) \quad y = \lg \sqrt{\frac{x}{x+1}};$$

$$11) \quad y = \frac{3+x}{2} + 3 \arccos \sqrt{\frac{x}{2}};$$

$$12) \quad y^4 x^8 = \operatorname{ctgy};$$

$$13) \quad \arccos 7^y + \frac{1}{x} = 10.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t; \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

### Варіант 13

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}};$$

$$2) \quad y = \operatorname{tg} x^2 e^{\sin x};$$

$$3) \quad y = x^{\sqrt{x-1}};$$

$$4) \quad y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2};$$

$$5) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 5;$$

$$6) \quad y = \ln \ln^3 x;$$

$$7) \quad y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}};$$

$$8) \quad 3^{x-y} = \sin x;$$

$$9) \quad y = \log_3 \sin \frac{2x+4}{x+1};$$

$$10) \quad y = \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x};$$

$$11) \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x};$$

$$12) \quad y = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}};$$

$$13) \quad y = (3x)^{\operatorname{tg} x}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{t}; \\ y = 1 + t^2. \end{cases}$$

### Варіант 14

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = x\sqrt[3]{1+x^2};$$

$$2) \quad y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\cos x}};$$

$$3) \quad y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x};$$

$$4) \quad y = x^{\operatorname{arctg} x};$$

$$5) \quad xy + \arcsin y = 0;$$

$$6) \quad y = \frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x};$$

$$7) \quad y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2};$$

$$8) \quad y = x - \ln(1 + e^x);$$

$$9) \quad y = \log_5 \operatorname{tg} x;$$

$$10) \quad \operatorname{arctg} \sqrt{y} - x^9 = 23;$$

$$11) \quad y = (\sin 3x)^x;$$

$$12) \quad y = \sqrt{4x^2 + 12x - 7};$$

$$13) \quad y = \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17}).$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

### Варіант 15

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = 5\sqrt[5]{4x+3} - 8$

2)  $y = 3^x e^{-x}$ ;

3)  $y = \arccos(\operatorname{ctg}^2 x)$ ;

4)  $y = (\ln x)^{\sin x}$ ;

5)  $x^2 - y^2 - \sin^2 y = 0$ ;

6)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x + 1}{2}$ ;

7)  $y = \frac{\sin^2 15x}{\cos 30x}$ ;

8)  $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$ ;

9)  $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$ ;

10)  $y = (x-3) \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$ ;

11)  $y = (\operatorname{tg} x)^x$ ;

12)  $y = \ln \sqrt{-3+4x-x^2}$ ;

13)  $\operatorname{arctg} e^y = \sqrt[3]{x}$ .

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

### Варіант 16

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = -\sqrt[5]{(6x-1)^2}$ ;

2)  $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$ ;

3)  $y = x^{\ln 2x}$ ;

4)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ ;

5)  $e^{xy} = x^2 + y^2$ ;

6)  $\cos(x-y) = \sqrt{x}$ .

7)  $y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^2}}$ ;

8)  $y = \frac{\cos \ln x + \sin \ln x}{2}$ ;

9)  $y = \frac{\cos^2 16x}{32 \sin 32x}$ ;

10)  $y = \frac{6+x}{2} \sqrt{x(x-4)}$ ;

11)  $y^6 = 3x^2 - 4x + 2$  ;

12)  $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$ ;

13)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{6}$ .

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = e^t; \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

### Варіант 17

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = 2\sqrt{4x+3} - 9$ ;

2)  $y = \arcsin \frac{1}{x}$ ;

3)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$ ;

4)  $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$ ;

5)  $x \sin y - \cos y = 0$ ;

6)  $y = \frac{2}{3} - \frac{\cos x}{3 \sin^2 x}$ ;

7)  $y = \frac{\sqrt{2x+3} \cdot (x-2)}{x^2}$ ;

8)  $\ln y = \cos x - 7$ ;

9)  $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$ ;

10)  $y = \arccos \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$ ;

11)  $y = (\ln x)^x$ ;

12)  $y = \frac{1}{3} \sqrt[5]{x-6} + \ln(\sqrt{x+1} + 1)$ ;

13)  $y = \operatorname{arctg}(9 \cos^2 x - 4)$ .

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

### Варіант 18

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$ ;

2)  $y = 9 + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;

3)  $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ ;

4)  $y = x^{\sqrt[3]{x}}$ ;

5)  $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{2x} - 1})$ ;

6)  $xy = e^x$ ;

7)  $y = (1-x^2) \sqrt[5]{x^2 + \frac{1}{x}}$ ;

8)  $x + y = 9^x - 7^y$ ;

9)  $y = \lg \ln \operatorname{ctg} x$ ;

10)  $y = \frac{\cos^2 18x}{\sin 36x}$ ;

11)  $y = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$ ;

12)  $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$ ;

13)  $y = \arcsin e^{-\frac{5}{2}x}$ .

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a) 
$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x = \cos t + \sin t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

### Варіант 19

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \sqrt[4]{\frac{1+x^3}{1-x^2}};$

2)  $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 2x};$

3)  $y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt[3]{x};$

4)  $y = (\sin 8x)^x;$

5)  $y^3 = x + e^x;$

6)  $y^7 + = 19 x^{19} - \cos y;$

7)  $y = 2e^{\frac{x}{2}} \arctg e^{\frac{x}{2}};$

8)  $y = \log_9 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

9)  $y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{9x^2};$

10)  $y = \frac{\sin^2 19x}{\cos 38x};$

11)  $y = \frac{4 + \sqrt{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{4 - \sqrt{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}};$

12)  $y = (\arctg x)^x;$

13)  $y = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} \right) \arctg x.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a) 
$$\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \cos t; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \arctg t. \end{cases}$$

### Варіант 20

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}};$

2)  $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x};$

3)  $y = (x - x^2)^x;$

4)  $y = \cos 2x - 2 \sin^2 x;$

5)  $x \operatorname{tg} y - y \operatorname{ctg} x = 1;$

6)  $x^3 + 2^x - \ln y = \pi;$

7)  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+5}};$

8)  $y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2};$

$$9) \quad y = \sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$10) \quad y = \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x};$$

$$11) \quad y = \frac{2x-5}{4} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}};$$

$$12) \quad y = (2^x + 5)^{\ln x};$$

$$13) \quad y = \frac{1}{4} \log_8 \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = 3e^{-t}; \\ y = e^{2t}; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 6 \cos^2 t; \\ y = 9 \sin^3 t. \end{cases}$$

### Варіант 21

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1};$$

$$2) \quad y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x;$$

$$3) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x-2}};$$

$$4) \quad y = (\cos x)^{x^2};$$

$$5) \quad x - y + e^y = 0;$$

$$6) \quad y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2};$$

$$7) \quad \arccos(xy) = x^4;$$

$$8) \quad y = \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$9) \quad y = \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x};$$

$$10) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - 23;$$

$$11) \quad y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4};$$

$$12) \quad y = \frac{2}{3} (4x^2 - 4x + 3) \frac{7}{x^8};$$

$$13) \quad y = (\sin \sqrt{x})^x.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = t^3 - 8t; \\ y = t^5 + 2t; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 2 \operatorname{ctg} t; \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

### Варіант 22

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt[5]{x^2 + x + \frac{1}{x}};$$

$$2) \quad y = 2^x e^{-x};$$

$$3) \quad y = (\cos x)^x;$$

$$4) \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$5) \quad \ln y = \arctg\left(\frac{x}{6}\right);$$

$$6) \quad 4^{x+y} = 2x + 2^y;$$

$$7) \quad y = 3e^x \left( \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right);$$

$$8) \quad y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}};$$

$$9) \quad y = \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x};$$

$$10) \quad y = \log_7 \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}};$$

$$11) \quad y = \frac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} 6^{2x};$$

$$12) \quad y = x^{ctgx};$$

$$13) \quad y = \frac{3}{\sqrt[9]{x^7}} - 2 \operatorname{ctg} x - 3 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = 2t - t^3; \\ y = 3t^2; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

### Варіант 23

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}};$$

$$2) \quad y = \ln \sqrt{1 + \sin x};$$

$$3) \quad y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x);$$

$$4) \quad y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$5) \quad x - y + \sin y = 0;$$

$$6) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}};$$

$$7) \quad y = \frac{\sin^2 23x}{\cos 46x};$$

$$8) \quad y = -x \arcsin \sqrt{1 - x^2};$$

$$9) \quad y = \frac{2}{\sin x} - \frac{5}{2} \arctg \sin x;$$

$$10) \quad y = x^{\cos x};$$

$$11) \quad y = \log_7 \left( e^{4x} + \sqrt{e^{2x} - 1} \right);$$

$$12) \quad y = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}};$$

$$13) \quad \cos(x-y) + 2^{xy} = 9.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2}; \\ y = t - \sin t; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t^3 - 8t; \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$$

## Варіант 24

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$

2)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x;$

3)  $y = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1-x^2});$

4)  $y = (x + x^2)^x;$

5)  $x^2 + y^3 - xy = 0;$

6)  $y = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{\cos x}\right);$

7)  $y = x^{\sin x};$

8)  $y = \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x};$

9)  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \arccos \sqrt{x} - \frac{8}{3};$

10)  $3^{x-y} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}};$

11)  $y = x(\arcsin x)^2 + 2\pi;$

12)  $y = \frac{1}{3 \sin^2 x \cos x};$

13)  $y = \log_8(5x + \sqrt{35x^2 + 1}).$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = t + \cos t; \\ y = t - \sin t; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = 3 \cos t; \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$

## Варіант 25

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = 5\sqrt[5]{x^3 + 1};$

2)  $y = 2 \operatorname{tg}^2(x^2 + 1);$

3)  $y = 3^{\operatorname{arctg} x^3};$

4)  $y = (\arcsin x)^x;$

5)  $y^2 x = ey;$

6)  $y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}};$

7)  $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$

8)  $\arcsin(x+y) = x;$

9)  $y = \frac{\sin^{20} 25x}{\cos 50x};$

10)  $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}};$

11)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin x - \frac{\sin x}{2 \cos^2 x};$

12)  $y = \log_{23} \sqrt{-3 + 12x - 9x^2};$

14)  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = t^2 + t + 1; \\ y = 2^t; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = e^t; \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

### Варіант 26

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}};$

2)  $y = \frac{x \ln x}{x-1};$

3)  $y = (\arctg x)^{\ln x};$

4)  $y = (x+8)^x;$

5)  $(e^x + 1)(e^y - 1) - 1 = 0;$

6)  $y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}};$

7)  $y = \operatorname{arcctg}(e^x - e^{-x});$

8)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$

9)  $y = \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x};$

10)  $y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2};$

11)  $x^9 + y^8 = x^2 \ln x;$

12)  $y = (3x+1)^4 \sin \frac{1}{3x+1};$

13)  $x^y + y^x = x^2 - y^3.$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

a)  $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \ln 2t^2; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$

### Варіант 27

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

1)  $y = \frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}};$

2)  $y = \sin x - x \cos x;$

3)  $y = \operatorname{ctgx} \ln x;$

4)  $y = x^{\operatorname{tg} x};$

5)  $x = \operatorname{arctg} xy;$

6)  $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1};$

7)  $y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \left( \sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} \right);$

8)  $y = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{x};$

9)  $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{4} \arccos x;$

10)  $y = \frac{\sin^2 27x}{\cos 50x};$

$$11) \quad y = \arcsin 2x + \frac{1}{6} \ln(1 - 4x^2);$$

$$12) \quad y = (\ln x)^{\sin x};$$

$$17) \quad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{8}{x^6}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = 2t^3 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \arccos t; \\ y = et. \end{cases}$$

### Варіант 28

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}};$$

$$2) \quad y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$3) \quad y = x^{\ln x};$$

$$4) \quad y = \arcsin \sqrt{1-3x};$$

$$5) \quad y \sin x = \cos(x-y);$$

$$6) \quad y = \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1-x^2}};$$

$$7) \quad y = -\frac{e^{3x}}{3\sin^2 x};$$

$$8) \quad y = \ln \sin \frac{1}{x};$$

$$9) \quad y = \arcsin 2x + \frac{1}{3} \ln(1-4x^2);$$

$$10) \quad y = \frac{\cos^2 28x}{\sin 56x};$$

$$11) \quad y = (x^5 + 7)^x;$$

$$12) \quad x - \cos y + \sin x = 0;$$

$$13) \quad y = \frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + \arccos \frac{x}{2}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 2t^3 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

### Варіант 29

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = x^2 \sqrt{1-x^2};$$

$$2) \quad y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x};$$

$$3) \quad \frac{3}{y} = \operatorname{arctg} e^{2x};$$

$$4) \quad y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$5) \quad x - y + \operatorname{arctg} y = 0;$$

$$6) \quad y = \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7};$$

$$7) \quad y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$8) \quad y = x^{29} 29^x;$$

$$9) \quad y = \ln \ln \sin \left( 1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$10) \quad y = \frac{\sin^2 29x}{\cos 58x};$$

$$11) \quad y = \frac{1}{2} e^x (x^6 + 2x^2 + 2);$$

$$12) \quad y = (x + 2\sqrt{x} + 2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[5]{x}}{2};$$

$$13) \quad y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin^3 t; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = t + \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

### Варіант 30

I. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$ :

$$1) \quad y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$2) \quad y = (e^{\cos x} + 3)^2;$$

$$3) \quad y = \ln \sin(2x+5);$$

$$4) \quad y = x^x;$$

$$5) \quad \operatorname{tgy} + x^3 = 5x;$$

$$6) \quad y = \ln \ln^2 x;$$

$$7) \quad y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2);$$

$$8) \quad y = (\cos 2x) \frac{\ln \cos 2x}{4};$$

$$9) \quad y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}};$$

$$10) \quad y = \frac{\cos^2 30x}{\sin 60x};$$

$$11) \quad y = \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x);$$

$$12) \quad y = (\sin x)^x;$$

$$13) \quad \sin(xy) + 2^x = \frac{1}{x}.$$

II. Знайти похідні  $\frac{dy}{dx}$  та другі похідні  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$a) \quad \begin{cases} x = 2t^3 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} x = \arccos t; \\ y = et. \end{cases}$$

## Практичне заняття 6

### Тема: Застосування похідної

**Мета:** ознайомити із застосуваннями похідної, а саме з рівняннями дотичної та нормалі до графіка функції, з правилом Лопіталя, з можливостями дослідження функції; дати схему повного дослідження функції і побудови її графіка.

**Рівняння дотичної** до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (6.1)$$

Рівняння дотичної до графіка параметрично заданої функції  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  в точці,

що відповідає параметру  $t_0$ :

$$y - y_0 = y'_x(t_0) \cdot (x - x_0) \quad (6.2)$$

**Рівняння нормалі** до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (6.3)$$

Рівняння нормалі до графіка параметрично заданої функції  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  в точці,

що відповідає параметру  $t_0$ :

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - x_0) \quad (6.4)$$

**Приклад 6.1** Який кут утворює з віссю  $Ox$  дотична до кривої  $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ , проведена в точці з абсцисою  $x = 1$ ?

**Розв'язання.** Знаходимо похідну  $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$ ; при  $x = 1$ ,  $y' = 3$ , таким чином  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ , звідки  $\alpha = \arctg 3 \approx 71^\circ 34'$ .

**Приклад 6.2.** Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{x^2 + 2}{x}$$

**Розв'язання.**

- 1) Область визначення функції:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- 2) Перевіримо функцію на парність, непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{(-x)} = \frac{x^2 + 2}{-x} = -\frac{x^2 + 2}{x} = -f(x)$$

Функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку системи координат.

- 3) Точок перетину з віссю  $Ox$  і з віссю  $Oy$  немає.
- 4) В точці  $x=0$  функція має розрив.  
Односторонні границі зліва та справа від точки розриву:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 + 2}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 + 2}{x} = +\infty.$$

- 5) Враховуючи пункт 4, маємо, що вертикальна асимптота  $x=0$ .  
Знайдемо похилу асимптоту  $y = kx + b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1} = 1;$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 2 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Отже, похила асимптота  $y = x$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Знайдемо горизонтальну асимптоту  $y = b$ :

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x + \frac{2}{x} \right) = \infty$$

Маємо, що горизонтальна асимптота відсутня.

- 6) Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо похідну  $f'(x)$  і розв'яжемо рівняння  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 2}{x^2} = 0$$

Звідси  $x^2 - 2 = 0, x \neq 0, x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4$ .

Запишемо критичні точки та інтервали, на які вони поділяють область визначення функції в таблицю 1 (в перший рядок). Визначимо знак  $f'(x)$  в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо характер монотонності функції.

Таблиця 1

|         |                        |             |                     |          |                     |            |                       |
|---------|------------------------|-------------|---------------------|----------|---------------------|------------|-----------------------|
| $x$     | $(-\infty; -\sqrt{2})$ | $-\sqrt{2}$ | $(-\sqrt{2}; 0)$    | 0        | $(0; \sqrt{2})$     | $\sqrt{2}$ | $(\sqrt{2}; +\infty)$ |
| $f'(x)$ | +                      | 0           | –                   | не існує | –                   | 0          | +                     |
| $f(x)$  | зростає $\uparrow$     | max         | спадає $\downarrow$ | не існує | спадає $\downarrow$ | min        | зростає $\uparrow$    |

Отже, екстремуми функції:  $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2,8$ ;

$$y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2,8.$$

- 7) Знайдемо критичні точки другого роду. Для цього знайдемо другу похідну  $f''(x)$  і розв'яжемо рівняння  $f''(x) = 0$ :

$$f''(x) = \left( \frac{x^2 - 2}{x^2} \right)' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3};$$

$$\frac{4}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$$

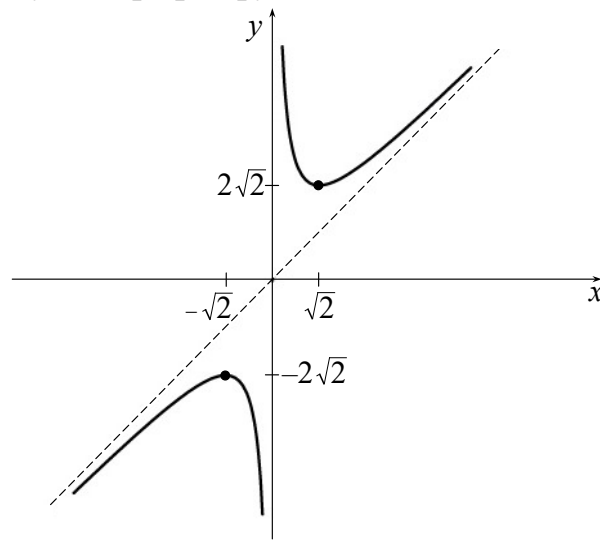
Маємо одну критичну точку другого роду  $x = 0$ , проте ця точка не входить в область визначення. Інших критичних точок другого роду немає. Таким чином, точок перегину немає.

Таблиця 2

|          |                |          |                |
|----------|----------------|----------|----------------|
| $x$      | $(-\infty; 0)$ | 0        | $(0; +\infty)$ |
| $f''(x)$ | –              | не існує | +              |
| $f(x)$   | опукла $\cap$  | не існує | угнута $\cup$  |

Так як критичних точок, що входять в область визначення немає, то запишемо тільки інтервали області визначення функції в таблицю 2 (в перший рядок). Знайдемо знак  $f''(x)$  в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо опуклість та угнутість функції.

- 8) Побудуємо в системі координат пунктирною лінією похилу асимптоту  $y = x$  (асимптота  $x = 0$  є віссю  $Oy$ ) і відмітимо точки  $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2,8$ ,  $y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2,8$ . Враховуючи асимптоти, інтервали зростання та спадання, опуклості та угнутості, через відмічені точки побудуємо графік функції.



**Приклад 6.3.** Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = xe^{-\frac{x}{2}}$$

**Розв'язання.**

- 1) Область визначення функції:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- 2) Перевіримо функцію на парність, непарність:

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{-\frac{(-x)}{2}} = -x \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

Так як не виконується жодна з умов  $f(-x) = f(x)$ ,  $f(-x) = -f(x)$ , то графік функції не має ні осі, ні центра симетрії.

- 3) Функція перетинає осі координат в точці  $(0,0)$ .
- 4) Функція неперервна на всій числовій осі.
- 5) Так як точок розриву немає, то вертикальної асимптоти немає. Знайдемо похилу асимптоту  $y = kx + b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{-x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{-x}{2}} = \begin{cases} 0, & x \rightarrow +\infty \\ \infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Отже, при  $x \rightarrow -\infty$  похилої асимптоти немає, а при  $x \rightarrow +\infty$  похила асимптота перетворюється в горизонтальну  $y = b$ :

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{x}{e^2}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

Скористаємось правилом Лопітала:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{x}{e^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}e^2} = 0.$$

Отже, горизонтальна асимптота  $y = 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

При  $x \rightarrow -\infty$  горизонтальної асимптоти немає:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = \infty$$

6) Знайдемо критичні точки першого роду:

$$f'(x) = e^{\frac{-x}{2}} + x \cdot \left( -\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \right) = e^{\frac{-x}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x \right), \quad e^{\frac{-x}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x \right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x = 0, \quad e^{\frac{-x}{2}} \neq 0 \text{ ні при якому } x, \text{ тобто, } x=2.$$

Отже, маємо одну критичну точку:  $x = 2$ , яка поділяє область визначення  $(-\infty; +\infty)$  на два інтервали (Таблиця 3):

Таблиця 3

| $x$     | $(-\infty; 2)$     | 2   | $(2; +\infty)$      |
|---------|--------------------|-----|---------------------|
| $f'(x)$ | +                  | 0   | –                   |
| $f(x)$  | зростає $\uparrow$ | max | спадає $\downarrow$ |

Екстремум функції:  $y_{\max} = f(2) = \frac{2}{e} \approx 0,7$ .

7) Знайдемо критичні точки другого роду:

$$f''(x) = \left( e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x \right) \right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x \right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \left( 2 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \left( 2 - \frac{1}{2}x \right) = 0$$

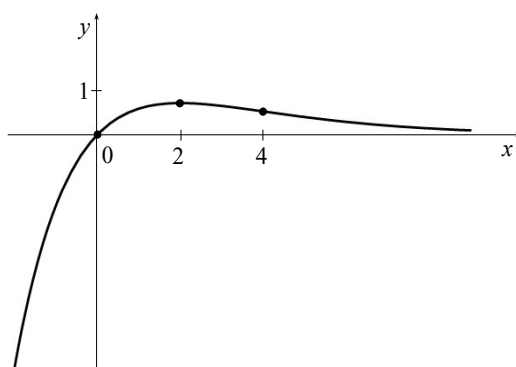
$$2 - \frac{1}{2}x = 0, \quad e^{-\frac{x}{2}} \neq 0 \text{ ні при якому } x, \text{ тобто, } x = 4.$$

Таблиця 4

| $x$      | $(-\infty; 4)$ | 4       | $(4; +\infty)$ |
|----------|----------------|---------|----------------|
| $f''(x)$ | –              | 0       | +              |
| $f(x)$   | опукла $\cap$  | перегин | угнута $\cup$  |

$$y_{\text{перегину}} = f(4) = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

- 8) Горизонтальною асимптотою  $y = 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  є додатна піввісь  $Ox$ . Відмітимо в системі координат точки  $y_{\max} = f(2) \approx 0,7$  і  $y_{\text{перегину}} = f(4) \approx 0,5$ . Враховуючи асимптоту, інтервали зростання та спадання, опуклості та угнутості, через відмічені точки побудуємо графік функції.



### Теоретичні запитання

1. Сформулюйте правило Лопіталю.
2. Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функцій.
3. Сформулюйте означення максимуму та мінімуму функції.
4. Яка необхідна умова існування екстремуму.
5. Яка достатня умова існування екстремуму.
6. Як знаходять асимптоти?

7. Дайте схему повного дослідження функції та побудови графіка.
8. Дайте означення диференціалу функції.
9. Запишіть формулу застосування диференціалу для наближених обчислень?
10. Що називається дотичною до графіка функції та яке її рівняння?
11. Що називається нормаллю до графіка функції та яке її рівняння?

### Завдання для самостійної роботи

Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

$$1. y = \frac{3x^4 + 1}{x^3} \quad 2. y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 - 25}$$

### Індивідуальні завдання

Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

| Варіант   | Функція                                  | Варіант   | Функція                                   | Варіант   | Функція                               |
|-----------|------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------|-----------|---------------------------------------|
| <b>1</b>  | $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$                | <b>2</b>  | $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$           | <b>3</b>  | $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$              |
| <b>4</b>  | $y = \frac{4x^2}{16 - x^2}$              | <b>5</b>  | $y = \frac{12x}{9 + x^2}$                 | <b>6</b>  | $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$      |
| <b>7</b>  | $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$         | <b>8</b>  | $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$          | <b>9</b>  | $y = \frac{9x^3 + 1}{x^2}$            |
| <b>10</b> | $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$              | <b>11</b> | $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$               | <b>12</b> | $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$  |
| <b>13</b> | $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 - 25}$         | <b>14</b> | $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x - 15}$ | <b>15</b> | $y = \frac{-8x}{x^2 - 4}$             |
| <b>16</b> | $y = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2$ | <b>18</b> | $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$                | <b>19</b> | $y = \frac{4x}{(x + 1)^2}$            |
| <b>19</b> | $y = 8 \frac{(x - 1)}{(x + 1)^2}$        | <b>20</b> | $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$                | <b>21</b> | $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$          |
| <b>22</b> | $y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$  | <b>23</b> | $y = \frac{1}{x^4 - 1}$                   | <b>24</b> | $y = -\left(\frac{x}{x + 2}\right)^2$ |
| <b>25</b> | $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$               | <b>26</b> | $y = \frac{4(x + 1)^2}{x^2 + 2x - 3}$     | <b>27</b> | $y = \frac{3x - 2}{x^3}$              |
| <b>28</b> | $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 1)^2}$     | <b>29</b> | $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$          | <b>30</b> | $y = 8 \frac{(x - 1)}{(x + 1)^2}$     |

## РОЗДІЛ IV

### Диференціальне числення функцій кількох змінних

#### Практичне заняття 7

**Тема:** Диференціальне числення функцій кількох змінних

**Мета:** ознайомити із поняттям функції багатьох незалежних змінних, її області визначення; навчити шукати часткові похідні таких функцій та використовувати їх для написання рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, похідної за напрямом та градієнта.

#### Функція двох незалежних змінних

##### Означення 7.1.

Якщо кожній парі  $(x, y)$  значень двох незалежних одна від одної змінних величин  $x$  і  $y$  з деякої області  $D$  відповідає певне значення величини  $z$ , тоді величина  $z$  є **функцією двох незалежних змінних**  $x$  і  $y$ , яка визначена в області  $D$ . Позначається така функція:

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

**Приклад 7.1.** Знайти область визначення функції  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

**Розв'язання.** Область визначення даної функції така, що підкореневий вираз набуває тільки невід'ємні значення, тобто,  $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$  – це круг із центром у точці  $(0;0)$  і радіусом 2, що включає і його границю – коло  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Приклад 7.2.** Знайти та зобразити на рисунку область визначення функції:

$$z = \frac{\ln(4 - y - x^2)}{xy}.$$

**Розв'язання.** Логарифмічна функція визначена тільки при додатних значеннях аргументу, тому  $4 - y - x^2 > 0$ , або  $y > 4 - x^2$ . Отже, границею області буде парабола  $y = 4 - x^2$ .

Крім того, знаменник не має бути рівним нулю, тому  $xy \neq 0$ , або  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ . Таким чином, область визначення функції складається з точок, які розташовані нижче (всередині) параболи  $y = 4 - x^2$ , за винятком прямих  $x = 0$ ,  $y = 0$  (Рисунок 7.1).

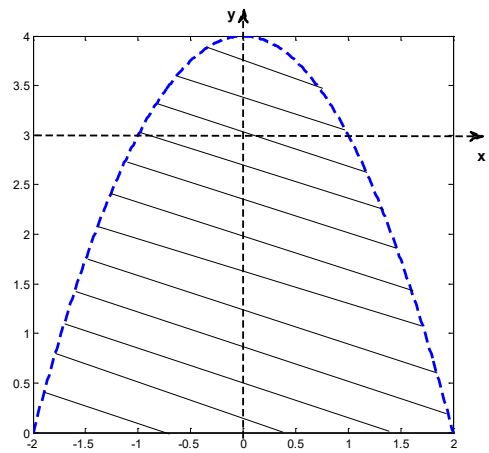


Рис. 7.1

**Приклад 7.3.** Знайти та зобразити на рисунку область визначення функції:

$$z = \sqrt{y - x + 2} + \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

**Розв'язання.** Область визначення цієї функції визначимо із системи нерівностей:

$$\begin{cases} y - x + 2 \geq 0, \\ -1 \leq \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \geq x - 2, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \geq -4. \end{cases}$$

Графічним образом нерівності  $y \geq x - 2$  є півплощина, розміщена над цією прямою. Нерівність  $x^2 + y^2 \leq 4$  визначає в площині круг із центром в початку координат і радіусом 2. Остання нерівність не визначає ніякого геометричного об'єкта. Перетин цих множин є областю визначення даної функції. Шукана множина є обмеженою і замкненою (Рисунок 7.2).

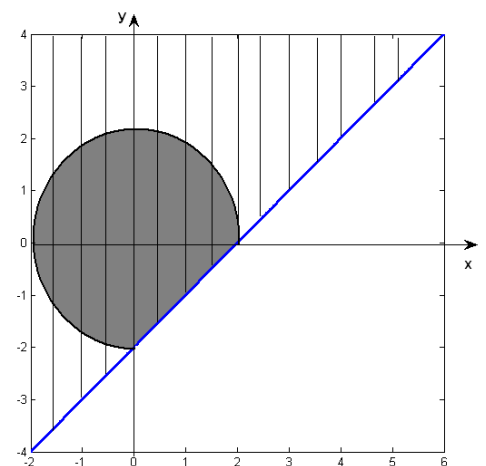


Рис. 7.2

## Диференціювання функції кількох змінних

### Означення 7.2.

Якщо існує границя  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$  (що не дорівнює нескінченності), яка не залежить від способу прямування  $\Delta x \rightarrow 0$ , тоді ця границя називається **частинною похідною (першого порядку)** функції  $z = f(x, y)$  по незалежній змінній  $x$  і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ або } z'_x, \text{ або } f'_x(x, y), \text{ або } f'_x.$$

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній  $y$ :  $z'_y$ .

Так само визначаються частинні похідні функції трьох і більшого числа змінних.

Обчислення частинних похідних функції кількох змінних здійснюється як для функції однієї незалежної змінної, причому вважають всі незалежні змінні, крім тої по якій диференціюють, постійними величинами.

**Приклад 7.4.** Знайти частинні похідні функції  $f(x, y) = 4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6$  у точці  $M(2;3)$ .

**Розв'язання.**  $f'_x(x, y) = 8xy + 5y^3 - 3$ ,  $f'_x(M) = 8 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3 - 3 = 180$ ,

$$f'_y(x, y) = 4x^2 + 15xy^2 + 2, f'_y(M) = 8 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 = 288.$$

**Приклад 7.5.** Знайти частинні похідні функції  $z = x^y$  ( $x > 0$ ).

**Розв'язання.** Похідна степеневої функції від  $x$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ .

Похідна показникової функції від  $y$ :  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ .

### Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні другого порядку є частинними похідними від похідних першого порядку.

**Приклад 7.6** Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаному рівнянню

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**Розв'язання.** Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків заданої функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \sin \frac{y}{x} \right)'_x = \cos \frac{y}{x} \cdot \left( -\frac{y}{x^2} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \sin \frac{y}{x} \right)'_y = \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( -\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right)'_x = \frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left( -\frac{y}{x^2} \right) \sin \frac{y}{x} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = \frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left( \frac{y}{x^2} \right)^2 \sin \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} \right)'_y = -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left( -\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right)'_y = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \left( -\frac{y}{x^2} \right) \left( -\sin \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

Підставляємо знайдені частинні похідні в ліву частину заданого рівняння і отримуємо:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 \left( \frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left( \frac{y}{x^2} \right)^2 \sin \frac{y}{x} \right) + \\ &+ 2xy \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x} \right) + y^2 \left( -\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} \right) = \\ &= \frac{2y}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{2y}{x} \cos \frac{y}{x} + \frac{2y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x} = 0. \end{aligned}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаному рівнянню.

### Дотична площина і нормаль до поверхні

#### Означення 7.3.

Якщо на поверхні через деяку точку  $M_0$  провести кілька кривих і до них у цій точці провести дотичні прямі, то всі вони будуть лежати в одній площині, яка називається **дотичною площиною** до поверхні у точці  $M_0$ , а перпендикуляр до дотичної площини, який виходить з точки дотику  $M_0$ , називається **нормаллю до поверхні**.

- 1) Якщо поверхня задана рівнянням в явній формі  $z = f(x, y)$ , тобто розв'язаним відносно  $Z$ , а точка дотику має координати  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , тоді:

**рівняння дотичної площини** має вигляд:

$$(x-x_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} + (y-y_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} - (z-z_0) = 0;$$

**рівняння нормалі до поверхні у точці  $M_0$ :**

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

2) Якщо поверхня задана рівнянням у неявній формі  $F(x, y, z) = 0$ , тобто нерозв'язаним відносно  $Z$ , тоді

**рівняння дотичної площини** має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{M_0} \cdot (x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{M_0} \cdot (y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{M_0} \cdot (z-z_0) = 0$$

**рівняння нормалі до поверхні у точці  $M_0$ :**

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{M_0}}.$$

**Приклад 7.7.** Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні  $Q$  в точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , якщо  $Q: z = 2x^2 - 3xy + x + 5y$ ;  $M_0(1; 2; 7)$ .

**Розв'язання.** Рівняння поверхні  $Q$  задано в явній формі  $z = f(x, y)$ , отже рівняння дотичної площини в точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  має вигляд:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0),$$

а рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{(y-y_0)}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Знайдемо частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  та їх значення в точці  $M_0(1; 2; 7)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y + 1; \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = 4 - 6 + 1 = -1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 5; \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = -3 + 5 = 2.$$

Підставляємо знайдені значення в рівняння дотичної площини та нормалі та отримуємо:

$$z-7=-(x-1)+2(y-2) \text{ або } x-2y+z-4=0 \text{ – рівняння дотичної площини;}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

**Приклад 7.8.** Записати рівняння дотичної площини і нормалі до параболоїда обертання  $z = x^2 + y^2$  у точці  $M_0(1, -1, 2)$ .

**Розв’язання.**  $z'_x = 2x, z'_y = 2y, z'_x(1, -1, 2) = 2, z'_y(1, -1, 2) = -2$

**Розв’язання.**

Скориставшись формулами, отримаємо:

$$z-2=2(x-1)-2(y-1) \text{ або } 2x-2y-z-2=0 \text{ – рівняння дотичної площини;}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

### Похідна за напрямом

**Означення 7.4.**

**Похідна** від функції  $u = f(x, y, z)$  за напрямом  $\vec{l}$  характеризує швидкість зміни

функції за цим напрямом і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{l}, Ox) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{l}, Oy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{l}, Oz).$$

**Приклад 7.9.** Знайти похідну функції  $f(x, y) = x^3 - y^3$  у точці  $M(1;1)$  за напрямом вектора  $\vec{l} = (1, \sqrt{3})$ .

**Розв’язання.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2;$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = 3 \cdot 1 = 3; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M = -3 \cdot 1 = -3.$$

Враховуючи  $\vec{l} = (l_1, l_2) = (1; \sqrt{3})$ , маємо

$$\cos(\vec{l}, Ox) = \frac{l_1}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos(\vec{l}^\wedge, Oy) = \frac{l_2}{|\vec{l}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \right|_M = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

### Градiєнт функції

#### Означення 7.5.

Градiєнтом функції  $u = f(x, y, z)$  називається вектор, який показує напрямок найбільшого зростання функції і проєкціями якого на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  є відповідно  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ :

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

**Приклад 7.10.** Знайти градiєнт функції  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$  у точці  $M(1;1)$ .

#### Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = 5; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M = 4;$$

$$\text{grad } f \Big|_M = 5\vec{i} + 4\vec{j}.$$

### Теоретичні запитання

1. Що називається функцією багатьох змінних, зокрема, двох змінних?
2. Який геометричний зміст функції двох змінних та її області визначення?
3. Що називається функцією трьох змінних та її областю визначення?
4. Як визначаються частинні похідні?
5. Сформулюйте правила знаходження частинних похідних функції кількох змінних.
6. В чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
7. Що називається повним диференціалом функції?
8. В чому полягає правило застосування повного диференціалу для наближених обчислень значень функції?

9. Як знаходиться рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в даній точці?
10. Що називається похідною функції в даній точці за даним напрямом? Запишіть формулу її обчислення.
11. Що називається градієнтом та як він обчислюється?

### Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 + y)$
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = e^{xy}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$  в точці  $A(2, 1, 3)$ .
4. Для функції  $z = x^2 + xy^2 - y^3$  знайти градієнт в точці  $A(1, -2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-5, -8)$ .

### Індивідуальні завдання

#### Варіант 1

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{x + y} + \frac{1}{x - y^2}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \ln(x^2 + e^{-2y})$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = x^2 + 2y^2$  в точці  $A(-1, 1, 3)$ .
4. Для функції  $u = 5x^2y - 3xy + z^3$  знайти градієнт в точці  $M_1(3, -1, 0)$  та похідну в точці  $M_0(1, 2, -1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

#### Варіант 2

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \sqrt[3]{2x^3 - \ln y}$ .

- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 2x^2 + 4y^2$  в точці  $A(2, -1, 4)$ .
- Для функції  $u = \ln(x^2 + 3y - 2z^2)$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 1, 3)$  та похідну в точці  $M_0(4, 2, 0)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 3

- Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln xy + \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$ .
- Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \lg(y^3 - 3x^2)$ .
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  в точці  $A(1, 0, \sqrt{3})$ .
- Для функції  $u = \ln(3x - 4y^2 + 2z^2)$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, -1, 4)$  та похідну в точці  $M_0(1, 0, 3)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 4

- Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 + y^2 - R^2) + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = 2^{y^3 - 2x^2}$ .
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$  в точці  $A(3, -4, 6)$ .
- Для функції  $u = \ln(4xy + yz)$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 0, -3)$  та похідну в точці  $M_0(3, -1, -1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 5

- Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \frac{1}{\sqrt{y}} + \ln\left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right)$ .
- Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \text{ctg}(y^2 - 2x^3)$ .
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sqrt{10 - 2x^2 - y^2}$  в точці  $A(0, 1, 3)$ .

4. Для функції  $u = \ln(xz^2 - y + 3z)$  знайти градієнт в точці  $M_1(3, -4, -1)$  та похідну в точці  $M_0(2, -2, 1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 6

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{y - x^2} + \frac{1}{x + y}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \sin(x^2 - 2y^3)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 4 - x^2 - 3y^2$  в точці  $A(-1, -1, 0)$ .
4. Для функції  $u = xyz + 3yz + z^2 - 4x$  знайти градієнт в точці  $M_1(-1, 2, -3)$  та похідну в точці  $M_0(1, 0, -2)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 7

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 - y^2) + \sqrt{x - y^2}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \cos(e^{-x} + y^3)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 1 - 3x^2 + y^2$  в точці  $A(1, 0, -2)$ .
4. Для функції  $u = \arctg \frac{x^2 + yz}{x}$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 0, 3)$  та похідну в точці  $M_0(1, 1, 1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 8

1. Знайти область існування функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x + 2y - 1)$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \ln(x^3 - \sin y)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$  в точці  $A(1, 0, \sqrt{3})$ .
4. Для функції  $u = \arctg \frac{x}{y + z}$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 4, 5)$  та похідну в точці  $M_0(1, 2, 3)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0M_1}$ .

### Варіант 9

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції

$$z = \sqrt{x - \sqrt{y}} + \frac{1}{x^2 - y + 1}.$$

2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \sqrt[4]{2x^3 - \sin y}$ .

3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = -xy + 2$  в точці  $A(1, -1, 3)$ .

4. Для функції  $u = \sqrt{2x^2 + y^2 + 3z^2}$  знайти градієнт в точці  $M_1(-1, -2, 1)$  та похідну в точці  $M_0(1, 0, -1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 10

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції

$$z = \ln(y - x) + \frac{1}{xy - 1}.$$

2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = e^{\sin 2x + y^3}$ .

3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = -1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  в точці  $A(-3, 4, -6)$ .

4. Для функції  $u = \sqrt{x^2 + 3y^2 - z^2}$  знайти градієнт в точці  $M_1(4, 0, -1)$  та похідну в точці  $M_0(2, 3, 1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 11

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = e^{3x} \cos 2y$ .

3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  в точці  $A(1, 0, \sqrt{3})$ .

4. Для функції  $z = x^2 + 2xy + y^2$  знайти градієнт в точці  $A(1, 2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\overline{a(3, 4)}$ .

### Варіант 12

1. Знайти та відобразити на рисунку область існування функції

$$z = \ln(y^2 - 4x + 8)$$

2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sin x \cdot \cos x$  в точці  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .
4. Для функції  $z = 2xy - y^3 + x^2$  знайти градієнт в точці  $A(-1, 2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-3, 4)$ .

### Варіант 13

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 5)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \sqrt{2xy + y^2}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = e^{x \cos y}$  в точці  $A\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$ .
4. Для функції  $z = \ln(x^2 - y^2)$  знайти градієнт в точці  $A(2, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(3, -4)$ .

### Варіант 14

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x + y)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  в точці  $A\left(\frac{\pi}{2}, 2, 2\right)$ .
4. Для функції  $z = \ln(xy^2 + 1)$  знайти градієнт в точці  $A(1, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-3, -4)$ .

### Варіант 15

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \sin(xy)$ .

3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  в точці  $A\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ .
4. Для функції  $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$  знайти градієнт в точці  $A(-2, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(5, 8)$ .

#### Варіант 16

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = x + \arccos y$
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 4x - xy + y^2$  в точці  $A(1, -1, 6)$ .
4. Для функції  $z = x^3 - 2xy + y^2$  знайти градієнт в точці  $A(-2, -1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-5, 8)$ .

#### Варіант 17

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 + y)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = e^{xy}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$  в точці  $A(2, 1, 3)$ .
4. Для функції  $z = x^2 + xy^2 - y^3$  знайти градієнт в точці  $A(1, -2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-5, -8)$ .

#### Варіант 18

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$  в точці  $A(2, 2, 1)$ .
4. Для функції  $z = 2x^2 + y^2 x - 4y$  знайти градієнт в точці  $A(2, 2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(5, -8)$ .

### Варіант 19

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \arcsin \frac{y}{x}$ .
2. Показати, що функція  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  задовольняє рівнянню Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .
3. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = xy + 2y^2 - 2x$  в точці  $A(1, 2, 8)$ .
4. Для функції  $z = 13 \ln(x^3 y^2 + 1)$  знайти градієнт в точці  $A(1, -1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\overline{a}(5, -12)$ .

### Варіант 20

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 - y^2) + \sqrt{x - y^2}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \cos(e^{-x} + y^3)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 1 - 3x^2 + y^2$  в точці  $A(1, 0, -2)$ .
4. Для функції  $u = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + yz}{x}$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 0, 3)$  та похідну в точці  $M_0(1, 1, 1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 21

1. Знайти область існування функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x + 2y - 1)$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \ln(x^3 - \sin y)$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$  в точці  $A(1, 0, \sqrt{3})$ .
4. Для функції  $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y + z}$  знайти градієнт в точці  $M_1(2, 4, 5)$  та похідну в точці  $M_0(1, 2, 3)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 22

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{x - \sqrt{y}} + \frac{1}{x^2 - y + 1}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = \sqrt[4]{2x^3 - \sin y}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = -xy + 2$  в точці  $A(1, -1, 3)$ .
4. Для функції  $u = \sqrt{2x^2 + y^2 + 3z^2}$  знайти градієнт в точці  $M_1(-1, -2, 1)$  та похідну в точці  $M_0(1, 0, -1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 23

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(y - x) + \frac{1}{xy - 1}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = e^{\sin 2x + y^3}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = -1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  в точці  $A(-3, 4, -6)$ .
4. Для функції  $u = \sqrt{x^2 + 3y^2 - z^2}$  знайти градієнт в точці  $M_1(4, 0, -1)$  та похідну в точці  $M_0(2, 3, 1)$  у напрямі вектора  $\overline{M_0 M_1}$ .

### Варіант 24

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .
2. Знайти похідну  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  функції  $z = e^{3x} \cos 2y$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  в точці  $A(1, 0, \sqrt{3})$ .
4. Для функції  $z = x^2 + 2xy + y^2$  знайти градієнт в точці  $A(1, 2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\overline{a}(3, 4)$ .

### Варіант 25

1. Знайти та відобразити на рисунку область існування функції  $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \sin x \cdot \cos x$  в точці  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .
4. Для функції  $z = 2xy - y^3 + x^2$  знайти градієнт в точці  $A(-1, 2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-3, 4)$ .

### Варіант 26

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 5)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \sqrt{2xy + y^2}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = e^{x \cos y}$  в точці  $A\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$ .
4. Для функції  $z = \ln(x^2 - y^2)$  знайти градієнт в точці  $A(2, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(3, -4)$ .

### Варіант 27

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x + y)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = y \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  в точці  $A\left(\frac{\pi}{2}, 2, 2\right)$ .
4. Для функції  $z = \ln(xy^2 + 1)$  знайти градієнт в точці  $A(1, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-3, -4)$ .

### Варіант 28

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \sin(xy)$ .

3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  в точці  $A\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ .
4. Для функції  $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$  знайти градієнт в точці  $A(-2, 1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(5, 8)$ .

#### Варіант 29

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = x + \arccos y$
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = 4x - xy + y^2$  в точці  $A(1, -1, 6)$ .
4. Для функції  $z = x^3 - 2xy + y^2$  знайти градієнт в точці  $A(-2, -1)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-5, 8)$ .

#### Варіант 30

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції  $z = \ln(x^2 + y)$ .
2. Знайти похідні другого порядку від функції  $z = e^{xy}$ .
3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$  в точці  $A(2, 1, 3)$ .
4. Для функції  $z = x^2 + xy^2 - y^3$  знайти градієнт в точці  $A(1, -2)$  та похідну в цій точці у напрямі вектора  $\vec{a}(-5, -8)$ .

## РОЗДІЛ V

### Невизначений інтеграл

#### Практичне заняття 8

**Тема:** Невизначені інтеграли, методи їх обчислення

**Мета:** ознайомити із таблицею невизначених інтегралів та деякими методами обчислення інтегралів: методами безпосереднього інтегрування, інтегрування заміною змінної та частинами.

#### Первісна

##### Означення 8.1.

Функція  $F(x)$  називається **первісною** для функції  $f(x)$  на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність  $F'(x) = f(x)$  або  $dF(x) = f(x)dx$ . Процес знаходження первісної для заданої функції називається **інтегруванням**.

##### Означення 8.2.

Сукупність всіх первісних  $F(x) + C$ , де  $C$  – довільна постійна, називається

**невизначеним інтегралом** функції  $f(x)$  і позначається  $\int f(x)dx$ . Тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де  $f(x)$  – підінтегральна функція;

$f(x)dx$  – підінтегральний вираз;

$x$  (змінна, що стоїть під знаком диференціала) – змінна інтегрування.

## Таблиця основних інтегралів

|    |                                                                                                                        |     |                                                                                   |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $\int 0 \, dx = C$                                                                                                     |     | $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x  + C$                               |
| 2. | $\int dx = x + C$                                                                                                      | 9.  | $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x  + C$                               |
| 3. | $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$<br>де $n$ – будь-яке дійсне<br>число, $n \neq -1$                          | 10. | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$                              |
|    |                                                                                                                        | 11. | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$                            |
| 4. | $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$                                                                                       | 12. | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$    |
| 5. | $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$<br>де $a$ – дійсне число,<br>$a > 0, a \neq 1$<br>$\int e^x \, dx = e^x + C$ | 13. | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} $                |
|    |                                                                                                                        | 4.  | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$ |
| 6. | $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$                                                                                      | 15. | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$                      |
| 7. | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$                                                                                       | 16. | $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$   |

## Методи інтегрування

### І. Метод безпосереднього інтегрування

Метод полягає в тому, що заданий інтеграл за допомогою властивостей невизначеного інтеграла зводиться до табличних інтегралів.

**Приклад 8.1.** Знайти  $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx$

**Розв'язання.** Подамо даний інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx = \int \left( \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3 e^x}{x^3} \right) dx = \int \left( x^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{x} + e^x \right) dx =$$

$$\int x^{-\frac{8}{3}} dx - \int \frac{dx}{x} + \int e^x dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} - \ln|x| + e^x + C = -\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \ln|x| + e^x + C.$$

**Приклад 8.2.** Знайти  $\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx$ .

**Розв'язання.**  $\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx = \int \frac{x^2+1+3-3}{x^2+4} dx = \int \frac{(x^2+4)-3}{x^2+4} dx = \int dx - 3 \int \frac{dx}{x^2+4} =$

$$= x - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

## II. Метод заміни змінної

1)  $\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

В інтегралі  $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x))$  підстановку  $\varphi(x) = t$  можна робити уявно і інтегрувати за складною змінною  $\varphi(x)$ . В такому випадку метод називається **підведенням під знак диференціала**.

**Приклад 8.3.** Знайти  $\int \frac{dx}{(5x-1)^4}$ .

**Розв'язання.**  $\int \frac{dx}{(5x-1)^4} = \frac{1}{5} \int (5x-1)^{-4} 5dx = \frac{1}{5} \int (5x-1)^{-4} d(5x-1) =$

$$= \frac{1}{5} \int u^{-4} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15(5x-1)^3} + C$$

**Приклад 8.4.** Знайти  $\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx$ .

**Розв'язання.** Проведемо заміну змінної  $t = \cos 5x + 1$ , тоді  $dt = -5 \sin 5x dx$ , а  $\sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt$ .

$$\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx = \int t^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{5} \right) dt = -\frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{5} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15} t \sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{15} (\cos 5x + 1) \sqrt{\cos 5x + 1} + C$$

Запропоновані перетворення рівносильні введенню під знак диференціала функції  $\cos 5x + 1$ .

**Приклад 8.5.** Знайти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ .

**Розв'язання.** Проведемо заміну змінної  $x = t^2$ , тоді  $dx = 2t dt$ .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2 \int \frac{t dt}{t+1} = 2 \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

### III. Метод інтегрування частинами

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du,$$

$$\text{де } u = u(x), \quad v = v(x).$$

Формулу інтегрування частинами можна застосовувати декілька разів підряд.

Зміст цього методу полягає в тому, що за рахунок диференціювання функції  $u$  заданий інтеграл спрощується.

#### Інтеграли, які обчислюються методом інтегрування частинами:

|    |                                                                         |                                                                                                                   |
|----|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) | $\int P_n(x) \cdot \sin kx \, dx \quad \int P_n(x) \cdot \cos kx \, dx$ | $u = P_n(x), \quad dv = \begin{cases} \sin kx \, dx \\ \cos kx \, dx \\ a^{kx} \, dx \\ e^{kx} \, dx \end{cases}$ |
|    | $\int P_n(x) \cdot a^{kx} \, dx \quad \int P_n(x) \cdot e^{kx} \, dx$   |                                                                                                                   |

де  $P_n(x)$  – многочлен степеня  $n$ ;  $k, a$  – дійсні числа,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

**Приклад 8.6.** Знайти  $\int (2x+3) \sin 3x dx$ .

**Розв'язання.** Застосуємо формулу інтегрування частинами. Зауважимо, що при знаходженні  $v$  не має потреби дописувати „+ C”, так як довільна постійна буде додана в самому кінці розв'язання. Отже,

покладаємо  $u = 2x + 3, dv = \sin 3x dx$ , тоді  $du = 2dx$ ,  $v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x$ .

Згідно з формулою інтегрування частинами маємо:  $\int (2x + 3) \sin 3x dx = -\frac{1}{3} (2x + 3) \cos 3x + \frac{2}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} (2x + 3) \cos 3x + \frac{2}{9} \sin 3x + C$ .

|    |                                                                                                    |                                                                                                                                                                    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2) | $\int P_n(x) \cdot \arcsin kx dx \quad \int P_n(x) \cdot \arccos kx dx$                            | $u = \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \operatorname{arcctg} kx \\ \log_a kx \\ (\log_a kx)^m \end{cases} \quad dv = P_n(x) dx$ |
|    | $\int P_n(x) \cdot \operatorname{arctg} kx dx \quad \int P_n(x) \cdot \operatorname{arcctg} kx dx$ |                                                                                                                                                                    |
|    | $\int P_n(x) \cdot \log_a kx dx \quad \int P_n(x) \cdot (\log_a kx)^m dx$                          |                                                                                                                                                                    |

**Приклад 8.7.** Знайти  $\int x \ln^2 x dx$ .

**Розв'язання.** Покладаємо  $u = \ln^2 x$ ,  $dv = x dx$ , тоді  $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$ ,

$v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ . Застосувавши формулу інтегрування частинами, отримуємо:

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x^2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx.$$

Інтеграл  $\int x \ln x dx$  також знаходимо методом інтегрування частинами. Покладаємо  $u = \ln x, dv = x dx$ ,

тоді  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \frac{x^2}{2}$ , тоді

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Остаточнo маємо:  $\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$ .

|    |                                                                   |                             |
|----|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 3) | $\int a^{kx} \cdot \sin mx dx \quad \int a^{kx} \cdot \cos mx dx$ | Довільний вибір $u$ та $dv$ |
|----|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------|

В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами отримаємо знов заданий інтеграл. Тоді ліву і праву частину рівності розв'язуємо як лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

В цьому випадку не важливо який з множників беремо за  $u$ , а який за  $dv$ , головне при повторному застосуванні формули розподілити функції подібним чином, як і при першому застосуванні.

**Приклад 8.8.** Знайти  $\int e^x \sin x \, dx$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & du = (\sin x)' dx = \cos x \, dx \\ dv = e^x dx & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx \\ 2 \int e^x \sin x \, dx &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x \\ \int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} \cdot (e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x) + C \end{aligned}$$

### Теоретичні запитання

1. Дайте означення первісної функції.
2. Що називається невизначеним інтегралом? Укажіть його геометричний зміст.
3. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтегралу.
4. Напишіть таблицю основних інтегралів.
5. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
6. Сформулюйте метод заміни змінної в невизначеному інтегралі.
7. Запишіть формулу інтегрування частинами.

### Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли за допомогою таблиці інтегралів елементарних функцій та властивостей невизначеного інтегралу

1  $\int \frac{dx}{x+3}$

2  $\int 7^{\frac{x}{9}-11} dx$

3  $\int \cos \frac{5x}{6} dx$

- |    |                                                  |    |                                                                    |     |                                         |
|----|--------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------|
| 4  | $\int \frac{5dx}{8-2x}$                          | 5  | $\int e^{-6\frac{x}{3}} dx$                                        | 6   | $\int \cos(8x+1)dx$                     |
| 7  | $\int \frac{dx}{\frac{x}{9}+3}$                  | 8  | $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$                                        | 9   | $\int \cos\left(6-\frac{x}{5}\right)dx$ |
| 10 | $\int (2x+3)^7 dx$                               | 11 | $\int (4^{2x} - e) dx$                                             | 12  | $\int 6^{7x} dx$                        |
| 13 | $\int \frac{dx}{(2x+3)^7}$                       | 14 | $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{9}}$                               | 115 | $\int \frac{dx}{\sin^2(7x+6)}$          |
| 16 | $\int \sqrt[4]{(1-4x)^3} dx$                     | 17 | $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{8}}$                               | 18  | $\int \frac{dx}{\sqrt{11-x^2}}$         |
| 19 | $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-5x)^2}}$             | 20 | $\int \frac{dx}{\cos^2\left(7-\frac{x}{3}\right)}$                 | 21  | $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3x^2}}$         |
| 22 | $\int (6x-1) \cdot \sqrt{6x-1} dx$               | 23 | $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{9x}{4} + \frac{4\pi}{9}\right)}$ | 24  | $\int \frac{dx}{\sqrt{100+x^2}}$        |
| 25 | $\int \frac{5x^2-x+2}{x^2} dx$                   | 26 | $\int \frac{dx}{\sin^2(2-9x)}$                                     | 27  | $\int \frac{dx}{\sqrt{9+6x^2}}$         |
| 28 | $\int \frac{x^3-5x+2}{\sqrt[3]{x}} dx$           | 29 | $\int \left(45 + \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\right) dx$                 | 30  | $\int \frac{dx}{x^2-64}$                |
| 31 | $\int \frac{4x^2-5x+1}{x} dx$                    | 32 | $\int tg 6x dx$                                                    | 33  | $\int \frac{dx}{5x^2-18}$               |
| 34 | $\int 6^{3x} dx$                                 | 35 | $\int ctg 62x dx$                                                  | 36  | $\int \frac{10dx}{\sqrt{90+13x^2}}$     |
| 37 | $\int 5^{1-3x} dx$                               | 38 | $\int \sin \frac{x}{3} dx$                                         | 39  | $\int \frac{dx}{x^2+64}$                |
| 40 | $\int \frac{(6x+1)^2}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} dx$ | 41 | $\int 8 \cos 7x dx$                                                | 42  | $\int tg \frac{x}{9} dx$                |
| 43 | $\int \frac{(5x-4)^2}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$    | 44 | $\int \sin(5-2x) dx$                                               | 45  | $\int \frac{dx}{9x^2+100}$              |
| 46 | $\int \sin 4x dx$                                | 47 | $\int \sin\left(\frac{3x}{8} - \frac{\pi}{6}\right) dx$            | 48  | $\int tg(4-x) dx$                       |

Обчислити невизначені інтеграли методом заміни змінної

1.  $\int (3x^2 + 4)^{12} x dx$
2.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
3.  $\int (21^x + 4)^{12} 21^x dx$
4.  $\int \frac{dx}{\operatorname{arccotg}^8 7x (1 + 49x^2)}$
5.  $\int (3 \cos x + 4)^{12} \sin x dx$
6.  $\int \frac{\sqrt[11]{\log_7^8 x} dx}{x}$
7.  $\int \frac{\sqrt[11]{\operatorname{tg}^3 x} dx}{\cos^2 x}$
8.  $\int \frac{\arcsin^4(-3x) dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
9.  $\int \frac{8^{\operatorname{arctg} 5x}}{1+25x^2} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[11]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
11.  $\int \frac{3}{\operatorname{arctg} \frac{x}{5} (1 + \frac{x^2}{25})} dx$
12.  $\int \frac{\cos \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} dx$
13.  $\int \frac{x+5}{x^2+4x-10} dx$
14.  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
15.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3-e^{4x}}} dx$

Обчислити невизначені інтеграли частинами, використовуючи формулу

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1.  $\int x \cdot \cos 3x dx$
2.  $\int (x^2 + 4) \cdot 3^x dx$
3.  $\int e^{\frac{x}{7}} (10x + 9) \cdot dx$
4.  $\int (5x + 4) \cdot 7^{4x} dx$
5.  $\int (7 - 2x) \cdot \sin \frac{x}{6} dx$
6.  $\int (1 - 6x^2) \cdot e^{5x} dx$

### Індивідуальні завдання

Обчисліть інтеграли методом безпосереднього інтегрування

(номер завдання відповідає номеру варіанта):

1.  $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} dx$
2.  $\int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx$
3.  $\int \frac{x^2 + 2x - 7}{\sqrt{x}} dx$
4.  $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} - x} dx$
5.  $\int \frac{x^2 - 2^x x^3 + x}{x^3} dx$
6.  $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
7.  $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$
8.  $\int \frac{x - 3^x x^3 + x^2}{x^3} dx$
9.  $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt[5]{x^4}} dx$
10.  $\int \sqrt[3]{x} \left( \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$
11.  $\int \frac{2 - x^4}{1 + x^2} dx$
12.  $\int \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{5x}} dx$

$$13. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$$

$$16. \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$19. \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$22. \int \frac{2+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$$

$$25. \int \frac{3tg^2 x - 2}{\sin^2 x} dx$$

$$28. \int \frac{x - 3e^x \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$$

$$1. \int (3x+5)^7 dx$$

$$4. \int \frac{dx}{4+3x}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$10. \int \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$13. \int ctg\left(\frac{x}{2}+1\right) dx$$

$$16. \int e^{2x+3} dx$$

$$19. \int e^{-3x+1} dx$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin^2(4x-1)}$$

$$25. \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$14. \int tg^2 x dx$$

$$17. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$20. \int \frac{x^2 \sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$23. \int \sqrt[3]{x} \left( \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + x \right) dx$$

$$26. \int \frac{5-4ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$29. \int \frac{x^3 - 3\sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^5}}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2-2x-3}$$

$$11. \int \cos(2x+1) dx$$

$$14. \int e^{\frac{x}{2}+5} dx$$

$$17. \int 3^{\frac{x}{4}} dx$$

$$20. \int \frac{dx}{\sin^2(4x+1)}$$

$$23. \int \sin(4x+5) dx$$

$$26. \int \frac{x}{x^2+2} dx$$

$$15. \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$18. \int ctg^2 x dx$$

$$21. \int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} dx$$

$$24. \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$27. \int \frac{x^3 - 5x + 4}{\sqrt[5]{x}} dx$$

$$30. \int \frac{\sqrt{x^3} + 1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$3. \int \sqrt[3]{2x-1} dx$$

$$6. \int e^{-x^2} x dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2-6x+13}$$

$$12. \int tg(2-3x) dx$$

$$15. \int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$18. \int 5^{1-2x} dx$$

$$21. \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-1\right)}$$

$$24. \int \cos\left(1-\frac{x}{3}\right) dx$$

$$27. \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$$

$$28. \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

$$29. \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$$

$$30. \int \sqrt{\cos x + 5} \sin x dx$$

Обчисліть інтеграли методом заміни змінної  
(номер завдання відповідає номеру варіанта):

$$1. \int \cos \sqrt{x} dx$$

$$2. \int \sin \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$4. \int \frac{\cos(3\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$5. \int \sqrt{x} \sin(\sqrt{x^3} - 3) dx$$

$$6. \int \frac{xdx}{\cos^2\left(3x^2 + \frac{1}{2}\right)}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + x}$$

$$8. \int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}} \cos x dx$$

$$9. \int x^3 \sin^2 x^4 \cos x^4 dx$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2} \arcsin \frac{x}{5}}$$

$$11. \int \frac{dx}{\left(1 + 4x^2\right) \operatorname{arctg}^2 x}$$

$$12. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 + \cos^2 x}} dx$$

$$13. \int \frac{1 - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \left( \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 9 \right)}$$

$$15. \int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 4} dx$$

$$16. \int \frac{3^{3x}}{3^{5x} - 16} dx$$

$$17. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 2x - 5}$$

$$18. \int \frac{x^2}{\sqrt{7 + 2x^3}} dx$$

$$19. \int \left( 3 - 2^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{\arcsin^2 x + 4}}$$

$$21. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

$$22. \int \sqrt[3]{\cos 5x} \sin 5x dx$$

$$23. \int \frac{2 + \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$24. \int \frac{\cos \frac{1}{x} + 4}{x^2} dx$$

$$25. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{(1 + 2 \cos x)^5}}$$

$$26. \int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx$$

$$27. \int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^6}} dx$$

$$28. \int \frac{2x - x^3}{\sqrt{25 + x^4}} dx$$

$$29. \int \frac{2 \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx$$

$$30. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx$$

Обчисліть інтеграли методом інтегрування частинами  
(номер завдання відповідає номеру варіанта):

$$1. \int x \ln(1 + x^2) dx$$

$$2. \int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} dx$$

$$3. \int (2x + 3) 2^x dx$$

$$4. \int (x^2 + 32) \sin 3x dx$$

$$5. \int (x + 1) \cos 5x dx$$

$$6. \int (3x + 5) e^{4x} dx$$

$$7. \int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx$$

$$10. \int (x^2 + 1) \ln x dx$$

$$13. \int (2x - 3) \cos x dx$$

$$16. \int (2x - 1) 5^x dx$$

$$19. \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$22. \int x \cos^2 x dx$$

$$25. \int (x^2 + x) e^{-x} dx$$

$$28. \int \frac{x dx}{\sin^2 3x}$$

$$8. \int \arctg x dx$$

$$11. \int x^2 e^{5x} dx$$

$$14. \int (x^2 + 3x) \sin 2x dx$$

$$17. \int x^2 \cos 2x dx$$

$$20. \int x \arccos 3x dx$$

$$23. \int x \sin^2 x dx$$

$$26. \int (x + 2) 3^x dx$$

$$29. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$9. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx$$

$$12. \int x^2 \sin 2x dx$$

$$15. \int (x^2 + 2) 3^x dx$$

$$18. \int x \arcsin x dx$$

$$21. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$24. \int e^{2x} (3x^2 + 1) dx$$

$$27. \int (4 - x) e^{-5x} dx$$

$$30. \int e^{-x} \sin x dx$$

## РОЗДІЛ VI

### Визначений інтеграл

#### Практичне заняття 9

**Тема:** **Визначений інтеграл, його застосування**

**Мета:** ознайомити із формулою Ньютона – Лейбніца та її використанням при інтегруванні заміною змінної та частинами; розглянути геометричні застосування визначеного інтегралу: знаходження площі, довжини дуги та об'єму тіла обертання.

#### **Формула Ньютона-Лейбніца**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (9.1)$$

**Приклад 9.1.** Обчислити  $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

**Розв'язання.** За формулою (9.1):

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

#### **Заміна змінної у визначеному інтегралі**

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \text{при } x_1 = a, t_1 = \alpha \\ \text{при } x_2 = b, t_2 = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Приклад 9.2.** Обчислити  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

**Розв'язання.** Застосуємо підстановку  $x = 2\sin t$ . Границі інтегрування знаходимо із співвідношень  $2\sin t = 0, t_1 = 0$  і  $2\sin t = 1, t_2 = \frac{\pi}{6}$ . Функції  $x = 2\sin t$  та її

похідна  $x' = 2 \cos t$  неперервній на відрізку  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ , що підтверджує законність даної підстановки. Отже маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 2 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

### Інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (9.2)$$

де  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .

**Приклад 9.3.** Обчислити  $\int_0^1 x e^x dx$ .

**Розв'язання.** За формулою (9.2):

$$\int_0^1 x e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array} \right| = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$$

**Приклад 9.4.** Обчислити  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$

**Розв'язання.** За формулою (9.2):

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, dv = \frac{dx}{x^5} \\ du = \frac{dx}{x}, v = -\frac{dx}{4x^4} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{4x^4} \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4} \Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$$

**Приклад 9.5.** Обчислити  $\int_0^1 (x+2)^3 \ln(x+2) dx$ .

**Розв'язання.** Інтеграли такого вигляду обчислюються за допомогою формули (9.2). Приспускаючи, що  $\ln(x+2) = u$ ,  $(x+2)^3 dx = dv$ , маємо

$$du = \frac{1}{x+2} dx, v = \int (x+2)^3 dx = \frac{1}{4} (x+2)^4.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x+2) \cdot (x+2)^3 dx &= \frac{1}{4}(x+2)^4 \cdot \ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}(x+2)^4 \cdot \frac{dx}{(x+2)} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot 3^4 \cdot \ln 3 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 \ln 2 - \frac{1}{4} \int_0^1 (x+2)^3 dx = \frac{81}{4} \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{(x+2)^4}{16} \Big|_0^1 = \\
&= \frac{81}{4} \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{3^4}{16} + \frac{2^4}{16} = \frac{81}{4} \ln 3 - 4 \ln 2 - 4 \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

**Приклад 9.6.** Обчислити  $\int_{-3}^0 (6-5x)e^{\frac{x}{3}} dx$ .

**Розв'язання.** Застосуємо формулу інтегрування частинами (9.2), припускаючи, що  $u = 6-5x$ ,  $dv = e^{\frac{x}{3}} dx$ , звідки  $du = -5dx$ ,  $v = \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}}$ . Тоді:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^0 (6-5x)e^{\frac{x}{3}} dx &= (6-5x) \cdot \left( 3e^{\frac{x}{3}} \right) \Big|_{-3}^0 - \int_{-3}^0 \left( 3e^{\frac{x}{3}} \right) (-5) dx = \\
&= -18 + 63e + 45e^{\frac{x}{3}} \Big|_{-3}^0 = 63e - 18 + 45 - 45e = 9(2e + 3).
\end{aligned}$$

## Застосування визначеного інтеграла

### Обчислення площі

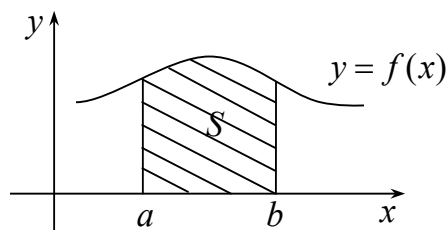


Рис. 9.1

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

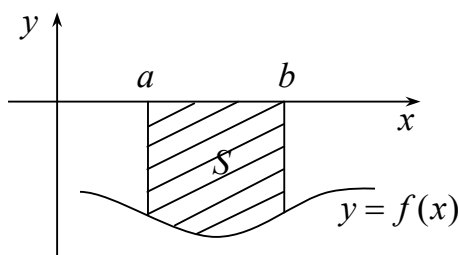


Рис. 9.2

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

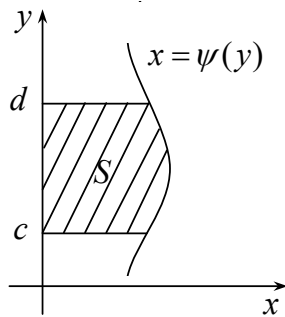


Рис. 9.3

$$S = \int_c^d \psi(y) dy$$

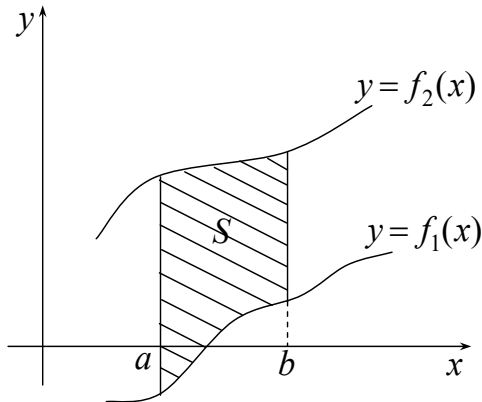


Рис. 9.4

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

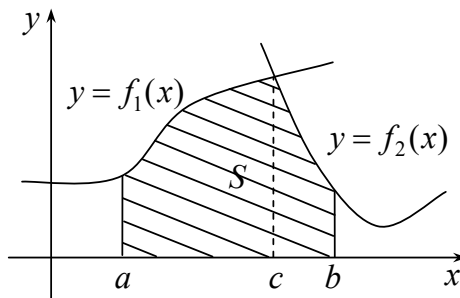


Рис. 9.5

$$S = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx$$

**Приклад 9.7.** Знайти площу фігури, обмежену параболою, яка задана рівнянням  $y = x^2$  і прямою лінією, рівняння якої має вигляд  $x + y = 2$ .

**Розв'язання** (Спосіб 1). Побудуємо схематичний рисунок заданої фігури (рисунок 9.6). Будуємо пряму та параболу. З рисунка видно, що фігура обмежена дугою параболи  $AOC$  і відрізком прямої  $AC$ . Через точку  $A$  проведемо пряму, паралельну осі  $Oy$  і розіб'ємо фігуру на дві частини. Тоді  $S = S_I + S_{II}$ . Проекція фігури I на вісь  $Ox$  – це відрізок  $OA_2$ , проекція фігури II – відрізок  $A_2C_2$ .

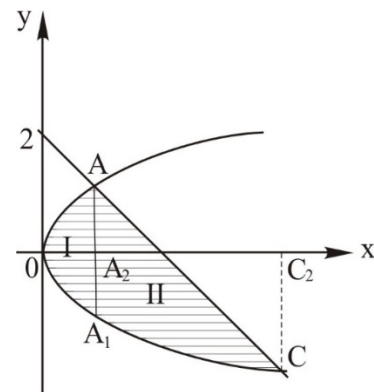


Рис. 9.6

Абсциса точки  $O$ :  $x = 0$ . Для знаходження абсциси точки  $A_2$  або точки  $A$  необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо два значення:  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 4$ . Це пов'язано з тим, що пряма і парабола мають дві точки перетину  $A$  і  $C$ . Таким чином, отримані одночасно абсциси точок  $A_2$  і  $C_2$ . Звідси маємо, що інтервали інтегрування для обчислення площі  $S_I$ - це відрізок  $[0,1]$  і для  $S_{II}$  -  $[1,4]$ .

Фігура I знизу обмежена напівпараболою  $y = -\sqrt{x}$ , зверху – напівпараболою  $y = \sqrt{x}$ . Отже,

$$S_I = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx$$

Фігура II знизу обмежена напівпараболою  $y = -\sqrt{x}$ , зверху прямою  $y = 2 - x$ . Тому

$$S_{II} = \int_1^4 (2 - x - (-\sqrt{x}))dx = \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx$$

Тоді площа всієї фігури дорівнює:

$$S = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx = \frac{2 \cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 + \left( 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{4}{3} - 0 + 8 - 8 + \frac{16}{3} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

Спосіб 2. Задану фігуру можна спроектувати на вісь  $Oy$  (рисунок 9.7) і використати для розв'язання задачі формулу, яка відповідає малюнку 9.3. Проекція фігури на вісь  $Oy$  - це відрізок  $C_1A_1$ . Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

знаходимо ординати точок  $A_1$  і  $C_1$ :  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -2$ .

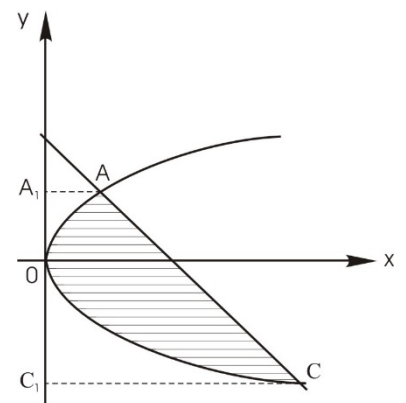


Рис. 9.7.

Рівняння параболи і прямої перепишемо так, щоб змінна  $y$  була аргументом. Зліва фігура обмежена параболою  $x = y^2$ , справа – прямою  $x + y = 2$  або  $x = 2 - y$ . Тоді

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left( 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

**Зауваження.** Для розв'язання задачі було запропоновано два способи. Оскільки спосіб 2 приводить до обчислення одного інтеграла, а спосіб 1 – двох інтегралів, то, очевидно, розв'язок 2 більш раціональний. Звідси випливає, що, приступаючи до розв'язання аналогічної задачі, необхідно вибрати той шлях, який приводить до найменшого числа інтегралів або до більш простих обчислень.

### Обчислення довжини дуги

В декартовій системі координат довжина лінії  $y = f(x)$ ,  $x \in [x_1; x_2]$  дорівнює

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (9.3)$$

Якщо крива задана параметрично рівнянням  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (9.4)$$

**Приклад 9.8.** Обчислити довжину дуги кривої  $y = 1 - \ln \cos x$  від точки  $M(0; 1)$  до точки  $N\left(\frac{\pi}{4}, \ln \sqrt{2}e\right)$ .

**Розв'язання.** Використаємо формулу (9.3). Через те, що  $y = 1 - \ln \cos x$ ,

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ то}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = -\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

**Приклад 9.9.** Знайти довжину дуги кривої  $x = a(t \sin t + \cos t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  від точки  $A(t = 0)$  до точки  $B(t = 2\pi)$ .

**Розв'язання.** Використаємо другу формулу (9.4).

Маємо:  $t_1 = 0, t_2 = 2\pi, x'_t = a t \cos t, y'_t = a t \sin t, (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2 t^2$ , звідки

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2} dt = a \int_0^{2\pi} t dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a \text{ (од. дов.)}.$$

### Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло обертання навколо осі  $Ox$  криволінійної трапеції, обмеженої кривою  $y = f(x)$ ,  $x \in [x_1; x_2]$  (рис. 9.8).

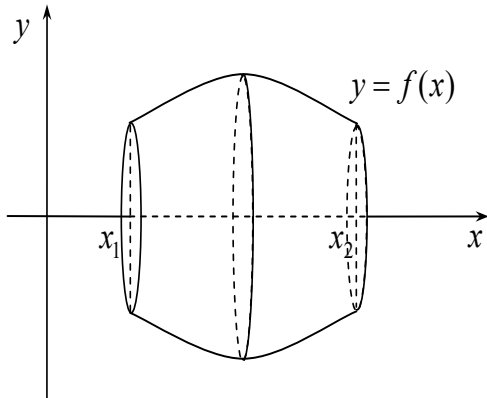


Рис. 9.8

Тоді об'єм тіла обертання навколо вісі  $Ox$ :

$$V_{Ox} = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi (f(x))^2 dx$$

Аналогічно знаходиться об'єм тіла обертання навколо вісі  $Oy$ .

Тобто,

$$V_{Ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx \quad (9.5)$$

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} (\psi(y))^2 dy \quad (9.6)$$

**Приклад 9.10.** Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням навколо вісей  $Ox$  і

$Oy$  сегмента  $AOB$  параболи  $y^2 = 2px$ , перерізаного хордою  $x = \frac{p}{2}$ .

**Розв'язання.** а) Обчислимо об'єм тіла, утвореного обертанням сегмента навколо вісі  $Ox$  (рис.9.9). Використаємо формулу (9.5).

Тоді

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{p}{2}, y(x) = \sqrt{2px}, y^2(x) = 2px.$$

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} 2px dx = \pi px^2 \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{4} \pi p^3 \text{ (куб. од.)}.$$

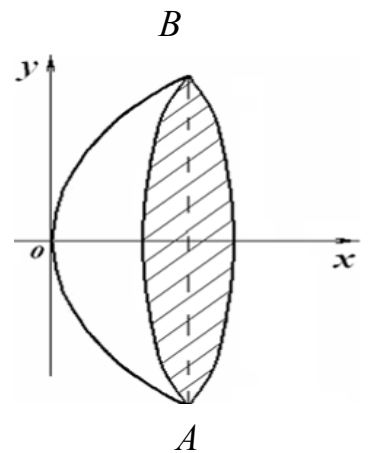


Рис. 9.9

б) При обертанні сегмента навколо вісі  $Oy$  маємо тіло (рис.9.10). Для обчислення його об'єму попередню формулу використати не можна, тому що сегмент  $AOB$  по відношенню до осі  $Oy$  обмежений двома лініями

$$x_1 = \frac{p}{2}, x_2 = \frac{y^2}{2p} \quad \text{Об'єм будемо шукати як різницю}$$

об'ємів тіл, утворених обертанням навколо вісі  $Oy$  прямокутника  $CABD$  ( $V_1$ ) і криволінійної трапеції  $CAOBD$  ( $V_2$ ). Ординати точок  $C$  і  $D$  (тобто,  $y_1$  і  $y_2$  у формулі (9.6), знайдемо, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x = \frac{p}{2} \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases}.$$

Маємо координати точок  $B\left(\frac{p}{2}, p\right)$  і  $A\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ , тоді:

$$V_{1y} = \pi \int_{-p}^p x_1^2 dy = 2\pi \int_0^p \left(\frac{p}{2}\right)^2 dy = \pi \frac{p^2}{2} y \Big|_0^p = \frac{1}{2} \pi p^3.$$

$$V_{2y} = \pi \int_{-p}^p x_2^2 dy = 2\pi \int_0^p \left(\frac{y^2}{2p}\right)^2 dy = 2\pi \int_0^p \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi}{2p^2} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^p = \frac{\pi p^3}{10}.$$

$$V_y = V_{1y} - V_{2y} = \frac{1}{2} \pi p^3 - \frac{1}{10} \pi p^3 = \frac{2}{5} \pi p^3 (\text{куб.од.}).$$

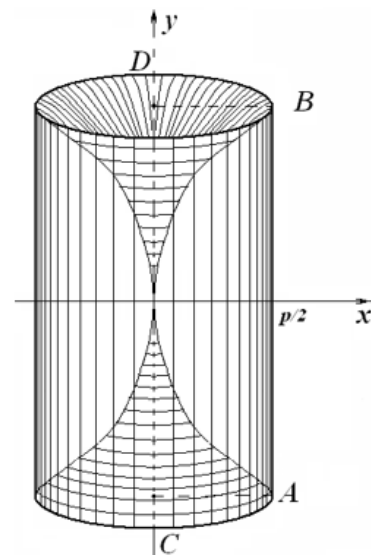


Рис. 9.10

### Теоретичні запитання

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Які практичні задачі призводять до поняття визначеного інтеграла?
3. Перелічіть всі властивості визначеного інтеграла.
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Запишіть формулу обчислення площі в прямокутних координатах.
6. Запишіть формули для обчислення довжини дуги кривої в прямокутних координатах?
7. Як обчислюється об'єм тіла обертання?

### Завдання для самостійної роботи:

1. Обчислити середнє значення функції  $y = \cos 4x$  на інтервалі  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

2. Оцінити інтеграл  $\int_4^9 \sqrt{8+x^3} dx$

3. Обчислити визначені інтеграли за допомогою формули Ньютона – Лейбніца:

а)  $\int_1^2 \left( x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

б)  $\int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx$

в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

г)  $\int_{-1}^{\frac{6}{7}} e^{7x+7} dx$

4. Обчислити визначені інтеграли методами підстановки та інтегрування частинами.

а).  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$

б).  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

в).  $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

г).  $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$

д).  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

е).  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

є).  $\int_1^{3\sqrt{5}} \frac{x^2}{x^6 - 6x^3 + 13} dx$

ж).  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

5. Обчислити площі фігур, утворених при перетині наступних ліній:

а).  $y = 0; y = 2x^3; x = 2.$

б).  $y = x^2; x + y = 2.$

в).  $y = \frac{8}{4+x^2}; y = \frac{x^2}{4}.$

г).  $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\text{д). } \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t; \end{cases} \quad y = 1; y \geq 1.$$

6. Обчислити довжину дуги кривої, використовуючи визначений інтеграл :

$$1. \quad x^2 + y^2 = 49.$$

$$2. \quad \begin{cases} x = 3 \cos^3 t; \\ y = 3 \sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Ох фігури, яка

$$\text{обмежена лініями } y = \sqrt{x}; y = \frac{x}{3}.$$

### Індивідуальні завдання

1. Обчислити інтеграли:

#### **Варіант 1**

$$1. \quad \int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx.$$

$$2. \quad \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

$$3. \quad \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$$

$$4. \quad \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$5. \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$6. \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$7. \quad \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}.$$

$$8. \quad \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx.$$

#### **Варіант 2**

$$1. \quad \int_0^{-1} \frac{t^4 - 4}{2 - t^2} dt.$$

$$2. \quad \int_{-1}^0 2x(x^2 - 1)^{15} dx.$$

$$3. \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$4. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$5. \quad \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$6. \quad \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$7. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 6) \cos 2x dx.$$

$$8. \quad \int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x - 1}}.$$

**Варіант 3**

$$1. \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

$$3. \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$$

$$5. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$7. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$2. \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

$$4. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$6. \int_1^e x \ln x dx.$$

$$8. \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sqrt[4]{2x-1} dx.$$

**Варіант 4**

$$1. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$3. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt[5]{8} - x^4\right) \sqrt{\sqrt[5]{8} - x^4}}.$$

$$5. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$7. \int_0^{\pi} (x^3 + 1) \sin 2x dx.$$

$$2. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

$$4. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x + 4}{x^2 - x + 1} dx.$$

$$6. \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x dx.$$

$$8. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}.$$

**Варіант 5**

$$1. \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$$

$$3. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$5. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$7. \int_{-1}^0 (x^2 + 3) \cos x dx.$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

$$4. \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}.$$

$$6. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$8. \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \sqrt[4]{2x-1} dx.$$

**Варіант 6**

$$1. \int_0^4 (t^2 + 3)^2 dt.$$

$$3. \int_0^2 (e^x - 1)^{10} e^x dx.$$

$$5. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arccos^2 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$7. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$6. \int_1^e x \ln x dx$$

$$8. \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx$$

**Варіант 7**

$$1. \int_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1} dx.$$

$$3. \int_2^9 \sqrt{x-1} dx.$$

$$5. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \arctg^4 x}{1+x^2} dx.$$

$$7. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x) \cos x dx.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin 2x dx.$$

$$4. \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$$

$$6. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$8. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

**Варіант 8**

$$1. \int_{-2}^0 \left( \frac{x}{2} + 1 \right)^3 dx$$

$$3. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+5\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$$

$$7. \int_0^{\pi} (2x^2 + 7) \cos 2x dx$$

$$2. \int_{-1}^2 (e^{-x} - x^2) dx$$

$$4. \int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

$$6. \int_0^1 x \operatorname{arctg} 2x dx$$

$$8. \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

**Варіант 9**

$$1. \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$$

$$3. \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$$

$$5. \int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$7. \int_1^e \ln^3 x dx$$

$$2. \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)} d\varphi$$

$$4. \int_2^3 \frac{dy}{y^2 - 2y - 8}$$

$$6. \int_0^1 \arcsin x dx$$

$$8. \int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[4]{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + 1}}$$

**Варіант 10**

$$1. \int_{100}^{101} \left( \frac{u-1}{\sqrt{u}+1} - \sqrt{u} + 2 \right) du$$

$$3. \int_2^6 \sqrt{x-2} dx$$

$$5. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx$$

$$7. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx$$

$$2. \int_0^{\ln 3} \left( e^{2t} - e^{-t/2} \right) dt$$

$$4. \int_{\sqrt[3]{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

$$6. \int_0^3 \ln(x+3) dx$$

$$8. \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x + 2}}{e^x + 2} dx$$

**Варіант 11**

$$1. \int_4^9 \left( \frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$3. \int_{-1}^0 \frac{dx}{(7-3x)^2}$$

$$5. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$7. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx$$

$$2. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$$

$$4. \int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

$$6. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$8. \int_0^5 x \sqrt{x+4} dx$$

**Варіант 12**

$$1. \int_4^9 \left( 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$3. \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} x e^{x^2} dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$$

$$4. \int_2^3 \frac{dy}{y^2 - 2y - 8}$$

$$6. \int_0^{2\pi} (2x+1) \cos 3x dx$$

$$8. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

**Варіант 13**

$$1. \int_1^4 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}}{x} dx$$

$$3. \int_{-\sqrt[3]{3}}^0 x^2 e^{\frac{1}{3}x^3+1} dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$$

$$7. \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}$$

$$2. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. \int_1^3 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$6. \int_0^3 \ln(x+3) dx$$

$$8. \int_0^{\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx$$

**Варіант 14**

$$1. \int_{-2}^{-1} \left( x + \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$3. \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$5. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

$$7. \int_0^1 \arcsin^2 x dx$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \left( 4\varphi + \frac{\pi}{3} \right) d\varphi$$

$$4. \int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$8. \int_0^{\ln 2} \sqrt{5 - e^{2x}} dx$$

**Варіант 15**

$$1. \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$$

$$3. \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{x dx}{5\sqrt{1-x^4}}$$

$$5. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$$

$$7. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) \sin 3x dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{e^{x-1}} dx$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$8. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

**Варіант 16**

$$1. \int_1^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3x + 5 \right) dx$$

$$3. \int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{1}{2} x \sin x^2 dx$$

$$5. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$$

$$7. \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{2^x - 3^x}{6^x} dx$$

$$4. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

$$6. \int_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$$

$$8. \int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$$

**Варіант 17**

$$1. \int_{-2}^2 (x^2 + x + 1) dx$$

$$3. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

$$5. \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$$

$$7. \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$2. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

**Варіант 18**

$$1. \int_2^5 \left( \frac{1}{x} + 2^x - x \right) dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 9}$$

$$3. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 1}{3 + \sin^2 x} \cos x dx$$

$$7. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx$$

$$4. \int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

$$6. \int_{-1}^1 x \arctg x dx$$

$$8. \int_2^3 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx$$

### Варіант 19

$$1. \int_3^5 \left( \frac{1}{x^2} + e^{2x} - x \right) dx$$

$$3. \int_{-2}^0 \frac{dx}{(5 + 2x)^5}$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos \varphi}{(\varphi - \sin \varphi)^2} d\varphi$$

$$7. \int_0^{2\pi} (3x^2 - 8) \cos 5x dx$$

$$2. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{3 \sin 2x} dx$$

$$4. \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 2t - 8}$$

$$6. \int_0^1 \arctg 6x dx$$

$$8. \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

### Варіант 20

$$1. \int_0^1 (t\sqrt{t} - 2t + 1) dt$$

$$3. \int_1^2 e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$$

$$5. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$7. \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x dx$$

$$2. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$4. \int_1^3 \frac{dx}{x + x^2}$$

$$6. \int_0^3 \ln(x + 1) dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{dy}{2 + \sqrt{y}}$$

### Варіант 21

$$1. \int_{-1}^2 (x^3 + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$3. \int_1^e \cos \ln x \frac{dx}{x}$$

$$2. \int_1^2 \frac{dx}{(2x - 1)^2}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{4 + \cos x}{1 + \cos^2 x} \sin x dx$$

$$7. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 9x dx$$

$$6. \int_0^1 \arcsin 7x dx$$

$$8. \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx$$

### Вариант 22

$$1. \int_1^{27} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$$

$$3. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{3(1 - 2e^x)}$$

$$5. \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$7. \int_0^{\pi/2} x \operatorname{arctg} 2x dx$$

$$2. \int_0^{\pi} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

$$4. \int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$$

$$6. \int_0^{\pi/6} (x^2 + 6) \sin 3x dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{9x - 1}{\sqrt{3x + 1}} dx$$

### Вариант 23

$$1. \int_{-1}^2 (3x^2 + 4x - 1) dx$$

$$3. \int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$7. \int_{-3}^0 (x^2 + 9) \sin 2x dx$$

$$2. \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$

$$6. \int_0^3 x \ln(x + 17) dx$$

$$8. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$$

### Вариант 24

$$1. \int_{-1}^3 (2 + x - 3x^2) dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$$

$$5. \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

$$2. \int_0^3 e^{x/3} dx$$

$$4. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$6. \int_1^e \ln 7x dx$$

$$7. \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$$

$$8. \int_4^0 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

### Варіант 25

$$1. \int_{-1}^8 (\sqrt[3]{x} - x + 3x^2) dx$$

$$2. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4. \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$$

$$5. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

$$6. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx$$

$$7. \int_0^1 \arcsin x dx$$

$$8. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$$

### Варіант 26

$$1. \int_1^4 \frac{4+3\sqrt{x}}{x^2} dx.$$

$$2. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$$

$$3. \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{1+e^{2x}}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$5. \int_0^{\pi/8} \operatorname{tg} 2x \ln \cos 2x dx.$$

$$6. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

$$7. \int_1^5 \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}.$$

$$8. \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

### Варіант 27

$$1. \int_0^{-2} \frac{x^4-4}{2+x^2} dt.$$

$$2. \int_{-1}^0 3x^2 (x^3+6)^{11} dx.$$

$$3. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}.$$

$$4. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

$$5. \int_0^2 \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2x}{4+x^2} dx.$$

$$6. \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

$$7. \int_0^{\pi/2} (x^2-3) \cos x dx.$$

$$8. \int_0^3 \frac{dx}{3x + \sqrt{x+1}}.$$

**Варіант 28**

$$1. \int_1^2 (4x^3 + 3x^2) dx.$$

$$3. \int_1^e \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} dx.$$

$$5. \int_1^2 \frac{\operatorname{tg}(2x-1)}{\cos^2(2x-1)} dx.$$

$$7. \int_{-2}^0 (x^2 - 1) \cos 2x dx.$$

$$2. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1 + 4x^2}.$$

$$4. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}.$$

$$6. \int_1^e x^3 \ln x dx.$$

$$8. \int_{2/3}^2 x^3 \sqrt{3x-2} dx.$$

**Варіант 29**

$$1. \int_0^{16} (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx.$$

$$3. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\left(\frac{3}{8} - x^3\right) \sqrt{\frac{3}{8} - x^3}}.$$

$$5. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}.$$

$$7. \int_0^e x^3 \ln x dx.$$

$$2. \int_2^3 \frac{x dx}{x^4 - 4}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2 - x + 1} dx.$$

$$6. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

$$8. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x}.$$

**Варіант 30**

$$1. \int_1^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3x + 5 \right) dx$$

$$3. \int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{1}{2} x \sin x^2 dx$$

$$5. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$$

$$7. \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{2^x - 3^x}{6^x} dx$$

$$4. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

$$6. \int_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$$

$$8. \int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$$

2. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

| Варіант   | Функції                                                                                                                                                               | Варіант   | Функції                                                                                                                                                                     | Варіант   | Функції                                                                                                                                                |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>  | а) $y = (x - 2)^2$ ,<br>$y = 4x - 8$ .<br>б) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$<br>$x = 2 \ (x \geq 2)$                   | <b>2</b>  | а) $y = x^2 + 2x + 2$ ,<br>$y = 0, x = 0, x = -3$ ;<br>б) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$ .<br>$y = 2 \ (y \geq 2)$ .             | <b>3</b>  | а) $y = \frac{1}{x^2}, \ y = x$ ,<br>$x = 3$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$y \geq 4 \ 0 < x < 8\pi$ |
| <b>4</b>  | а) $y = x^2$ ,<br>$4x - y = 0$ ;<br>б) $y = \frac{1}{x}, \ y = 1$ ,<br>$x = 0, x = e, y = 0$ ;                                                                        | <b>5</b>  | а) $y = 4 - x^2$<br>$y = x^2 - 2x$ .<br>б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$y = 0, \ x = -1, x = -2$ ;                              | <b>6</b>  | а) $y = \sin x, \ y = \frac{3}{\pi}x$ ;<br>б) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$<br>( $0 \leq t \leq 2\pi$ );                    |
| <b>7</b>  | а) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$ ,<br>$x = 0, x = 1$ .<br>б) $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 6 \sin t. \end{cases} \ y = 3, \ .$<br>$y \geq 3$ )                    | <b>8</b>  | а) $y = x^2 - 2x + 3$ ,<br>$y = 3x - 1, \ x = 0$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \ y = 3$<br>( $0 \leq x \leq 4\pi, y \geq 3$ ) | <b>9</b>  | а) $y = 4 - x^2$ ,<br>$y = 0$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t; \\ y = \sin^2 t, \end{cases} \ x = 6\sqrt{3}$<br>( $x \geq 6\sqrt{3}$ )          |
| <b>10</b> | а) $y = 1 + e^x, \ x = 0$ ,<br>$y = 0, \ x = 1$<br>б) $\begin{cases} x = 6 \cos t; \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \ y = \sqrt{3}$<br>( $y \geq \sqrt{3}$ )              | <b>11</b> | а) $y = x^2 + 1$ ,<br>$y = 2x + 9$ ,<br>б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \ y = 3$<br>( $0 < x < 6\pi, y \geq 3$ ).                    | <b>12</b> | а) $y = 4x^2, \ y = x^2 + 3$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \ x = 4$<br>( $x \geq 4$ ).          |
| <b>13</b> | а) $y = x\sqrt{9 - x^2}$ ,<br>$y = 0, 0 \leq x \leq 3$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \ y = 3$ .<br>( $y \geq 3$ ) | <b>14</b> | а) $y = 2x - x^2 + 3$ ,<br>$y = x^2 - 4x + 3$<br>б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \ y = 9$<br>( $0 < x < 12\pi, y \geq 9$ )           | <b>15</b> | а) $y = -x^2 - 7x + 10$ ,<br>$y = 0$ ;<br>б) $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \ x = 4$ .<br>( $x \geq 4$ )                 |

|           |                                                                                                                                                                                       |           |                                                                                                                                                                               |           |                                                                                                                                                                                       |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>16</b> | a) $y = x, y = 4 - x,$<br>$x = 0$<br>б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4$<br>$(y \geq 4).$                                                       | <b>17</b> | a) $y = 4 - x^2,$<br>$2x - y + 1 = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 4$<br>$(x \geq 4)$                                        | <b>18</b> | б)а) $y = 6 - x^2, x = 0$<br>б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 3\sqrt{3}$<br>$(x \geq 3\sqrt{3})$                                            |
| <b>19</b> | a) $y = x, y = 1,$<br>$y = 4, x = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad y = 2\sqrt{3}$<br>$(y \geq 2\sqrt{3}).$                                   | <b>20</b> | a) $y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}x;$<br>$y = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 1$<br>$(x \geq 1).$             | <b>21</b> | a) $y = \sin x, y = 2 \sin x,$<br>$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$<br>б) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 4$<br>$(y \geq 4)$ |
| <b>22</b> | a) $y = 2\sqrt{x} \quad y = x;$<br>б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$y = 0, x = -1, x = -2;$                                                | <b>23</b> | a) $y = x^2 - 1,$<br>$y = 7x - 7;$<br>б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 1$<br>$(x \geq 1).$                                          | <b>24</b> | a) $y = \sqrt{x}, \quad x = 9, y = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad y = 2$<br>$(y \geq 2)$                                                   |
| <b>25</b> | a) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x, \quad x = 3;$<br>$y = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 12$<br>$(0 < x < 16\pi, y \geq 12)$ | <b>26</b> | a) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 1,$<br>$x = 0, x = e, y = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 1$<br>$(x \geq 1).$ | <b>27</b> | a) $y = x^2, 4x - y = 0;$<br>б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 9$<br>$(0 < x < 12\pi, y \geq 9)$                                       |
| <b>28</b> | a) $y = \ln x, \quad x = 0, x = 3;$<br>б) $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$                              | <b>29</b> | a) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x,$<br>$x = 3;$<br>б) $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad y = 2\sqrt{3}$<br>$(y \geq 2\sqrt{3}).$                | <b>30</b> | a) $y = x^3, 4x - y = 0;$<br>$x = 1$<br>б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 3\sqrt{3}$<br>$(x \geq 3\sqrt{3})$                                 |

1. Обчислити довжину дуги кривої:

| Варіант   | Функція                                                                                                                  | Варіант   | Функція                                                                                         | Варіант   | Функція                                                                                                     |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>  | $y = \sqrt{1-x^2} - 1 - \arcsin x,$<br>$(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}/3);$                                                    | <b>2</b>  | $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,$<br>$(1 \leq x \leq 2).$                                | <b>3</b>  | $\begin{cases} x = 2(t + \cos t), \\ y = 2(1 - \sin t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$             |
| <b>4</b>  | $y = \ln x,$<br>$\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15};$                                                                        | <b>5</b>  | $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$ | <b>6</b>  | $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right);$    |
| <b>7</b>  | $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$             | <b>8</b>  | $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases}$                                  | <b>9</b>  | $\begin{cases} x = 8 \sin t - 6 \cos t, \\ y = 6 \sin t + 8 \cos t, \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$ |
| <b>10</b> | $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$ | <b>11</b> | $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,$<br>$x_1 = 1, x_2 = e;$                                 | <b>12</b> | $y = \sqrt{(x-2)^3}$ від<br>A (2;0) до B (6;8)                                                              |
| <b>13</b> | $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$                          | <b>14</b> | $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2},$<br>$(0 \leq x \leq 3/4);$                                   | <b>15</b> | $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 - \cos 2t, \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$                 |
| <b>16</b> | $y = \sqrt{1-x^2} - 1 - \arcsin x,$<br>$(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}/3);$                                                    | <b>18</b> | $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,$<br>$(1 \leq x \leq 2).$                                | <b>19</b> | $\begin{cases} x = 2(t + \cos t), \\ y = 2(1 - \sin t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$             |
| <b>19</b> | $y = \ln x,$<br>$\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15};$                                                                        | <b>20</b> | $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$ | <b>21</b> | $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right);$    |
| <b>22</b> | $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$             | <b>23</b> | $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases}$                                  | <b>24</b> | $\begin{cases} x = 8 \sin t - 6 \cos t, \\ y = 6 \sin t + 8 \cos t, \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$ |
| <b>25</b> | $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$ | <b>26</b> | $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,$<br>$x_1 = 1, x_2 = e;$                                 | <b>27</b> | $y = \sqrt{(x-2)^3}$ від<br>A (2;0) до B (6;8)                                                              |
| <b>28</b> | $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq 2\pi);$                          | <b>29</b> | $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2},$<br>$(0 \leq x \leq 3/4);$                                   | <b>30</b> | $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 - \cos 2t, \end{cases}$<br>$(0 \leq t \leq \pi);$                 |

3. Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням навколо вісі  $OX$  фігур, обмежених вказаними лініями:

| Варіант   | Функції                                                     | Варіант   | Функції                                               | Варіант   | Функції                                                                            |
|-----------|-------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b>  | $y = \frac{1}{x}, x + y = 2,$                               | <b>2</b>  | $y = \lg_2 x, x = 0,$<br>$y = 1, y = 0;$              | <b>3</b>  | $y = x^2, y = x^4,$                                                                |
| <b>4</b>  | $y = 2 \sin x, y = 2 \cos x,$<br>$x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ | <b>5</b>  | $y = 2x - x^2, y = 0.$                                | <b>6</b>  | $y = \operatorname{tg} x, y = 0,$<br>$(-\pi/4 \leq x \leq \pi/4);$                 |
| <b>7</b>  | $y = 2x - x^2,$<br>$y = -x + 2, x = 0;$                     | <b>8</b>  | $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1;$                         | <b>9</b>  | $2y = 3\sqrt{4 - x^2},$<br>$4y \geq 4 - x^2;$                                      |
| <b>10</b> | $y = x^2, y = \frac{1}{x^2},$<br>$y = 0, x = 2;$            | <b>11</b> | $y = e^{-2x}, y = e^{2x},$<br>$x = 1;$                | <b>12</b> | $y = 2 \sin x, y = 1,$<br>$\left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right);$ |
| <b>13</b> | $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1;$                         | <b>14</b> | $y = e^x, x + y = 2,$<br>$x = 0, y = 0;$              | <b>15</b> | $x^2 + y^2 = 1,$<br>$y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}x;$                                  |
| <b>16</b> | $y = e^{2x}, y = e^{-2x}, y = 2;$                           | <b>18</b> | $y = x^2, x = 2, y = 0;$                              | <b>19</b> | $y = (x+1)^2, y^2 = x,$<br>$y = 0, y = 1;$                                         |
| <b>19</b> | $y = x^2, y = 4, xy = 1,$<br>$(0 \leq x \leq 1);$           | <b>20</b> | $y = \sqrt{x}, x + y = 2,$<br>$x = 0;$                | <b>21</b> | $y = \ln x, x = 0,$<br>$y = 1, y = 0;$                                             |
| <b>22</b> | $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0;$                                 | <b>23</b> | $y = e^{2x}, x = -4,$<br>$x = 0, y = 0;$              | <b>24</b> | $y = \cos x, y = 0,$<br>$y \leq x + 1,$<br>$(-1 \leq x \leq \pi/2);$               |
| <b>25</b> | $y = e^x, y = 0,$<br>$x = -1, x + y = 1;$                   | <b>26</b> | $y = \operatorname{tg} x,$<br>$y = 0, x = \pm \pi/4;$ | <b>27</b> | $y^2 = x^3, x = 2;$                                                                |
| <b>28</b> | $y = 2 \sin x, y = \sin x,$<br>$x = 0, x = \pi;$            | <b>29</b> | $y = 2 \cos x, y = \cos x,$<br>$x = 0, x = \pi/2;$    | <b>30</b> | $y = -x^2 + 3,$<br>$y = x^2 + 1;$                                                  |

2. Обчислити об'єм тіл, утворених обертанням навколо вісі  $OY$  фігур, обмежених вказаними лініями:

| Варіант   | Функції                                             | Варіант   | Функції                                               | Варіант   | Функції                                         |
|-----------|-----------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------|
| <b>1</b>  | $y = \frac{1}{x}, y = 1, y = 0,$<br>$x = 0, x = 2;$ | <b>2</b>  | $x + y = 1, y = \ln x,$<br>$x = e;$                   | <b>3</b>  | $y = x^2, y = \sqrt{x};$                        |
| <b>4</b>  | $y = x^2, 4x - y = 0;$                              | <b>5</b>  | $y = e^{2x},$<br>$y = e^{-2x}, x = \frac{1}{2};$      | <b>6</b>  | $y = (x - 1)^2,$<br>$x = 2, y = 0;$             |
| <b>7</b>  | $y = x^3, y = \sqrt{x};$                            | <b>8</b>  | $y = x^2, y = 8 - x^2;$                               | <b>9</b>  | $x = y^2, x = 0, y = 3;$                        |
| <b>10</b> | $y = \sqrt{x}, x = 0,$<br>$y + x = 4;$              | <b>11</b> | $y = e^{1-x}, y = 0,$<br>$x = 0, x = 1;$              | <b>12</b> | $x + y = 2, x = 2,$<br>$y = x^2 + 2;$           |
| <b>13</b> | $y = x^3, y = x - 1,$<br>$y = 0, y = 1;$            | <b>14</b> | $y = x^2, x = 2,$<br>$y = 0, y = 1;$                  | <b>15</b> | $y = \sqrt{x - 1}, y = 0,$<br>$y = 1, x = 0.5;$ |
| <b>16</b> | $y = e^x, x = 1, x + y = 1;$                        | <b>18</b> | $y = \sqrt{2x}, x^2 = 2y;$                            | <b>19</b> | $xy = 4, 2x + y - 6 = 0;$                       |
| <b>19</b> | $y = \ln x, x = 2, y = 0;$                          | <b>20</b> | $y = x^2, y = 0, x = 2;$                              | <b>21</b> | $y = \frac{2}{1 + x^2}, y = x^2;$               |
| <b>22</b> | $y^2 = x^3, x = 4, y \geq 0;$                       | <b>23</b> | $y = e^{-x}, x = 0,$<br>$x = \ln \frac{1}{2}, y = 0;$ | <b>24</b> | $y = x, y = -x, x = 1;$                         |
| <b>25</b> | $y = x^2 + 1, y = x,$<br>$x = 0, x = 1.$            | <b>26</b> | $y = \sqrt{4 - x^2},$<br>$x = 0, y = 0.$              | <b>27</b> | $y = x\sqrt{1 - x^3},$<br>$x = 0, y = 0.$       |
| <b>28</b> | $y = \arctg x,$<br>$y = 0, x = 1;$                  | <b>29</b> | $x = y^3, y = x,$                                     | <b>30</b> | $y = x\sqrt{x}, x = 0,$<br>$y + x = 1;$         |

## РОЗДІЛ VII

### Основні поняття теорії ймовірностей. Випадкові події

#### Практичне заняття 10

**Тема:** Основні поняття теорії ймовірностей.  
Елементи комбінаторики

**Мета:** дати означення комбінаторним поняттям та навчити застосовувати формули комбінаторики для розв'язання задач.

#### Елементи комбінаторики. Основні принципи комбінаторики

##### Основні види комбінаторних з'єднань

Комбінаторні з'єднання відрізняються, в першу чергу, наявністю повторень в початковому наборі елементів. Залежно від цього виділяють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів довільної множини, яка не містить повторів: перестановки; розміщення та сполучення. Якщо в початковому наборі є однакові елементи, то розрізняють перестановки з повторами; розміщення з повторами та сполучення з повторами.

##### Означення 10.1.

**Перестановками** з  $p$  елементів називають такі їх з'єднання, що відрізняються одне від одного порядком входження елементів.

Загальна кількість можливих перестановок з  $p$  елементів позначається  $P_n$  і визначається виразом

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (10.1)$$

**Приклад 10.1.** Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 2, 4, 6?

**Розв'язання.** Можливі наступні з'єднання: 246, 264, 426, 462, 624, 642. Кількість таких з'єднань:  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

**Приклад 10.2.** Скількома способами можна скласти сигнали з чотирьох різних звуків?

**Розв'язання.** Загальна кількість можливих сигналів визначається відповідно до виразу  $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

Легко помітити, що такий же результат можна одержати, застосовуючи правило множення. На перше місце на полицю можна поставити будь-який з сигналів ( $n_1$  способів,  $n_1=4$ ), після чого на друге місце – будь-який з трьох, що залишилися ( $n_2$  способів,  $n_2=3$ ), потім – будь-який з двох, ( $n_3$  способів,  $n_3=2$ ) та на останньому четвертому місці буде стояти останній сигнал, що залишився ( $n_4=1$ ). За правилом множення отримуємо  $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способи. Таким чином, правило множення можна вважати логічним обґрунтуванням формули (10.1).

**Приклад 10.3.** Скількома способами можна поставити 5 людей в коло?

**Розв’язання.** Шукана кількість способів дорівнює:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

### Означення 10.2.

**Розміщеннями** з  $n$  елементів по  $m$  називають такі з’єднання елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом або порядком їх входження.

Загальна кількість можливих розміщень з  $n$  елементів по  $m$  позначається  $A_n^m$  і визначається виразом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1). \quad (10.2)$$

**Приклад 10.4.** На кожній з карток надруковано одну з літер:  $A, T, И, M, P, K$ . Картки перемішано. Скільки різних трибуквених слів можливо скласти з цих карток?

**Розв’язання.** Можливі з’єднання відрізняються один від одного або порядком розташування ( $АТИ, ТИА$ ) або складом елементів ( $АТИ, АТМ$ ). Їх кількість знаходиться за формулою (10.2.):

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$$

**Приклад 10.5.** На фірмі працюють 10 інженерів. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 3-х осіб на посадах куратора, його заступника та піар-менеджера. Скількома способами можливо це зробити?

**Розв’язання.** Оскільки працюють 10 інженерів, а робоча група з 3-х осіб, та також має значення посада людини (групи відрізняються один від одного або порядком розташування посад, або складом), то загальна кількість можливих способів визначається відповідно до виразу (10.2):

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

### Означення 10.3

**Сполученнями** з  $n$  елементів по  $m$  називають такі з'єднання елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом, порядок їх входження не враховується.

Загальна кількість можливих сполучень з  $n$  елементів по  $m$  позначається  $C_n^m$  і визначається виразом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (10.3)$$

**Приклад 10.6.** В магазині є в наявності 30 тюльпанів. Скількома способами можна скласти букети з п'яти квітів?

**Розв'язання.** Оскільки в даній ситуації має значення тільки склад букета, а порядок розташування квітів в букеті відсутній, то користуємося формулою (10.3). Шукане число способів:

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 142506.$$

**Увага.** При вирішенні ряду задач можуть бути корисними наступні співвідношення, бажано їх запам'ятати:

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = 1; \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

### Означення 10.4.

**Розміщеннями з повтореннями** називаються сполучення з  $n$  елементів по  $m$  елементів, в яких враховується як порядок розташування елементів, так і склад комбінації, причому елементи в утвореній комбінації можуть повторюватися декілька разів. Кількість всіх можливих розміщень з повтореннями становить

$$\overline{A_n^m} = n^m. \quad (10.4)$$

**Приклад 10.7.** При наборі коду, дівчина забула чотири останні цифри. Скільки разів їй прийдеться підбирати комбінацію цифр?

**Розв'язання.** При створенні комбінацій коду, використовуються цифри від 0 до 9. Таким чином,  $n=10$ . Оскільки дівчина не пам'ятає чотири цифри, то  $m = 4$ . Цифри можуть повторюватися, і порядок їх послідовності грає роль, тому кількість всіх можливих чотирицифрових комбінацій відповідно формулі (10.4) дорівнює:

$$\overline{A_n^m} = \overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000.$$

### Означення 10.5.

**Перестановками з повтореннями** називаються такі сполучення  $n$  елементів, при яких є  $n_1$  елемент одного виду,  $n_2$  елементів другого виду і так далі ( $n \cdot_1 + n \cdot_2 + \dots + n \cdot_i = n \cdot$ ). Тоді число перестановок з повтореннями позначається і обчислюється так:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_i!}. \quad (10.5)$$

**Приклад 10.8.** Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова "математика"?

**Розв'язання.** В слові "математика" 10 букв, тобто,  $n = 10$ . Елемент (буква) "м" повторюється 2 рази, тобто,  $n_1 = 2$ ; "а" - 3 рази, тобто,  $n_2 = 3$ ; "т" - 2 рази, тобто  $n_3 = 2$ ; інші букви не повторюються. Отже, шукана кількість слів за формулою (10.5) дорівнює:

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 1551200.$$

### Теоретичні запитання

1. Що є предметом вивчення теорії ймовірностей?
2. Дати означення поняттю подія.
3. Дати означення поняттю експеримент.
4. Дати означення поняттю елементарна подія.
5. Дати означення поняттю достовірна подія.
6. Дати означення поняттю неможлива подія.
7. Дати означення поняттю випадкова подія.
8. Які випадкові події називаються рівноможливими?
9. Які випадкові події називаються несумісними?
10. Дати означення поняттю повна група подій.
11. Які події називаються випадками?
12. Дати означення і формулу підрахунку кількості перестановок.
13. Дати означення і формулу підрахунку кількості розміщень.
14. Дати означення і формулу підрахунку кількості сполучень.
15. Дати означення і формулу підрахунку кількості перестановок з повтореннями.
16. Дати означення і формулу підрахунку кількості розміщень з повтореннями.

### **Завдання для самостійної роботи**

1. На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з цифр: 4, 6, 8, 0. Картки перемішано. Скількома способами можна скласти чотирицифрові числа з даних карток?
2. В наборі з 13 олівців 8 червоних. Скількома способами можна вибрати 4 олівця, з яких 2 червоних?
3. З 13 студентів обираються три: староста, заступник старости та фізорг. Скількома способами можливо це зробити?
4. В групі двадцять студентів. Скількома способами можна скласти підгрупи, в яких буде шість студентів?
5. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких:
  - різні;
  - будь-які?
6. Студент вивчив сім питань з тринадцяти. Скількома способами можна зробити набори з трьох запитань, щоб студент знав в них всі відповіді?
7. Скількома способами можна скласти букети з 5 тюльпанів та 4 троянд, якщо є в наявності 15 тюльпанів та 10 троянд?
8. На кожній з карток надруковано одну з літер: В, О, А, М, И, Р, Т. Картки перемішано. Скільки різних трибуквенних слів можливо скласти з цих карток?
9. Студент вивчив п'ять питань з тринадцяти. Скількома способами можна зробити набори з трьох запитань, щоб студент не знав в них тільки одну відповідь?
10. В автомобілі є 7 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 7 людей можуть сісти в автомобіль, якщо місце водія можуть зайняти лише певні 4 людини?

### **Індивідуальні завдання**

#### **Варіант 1**

1. Скількома способами можна створити прапор, що складається з трьох горизонтальних смуг різних кольорів, якщо є сім різних кольорів матеріалу?
2. Автомобільний номер складається з двох букв (всього використовують 30 букв) та чотирьох цифр (всього цифр 10). Скільки існує таких номерів?
3. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова "комбінаторика"?

### **Варіант 2**

- 1 Скільки є чисел, кратних числу 5, серед п'ятицифрових чисел, складених з цифр 2, 3, 4, 5, 6 без повторення?
- 2 Серед членів шахового гуртка 2 дівчини та 7 хлопців. Для участі у змаганнях складають команду з чотирьох осіб, в яку обов'язково повинна увійти хоча б одна дівчина. Скількома способами це можливо зробити?
- 3 На кожній з карток надруковано одну з літер: А, М, И, М, Р, Т. Картки перемішано. Скільки різних шестибуквенних слів можливо скласти з цих карток?

### **Варіант 3**

- 1 Скількома способами можна скласти букети з 5 тюльпанів та 2 троянд, якщо є в наявності 12 тюльпанів та 11 троянд?
- 2 На фірмі працюють 10 інженерів. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 4 осіб. Скількома способами можливо це зробити?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова: «корона»?  
Скільки слів можна скласти з усіх букв слова «характеристика»?

### **Варіант 4**

- 1 В групі двадцять студентів. Скількома способами можна скласти підгрупи, в яких буде шість студентів?
- 2 Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Скількома способами він може набрати номер телефону?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова «характеристика»?

### **Варіант 5**

- 1 Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких:
  - різні;
  - будь-які?
- 2 Скільки слів можна скласти з наступного набору карток: «М», «І», «С», «Т», «О», якщо слова містять всі запропоновані букви?
- 3 Скільки букетів по п'ять троянд можна зробити, якщо є в наявності дев'ять троянд?

### **Варіант 6**

- 1 Студент вивчив шість питань з десяти. Скількома способами можна зробити набори з трьох запитань, щоб студент знав в них хоча б два запитання?
- 2 Скільки двобуквених сигналів можна скласти з такого набору букв: «к», «а», «и», «о», «ї», «в», «л»?
- 3 На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з цифр: 4, 6, 8, 0. Картки перемішано. Скількома способами можна скласти чотирицифрові числа з даних карток?

### **Варіант 7**

- 1 Кожна з літер слова «КАРЕТА» записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Скільки слів можна скласти слово з цих літер, якщо в слово будуть входити всі літери?
- 2 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 - з України. Скільки груп по 5 спортсменів можна буде скласти, якщо в кожную групу буде входити тільки 2 українця?
- 3 Скільки існує трицифрових чисел, в яких всі цифри різні?

### **Варіант 8**

- 1 Скількома способами можна поставити на полиці 7 книжок?
- 2 В наборі з 20 виробів 5 бракованих. Скількома способами можна вибрати 4 вироби, з яких 2 якісні?
- 3 Скільки існує шестицифрових чисел, в яких всі цифри непарні?

### **Варіант 9**

- 1 Скількома способами можна розсадити 7 учнів за круглим столом?
- 2 Скількома способами можна з 10 учнів обрати 3 чергових?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова «паралелепіед»?

### **Варіант 10**

- 1 Скількома способами можна скласти букети з 5 тюльпанів та 4 троянд, якщо є в наявності 10 тюльпанів та 14 троянд?
- 2 Скільки існує чотирицифрових чисел, в яких всі цифри різні?
- 3 З 10 спортсменів тільки три призери змагань. Скільки можливо таких комбінацій?

### **Варіант 11**

- 1 Скількома способами можна скласти набір з 3 тістечок та 5 яблук, якщо є 10 тістечок та 20 яблук?
- 2 На кожній з карток надруковано одну з літер: А, М, И, Р, Т. Картки перемішано. Скільки різних трибуквенних слів можливо скласти з цих карток?
- 3 У одного учня 7 підручників з математики, у другого – 6. Скількома способами можливо обміняти 3 підручника одного учня на 3 підручника іншого?

### **Варіант 12**

- 1 Скількома способами можна створити прапор, що складається з трьох вертикальних смуг різних кольорів, якщо є шість різних кольорів матеріалу?
- 2 В класі навчається 17 учнів. Скількома способами можна призначити трьох чергових?
- 3 Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова "статистика"?

### **Варіант 13**

- 1 Скільки існує різних шестизначних телефонних номерів?
- 2 Серед членів туристичного гуртка 6 дівчинок та 7 хлопців. Для участі у змаганнях складають команду з чотирьох осіб, в яку обов'язково повинні увійти хоча б дві дівчини. Скількома способами це можливо зробити?
- 3 Скільки різних слів можливо скласти з усіх букв слова "ДОРОГА"?

### **Варіант 14**

- 1 Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 3, 5, 7, 9, 1, якщо кожен цифру використовувати лише один раз?
- 2 У відділенні банку працюють 15 спеціалістів. Керівник відділення вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Скількома способами можливо це зробити?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова "ХАРАКТЕРИСТИКА"?

### **Варіант 15**

- 1 В групі двадцять студентів. Скількома способами можна скласти

підгрупи, в яких буде шість студентів?

- 2 Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Скількома способами він може набрати номер телефону?
- 3 В автомобілі є 7 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 7 людей можуть сісти в автомобіль, якщо місце водія можуть зайняти лише певні 3 людини?

### **Варіант 16**

- 1 Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких:
  - різні;
  - будь-які?
- 2 Скільки слів можна скласти з наступного набору карток: М, І, С, Т, О, К, Н, якщо слова містять всі запропоновані букви?
- 3 Скільки букетів по сім троянд можна зробити, якщо є в наявності десять троянд?

### **Варіант 17**

- 1 Студент вивчив сім питань з тринадцяти. Скількома способами можна зробити набори з трьох запитань, щоб студент знав в них всі відповіді?
- 2 Скільки трибуквенних слів можна скласти з такого набору букв: «к», «а», «и», «о», «ї», «в», «л»?
- 3 На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з цифр: 4, 6, 8, 0. Картки перемішано. Скількома способами можна скласти чотирицифрові числа з даних карток?

### **Варіант 18**

- 1 Кожна з літер слова «РАКЕТА» записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Скільки слів можна скласти з цих літер, якщо в слово будуть входити всі літери?
- 2 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 дівчини. Скільки груп по 5 спортсменів можна буде скласти, якщо в кожную групу повинні входити хоча б 3 дівчини?
- 3 Скільки існує трицифрових чисел, в яких всі цифри різні?

### **Варіант 19**

- 1 Скількома способами можна поставити на полиці 10 книжок?
- 2 В наборі з 13 олівців 8 червоних. Скількома способами можна вибрати 4 олівця, з яких 2 червоних?
- 3 Скільки існує шестицифрових чисел, в яких всі цифри парні?

### **Варіант 20**

- 1 Скількома способами можна розсадити 9 учнів за круглим столом?
- 2 Скількома способами можна розмістити 5 осіб в автомобілі, в якому 5 місць, якщо тільки 2 людини можуть бути водіями?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова «паралелограм»?

### **Варіант 21**

- 1 Кожна з літер слова «КАРЕТА» записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Скільки слів можна скласти слово з цих літер, якщо в слово будуть входити всі літери?
- 2 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 - з України. Скільки груп по 5 спортсменів можна буде скласти, якщо в кожную групу буде входити тільки 2 українця?
- 3 Скільки існує трицифрових чисел, в яких всі цифри різні?

### **Варіант 22**

- 1 Скількома способами можна поставити на полиці 7 книжок?
- 2 В наборі з 20 виробів 5 бракованих. Скількома способами можна вибрати 4 вироби, з яких 2 якісні?
- 3 Скільки існує шестицифрових чисел, в яких всі цифри непарні?

### **Варіант 23**

- 1 Скількома способами можна розсадити 7 учнів за круглим столом?
- 2 Скількома способами можна з 10 учнів обрати 3 чергових?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова «паралелепіпед»?

### **Варіант 24**

- 1 Скількома способами можна скласти букети з 5 тюльпанів та 4 троянд, якщо є в наявності 10 тюльпанів та 14 троянд?
- 2 Скільки існує чотирицифрових чисел, в яких всі цифри різні?

- 3 3 10 спортсменів тільки три призери змагань. Скільки можливо таких комбінацій?

### **Варіант 25**

- 1 Скількома способами можна скласти набір з 3 тістечок та 5 яблук, якщо є 10 тістечок та 20 яблук?
- 2 На кожній з карток надруковано одну з літер: А, М, И, Р, Т. Картки перемішано. Скільки різних трибуквенних слів можливо скласти з цих карток?
- 3 У одного учня 7 підручників з математики, у другого – 6. Скількома способами можливо обміняти 3 підручника одного учня на 3 підручника іншого?

### **Варіант 26**

- 1 Скількома способами можна створити прапор, що складається з трьох вертикальних смуг різних кольорів, якщо є шість різних кольорів матеріалу?
- 2 В класі навчається 17 учнів. Скількома способами можна призначити трьох чергових?
- 3 Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова "статистика"?

### **Варіант 27**

- 1 Скільки існує різних шестизначних телефонних номерів?
- 2 Серед членів туристичного гуртка 6 дівчинок та 7 хлопців. Для участі у змаганнях складають команду з чотирьох осіб, в яку обов'язково повинні увійти хоча б дві дівчини. Скількома способами це можливо зробити?
- 3 Скільки різних слів можливо скласти з усіх букв слова "ДОРОГА"?

### **Варіант 28**

- 1 Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 3, 5, 7, 9, 1, якщо кожен цифру використовувати лише один раз?
- 2 У відділенні банку працюють 15 спеціалістів. Керівник відділення вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Скількома способами можливо це зробити?
- 3 Скільки слів можна скласти з усіх букв слова "ХАРАКТЕРИСТИКА"?

### **Варіант 29**

- 1** В групі двадцять студентів. Скількома способами можна скласти підгрупи, в яких буде шість студентів?
- 2** Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Скількома способами він може набрати номер телефону?
- 3** В автомобілі є 7 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 7 людей можуть сісти в автомобіль, якщо місце водія можуть зайняти лише певні 3 людини?

### **Варіант 30**

- 1** Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких:
  - різні;
  - будь-які?
- 2** Скільки слів можна скласти з наступного набору карток: М, І, С, Т, О, К, Н, якщо слова містять всі запропоновані букви?
- 3** Скільки букетів по сім троянд можна зробити, якщо є в наявності десять троянд?

## Практичне заняття 11

**Тема:** Класичне означення ймовірності.  
Основні теореми теорії ймовірностей

**Мета:** навчити застосовувати формули комбінаторики для обчислення ймовірності; розглянути теореми додавання ймовірностей несумісних та довільних подій, множення ймовірностей незалежних подій та теорему про ймовірність появи хоча б однієї з подій; навчити застосовувати ці теореми в практичних задачах.

### Статистичне та класичне означення ймовірності

#### Означення 11.1

**Статистичною ймовірністю**  $P^*(A)$  події  $A$  називається відношення числа дослідів, за яких відбулася подія  $A$ , до загального числа всіх дослідів:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (11.1)$$

#### Означення 11.2.

**Класичною ймовірністю** називається відношення числа елементарних подій, що сприяють події  $A$ , до загального числа подій.

Якщо число елементарних подій, що сприяють події  $A$ , – це  $m$ , а загальне число  $n$ , то формула класичної ймовірності має вигляд:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (11.2)$$

Всі властивості, сформульовані вище для статистичної ймовірності, поширюються і на класичну ймовірність.

**Приклад 11.1.** Протягом квітня 13 днів було сонячно, 8 днів похмуро та 9 днів йшов дощ. Яка ймовірність сонячного, похмурого та дощового дня у квітні?

**Розв’язання.** Маємо три події:  $A$  – був сонячний день,  $B$  – похмурий день,  $C$  – йшов дощ. Загальна кількість днів дорівнює  $13+8+9=30$  – це загальна кількість подій ( $n$ ). Оскільки сонячних днів було 13, то число елементарних подій, що сприяють події  $A$ , ( $m$ ) дорівнює 13. Звідси  $P(A) = \frac{13}{30}$ . Аналогічно,  $P(B) = \frac{8}{30}$  та  $P(C) = \frac{9}{30}$ .

Легко помітити, що цією формулою можна користуватися лише тоді, коли  $m$  і  $n$  – скінченні числа.

## Застосування комбінаторних формул при обчисленні ймовірностей

**Приклад 11.2.** Набираючи номер телефона, дівчинка забула три останні цифри та, пам'ятаючи лише, що вони різні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набраний правильно?

**Розв'язання.** Нехай подія  $A$  полягає в тому, що номер набраний правильно. Тоді загальна кількість подій  $n$  – це кількість комбінацій, які можна скласти з 10 цифр по 3, маючи на увазі, що порядок розташування елементів та склад комбінації мають значення. Таким умовам відповідає комбінація розміщення. За формулою (10.2):

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$$

Сприяє події лише один результат, тому  $m = 1$ . Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}.$$

**Приклад 11.3.** У групі студентів з 30 людей 17 хлопців. Для участі у змаганнях обирають навмання 6 студентів. Визначити ймовірність того, що серед них буде 2 дівчини.

**Розв'язання.** Нехай подія  $B$  полягає в тому, що серед 6 студентів 2 виявиться 2 дівчини. Тоді загальна кількість подій  $n$  – це кількість комбінацій, які можна скласти з 30 по 6, маючи на увазі, що порядок розташування елементів в комбінації не має значення. Комбінації відрізняються тільки хоча б одним елементом. Таким умовам відповідає комбінація сполучення. За формулою (10.3):

$$\begin{aligned} n = C_{30}^6 &= \frac{30!}{6!(30-6)!} = \frac{50!}{6! \cdot 24!} = \\ &= \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 593775 \end{aligned}$$

Для підрахунку сприятливих подій розмірковуємо так: серед 6 студентів– 2 дівчини, тоді їх можливо вибрати лише з 13 дівчат загальної групи, а 4 хлопця– з 17 хлопців.

$$\text{Тобто } m = C_6^2 \cdot C_{17}^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{17!}{4! \cdot 13!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 2380 = 35700$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{35700}{593775}.$$

**Приклад 11.4.** Слово "паралелограм" складене з карток, на кожній з яких написана одна літера. Картки змішують і виймають без повернення по одній. Знайти ймовірність випадку, коли літери виймаються в порядку зазначеного слова.

**Розв'язання.** Нехай подія  $C$  полягає в тому, що літери виймаються в порядку слова "паралелограм". Тоді  $P(C) = \frac{m}{n}$ , де  $n$  - кількість перестановок з 12 букв. Оскільки в слові "паралелограм" є повторення букв, то маємо перестановку з повтореннями. Звідси  $n = P_{12}(3, 2, 2) = \frac{12!}{3!2!2!} = 19958400$ . Значення  $m = 1$ . Шукана ймовірність:

$$P(C) = \frac{1}{19958400}.$$

### Операції над подіями

#### Означення 11.3.

**Сумою двох подій  $A$  і  $B$**  називають таку подію  $C$ , що відбувається тоді, коли відбувається або подія  $A$ , або подія  $B$ , або події  $A$  і  $B$  одночасно в одному експерименті. Суму подій  $A$  і  $B$  прийнято записувати в так: Добуток подій  $A$  і  $B$  прийнято записувати в так:  $C = AB$ .

#### Означення 11.4.

**Добутком двох подій  $A$  і  $B$**  називають таку подію  $C$ , що відбувається тоді, коли відбувається і подія  $A$ , і подія  $B$  одночасно в одному експерименті.

Добуток подій  $A$  і  $B$  прийнято записувати в так:  $C = AB$ .

Операції додавання та множення можуть бути узагальнені на додавання та множення декількох подій.

### Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

#### Теорема 11.1.

Нехай події  $A_1$  та  $A_2$  – несумісні, причому ймовірності цих подій відомі. Тоді ймовірність появи тільки однієї з цих подій, незалежно якої, дорівнює сумі ймовірностей подій  $A_1$  та  $A_2$ :

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (11.3)$$

**Наслідок.** Нехай події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – попарно несумісні. Тоді ймовірність появи тільки однієї з цих подій, незалежно якої, дорівнює сумі ймовірностей подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (11.4)$$

**Приклад 11.5.** Серед 13 людей 6 мають карі очі, 3 – зелені, 4 – блакитні. Яка ймовірність того, що у випадково обраної людини очі не будуть карі?

**Розв’язання.** Мати не карі очі означає мати блакитні або зелені. Оскільки всього 13 людей, то ймовірність події  $A_1$  (випадково обрана людина має зелені очі) становить  $\frac{3}{13}$ , а ймовірність події  $A_2$  (випадково обрана людина має блакитні очі) становить  $\frac{4}{13}$ . Оскільки події  $A_1$  та  $A_2$  несумісні, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{3}{13} + \frac{4}{13} = \frac{7}{13}.$$

### Повна група подій

#### Теорема 11.2.

Сума ймовірностей подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (11.5)$$

### Протилежні події

#### Означення 11.5

Дві події називають **протилежними**, якщо вони утворюють повну групу.

Якщо одну з подій позначити  $A$ , то протилежну подію позначають  $\bar{A}$ .

#### Теорема 11.3.

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (11.6)$$

### Теорема множення ймовірностей незалежних випадкових подій

#### Теорема 11.4.

Ймовірність сумісної появи двох незалежних випадкових подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

#### Теорема 11.5.

Ймовірність сумісної появи декількох **незалежних в сукупності** подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (11.7)$$

**Приклад 11.6.** Три групи складають іспит. Ймовірність того, що перша група складе іспит успішно, становить 0,9; друга – 0,6; третя – 0,8. Знайти ймовірності того, що:

- а) всі три групи складуть іспит успішно;
- б) тільки одна група складе іспит успішно;
- в) тільки дві групи складуть іспит успішно;
- г) жодна група не складе іспит успішно.

**Розв’язання.** Дано позначення подіям:

$A$  – перша група складе іспит успішно,  $B$  – друга група складе іспит успішно,  $C$  – третя група складе іспит успішно,  $D$  – всі три групи складуть іспит успішно,  $E$  – тільки одна група складе іспит успішно,  $F$  – тільки дві групи складуть іспит успішно,  $G$  – жодна група не складе іспит успішно.

а) Подія  $D$  становить добуток незалежних подій  $A$ ,  $B$  та  $C$ . Значить,  $D=ABC$ . За теоремою множення незалежних подій:

$$P(D) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,432.$$

б) Подія  $E$  – тільки одна група складе іспит успішно може статися в декількох випадках: або перша група складе іспит успішно, але друга та третя при цьому не складуть; або друга група складе іспит успішно, але перша та третя не складуть; або третя складе успішно, але друга та перша не успішно. Подія, при якій група не складала успішно, є протилежною до події скласти успішно. Тому ймовірності цих подій такі:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1; \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4; \\ P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

У вигляді логічної формули подія  $E$  надається так:  
 $E = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ . Події  $A, \bar{B}, \bar{C}, \bar{A}, B, \bar{C}, \bar{A}, \bar{B}, C$  незалежні в сукупності, для них використовуємо теорему множення незалежних подій; а події  $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}, \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}, \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$  – несумісні, тому працює теорема додавання несумісних подій. Звідси:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = \\ &= P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = \\ &= P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = \\ &= 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,116. \end{aligned}$$

в) Подія  $F$  – тільки дві групи складуть іспит успішно, може статися в таких випадках: або перша і друга складуть, але третя при цьому схибеть; або перша та третя складуть, але друга схибеть; або перша не складе, але друга і третя склали.

У вигляді формули подія  $F$  має вид:  $F = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$ . Події  $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  незалежні в сукупності, для них використовуємо теорему множення незалежних подій; а події  $A \cdot B \cdot \bar{C}, A \cdot \bar{B} \cdot C, \bar{A} \cdot B \cdot C$  — несумісні, тому працює теорема додавання несумісних подій. Звідси:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C) = \\ &= P(A \cdot B \cdot \bar{C}) + P(A \cdot \bar{B} \cdot C) + P(\bar{A} \cdot B \cdot C) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,444. \end{aligned}$$

г) Подія  $G$  — жодна група не складе іспит успішно, являє собою добуток трьох незалежних подій: перша група не складе іспит, друга група не складе іспит, і третя також не складе. Звідси  $G = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ .

$$P(G) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,008.$$

Цікаво те, що події  $D, E, F$  та  $G$  утворюють повну групу подій, оскільки вони перераховують всі можливі в даній ситуації (постріл трьох стрілків) події, тобто, утворюють простір елементарних подій. Виходячи з цього, сума ймовірностей цих подій повинна дорівнювати одиниці:

$$P(D) + P(E) + P(F) + P(G) = 0,432 + 0,116 + 0,444 + 0,008 = 1$$

### Ймовірність появи хоча б однієї з подій

#### Теорема 11.6.

Ймовірність появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних до них подій  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (11.8)$$

Якщо позначити ймовірності протилежних подій  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то формула (11.8) стає наступною:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (11.9)$$

**Приклад 11.7.** Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий — 7 разів, третій — 9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесмену кредит?

**Розв'язання.** Нехай подія  $A_i$  –  $i$ -й банк виділить бізнесмену кредит,  $\overline{A_i}$  –  $i$ -й банк не виділить бізнесмену кредит,  $i = 1, 2, 3$ ; подія  $A$  – хоча б один банк виділить бізнесмену кредит. Ймовірність того, що  $i$ -й банк виділить бізнесмену кредит:

$$P(A_1) = \frac{6}{10}, \quad P(A_2) = \frac{7}{10}, \quad P(A_3) = \frac{9}{10}.$$

Ймовірність того, що  $i$ -й банк не виділить бізнесмену кредит:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10};$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10};$$

$$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

Шукана ймовірності буде дорівнювати:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = 1 - 0,012 = 0,988.$$

### Частковий випадок формули (11.9):

Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  мають однакову ймовірність, яка дорівнює  $p$ , то ймовірність появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (11.10)$$

**Приклад 11.8.** Ймовірність виграти в шаховій партії для одного учасника становить 0,6. Знайти ймовірність того, що він виграє хоча б в одній з шістьох ігор турніру.

**Розв'язання.** В цьому прикладі, на відміну від попереднього, ймовірність виграшу в конкретній партії, однакова, тобто,  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0,6$ . Тоді ймовірності того, що цей учасник не виграє в партії, теж однакові і дорівнюють  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0,4$ . Якщо подія  $M$  – виграє хоча б в одній з шістьох ігор турніру, то

$$P(M) = 1 - 0,4^6 = 1 - 0,004096 = 0,995904.$$

### Теоретичні запитання

1. Дати визначення поняттю ймовірність події.
2. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?
3. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?

4. Які значення може приймати ймовірність випадкової події?
5. Які випадкові події називаються несумісними?
6. Надати класичну формулу розрахунку ймовірності події
7. Дати визначення поняттю сума двох подій.
8. Дати визначення поняттю сума декількох подій.
9. Дати визначення поняттю добуток двох подій.
10. Дати визначення поняттю добуток декількох подій.
11. Які відомі властивості операцій додавання і множення?
12. Які події називаються протилежними?
13. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
14. Які теореми теорії ймовірностей називають основними?
15. Сформулювати теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
16. Сформулювати теорему додавання ймовірностей довільних подій.
17. Які дві події називаються незалежними?
18. Сформулювати теорему множення ймовірностей двох незалежних подій.
19. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї з  $n$  попарно незалежних подій, якщо ймовірності цих подій різні?
20. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї з  $n$  попарно незалежних подій, якщо ймовірності цих подій однакові?
21. В чому полягає принцип значущості подій?

### **Завдання для самостійної роботи**

1. Яка ймовірність скласти слово «МІСТО» з наступного набору карток:
  - а) «М», «І», «С», «Т», «О»;
  - б) «М», «І», «С», «Т», «О», «М», «Т», «Т»;
  - в) «М», «І», «Д», «С», «Т», «О», «М», «Д», «Д»?
- 2) Знайти ймовірність появи на верхніх гранях двох кинутих гральних кубиків суми очок, що дорівнює 6.
- 3) В магазині є 20 кг цукерок, серед яких 8 кг по 50 грн., 10 кг по 40 грн. і 2 кг по 30 грн. Навмання купують 2 кг цукерок. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 80 грн.?
- 4). З 10 цукерок 6 шоколадних. Знайти ймовірність того, що з 4 навмання взятих цукерок буде шоколадних:
  - а) 2;
  - б) всі;
  - в) хоча б одна.
- 5). Підкинуто три гральних кубика. Знайти ймовірність того, що:
  - а) на кожному кубі з'явиться цифра 5;

- б) випадуть всі різні цифри;
- в)т випадуть всі однакові цифри.

6). Ймовірності успішного складання екзамену становить 0,8 для першої групи, 0,4 для другої та 0,6 для третьої групи. Знайти ймовірність того, що успішно склали екзамен:

- а) одна група;
- б) дві;
- в) всі;
- г) жодна;
- д) хоча б одна група.

### Індивідуальні завдання

#### Варіант 1

- 1 В наборі з 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей дві виявляться нестандартними.
- 2 Група з 10 чоловіків та 6 жінок ділиться випадково на 2 частини. Знайти ймовірність того, що в кожній частині буде по 5 чоловіків і 3 жінки.
- 3 На книжковій полиці є 26 книг, серед яких 8 книг по 5 грн., 12 – по 4 грн. і 6 – по 3 грн. Навмання беруть дві книги. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 8 грн.?
- 4 Ймовірність влучення у мішень кожним із трьох стрільків дорівнює 0,8; 0,7 і 0,6 відповідно. Знайти ймовірність того, що при одночасному залпі у мішень влучать рівно два стрільки.
- 5 У ящику знаходиться 10 стандартних деталей і 5 бракованих. Із ящика випадковим чином дістають 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих:
  - 1) всі стандартні;
  - 2) всі браковані;
  - 3) 3 стандартні і 1 бракована;
  - 4) 1 стандартна і 3 бракованих;
  - 5) всі деталі однієї якості (всі стандартні або всі браковані);
  - 6) хоча б одна стандартна;
  - 7) хоча б одна бракована.
- 6 Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде хоча б один раз.

## Варіант 2

- 1 В кошику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є біла.
- 2 Гральний кубик підкидають два рази. Яка ймовірність, що двічі випаде парна цифра?
- 3 У лотереї 50 білетів, з них 5 – із грошовими виграшами, 15 – з речовими, решта – без виграшу. Яка ймовірність того, що два придбаних білети будуть з виграшем?
- 4 Ймовірність того, що кожний із трьох студентів погодиться прийняти участь у конкурсі становить 0,8; 0,7 і 0,5 відповідно. Знайти ймовірність, що із цих студентів рівно два погодяться прийняти участь у конкурсі.
- 5 У коробці знаходиться 12 білих кульок і 8 чорних. Із коробки випадковим чином дістають 5 кульок. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих кульок:
  - 1) всі білі;
  - 2) всі чорні;
  - 3) 3 білі і 2 чорна;
  - 4) 2 білі і 3 чорні;
  - 5) всі кульки одного кольору (всі білі або всі чорні);
  - 6) хоча б одна біла;
  - 7) хоча б одна чорна.
- 6 В родині троє дітей. Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б один хлопчик. Ймовірності народження хлопчика і дівчинки вважати рівними  $\frac{1}{2}$ .

## Варіант 3

- 1 На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з літер: А, Н, Р, У. Картки перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «урна».
- 2 Підкинуто 2 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що з'явиться однакова кількість очок на обох кубиках.
- 3 Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібний номер.
- 4 На картках написані літери К, Р, І, Т. По черзі витягаються три картки і

викладаються зліва на право. Знайти ймовірність того, що буде викладено слово КІТ.

- 5 Група студентів складається із 10 юнаків і 6 дівчат. Із складу групи випадковим чином обирають 4 студентів. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:
- 1) всі юнаки;
  - 2) всі дівчата;
  - 3) 3 юнака і 1 дівчина;
  - 4) 1 юнак і 3 дівчини;
  - 5) всі обрані однієї статі (всі юнаки або всі дівчата);
  - 6) хоча б одна дівчина;
  - 7) хоча б один юнак.
- 6 Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що за три постріли відбудеться хоча б одне влучення.

#### Варіант 4

- 1 Гральний кубик підкидають три рази. Яка ймовірність, що всі три рази випадуть різні цифри?
- 2 Куб, усі грані якого пофарбовано, розрізали на 1000 однакових кубиків. Знайти ймовірність того, що обраний навмання кубик має:
  - дві пофарбовані грані;
  - три пофарбовані грані.
- 3 Студент знає 25 із 30 запитань навчальної програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді хоча б на 2 запитання, якщо в екзаменаційному білеті 3 запитання.
- 4 В гаражі знаходиться 4 автомобіля. Ймовірності того, що кожний із автомобілів знаходиться у справному стані дорівнюють 0,9; 0,8; 0,7 і 0,75. Знайти ймовірність того, що у справному стані знаходяться рівно 3 автомобілі.
- 5 На складі знаходиться 30 виробів першого гатунку і 20 виробів другого гатунку. Зі складу до торгівельної мережі випадковим чином відвантажують 3 вироби. Знайти ймовірність того, що серед відвантажених виробів:
  - 1) всі першого гатунку;
  - 2) всі другого гатунку;

- 3) 2 вироби першого гатунку і 1 виріб другого гатунку;
  - 4) 1 виріб першого гатунку і 2 вироби другого гатунку;
  - 5) всі відвантажені вироби однакової якості (всі першого гатунку або всі другого гатунку);
  - 6) хоча б один виріб першого гатунку;
  - 7) хоча б один виріб другого гатунку.
- 6 Прилад обладнаний двома запобіжниками, які спрацьовують у разі виникнення позаштатної ситуації з ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що у разі аварії спрацює хоча б один запобіжник.

### Варіант 5

- 1 В наборі із 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5 деталей нестандартних не виявиться.
- 2 Яка ймовірність скласти слово «МІСТО» з наступного набору карток: «М», «І», «С», «Т», «О»?
- 3 Знайти ймовірність появи на верхніх гранях двох кинутих гральних кубиків суми очок, що дорівнює 6.
- 4 Ймовірності того, що студент розв'яже кожну із трьох задач самостійної роботи дорівнюють 0,8; 0,7 і 0,65 відповідно. Знайти ймовірність того, що студент розв'яже рівно 2 задачі із трьох запропонованих.
- 5 У зборах приймають участь 20 чоловіків і 15 жінок. Із складу учасників зборів випадковим чином обирають делегацію із 4 осіб. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:
  - 1) всі чоловіки;
  - 2) всі жінки;
  - 3) 3 чоловіки і 1 жінка;
  - 4) 1 чоловік і 3 жінки;
  - 5) всі обрані однієї статі (всі чоловіки або всі жінки);
  - 6) хоча б одна жінка;
  - 7) хоча б один чоловік.
- 6 Ймовірність влучити у мішень для першого стрілка становить 0,8, а для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що при одночасному пострілі хоча б один з них влучить у мішень.

### Варіант 6

- 1 В магазині є 20 кг цукерок, серед яких 8 кг по 50 грн., 10 кг по 40 грн. і

- 2 кг по 30 грн. Навмання купують 2 кг цукерок. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 80 грн.?
- 2 Яка ймовірність скласти слово «КИЇВ» з наступного набору букв: «К», «А», «И», «О», «Ї», «В», «Л»?
- 3 В ящику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль. Навмання взяли 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони білі.
- 4 Пасажир забув дві цифри із коду до комірки у камері схову, але пам'ятає, що всі цифри коду були різними. Знайти ймовірність того, що він відкриє комірку з першої спроби, якщо код складається із 4 цифр.
- 5 Транспортна компанія володіє автобусами двох марок: 8 автобусами марки А і 7 автобусами марки Б. Для обслуговування делегації випадковим чином обираються 3 автобуси. Знайти ймовірність того, що серед обраних автобусів:
- всі автобуси марки А;
  - всі автобуси марки Б;
  - всі автобуси однієї марки (всі марки А або всі марки Б);
  - 2 автобуси марки А і 1 автобус марки Б;
  - 1 автобус марки А і 2 автобуси марки Б;
  - хоча б один автобус марки А;
  - хоча б один автобус марки Б.
- 6 Ймовірність виграти по кожному із лотерейних білетів 0,1. Придбано 5 білетів. Знайти ймовірність того, що із них хоча б один виграшний.

### Варіант 7

- 1 Кожна з літер слова «КАРЕТА» записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Яка ймовірність знову скласти це слово?
- 2 Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на обох кубиках буде різна кількість очок.
- 3 В групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. По списку навмання відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них 5 відмінників.
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова УНІВЕРСИТЕТ. Картки перемішуються, 5 карток дістаються випадковим чином і викладаються зліва на право. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ТУНІС.
- 5 Транспортна компанія володіє 10 вантажними і 5 легковими

автомобілями. Для участі у параді випадковим чином обираються 3 автомобілі. Знайти ймовірність того, що серед обраних автомобілів:

- всі автомобілі вантажні;
- всі автомобілі легкові;
- всі автомобілі одного виду (всі вантажні або всі легкові);
- 2 вантажних автомобілі і 1 легковий автомобіль;
- 1 вантажний і 2 легкових автомобілів;
- хоча б один вантажний автомобіль;
- хоча б один легковий автомобіль.

- 6 Ймовірність того, що насіння проросте складає 0,9. Знайти ймовірність того, що серед двох насінин хоча б одна проросте.

### Варіант 8

- 1 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 - з України. Яка ймовірність скласти групу з 5 спортсменів, якщо в неї буде входити тільки 2 українця?

- 2 В наборі з 20 виробів 5 бракованих. Скількома способами можна вибрати 4 вироби, з яких 2 якісні?

- 3 Мається 10 карток, на кожній з яких написана одна цифра від 0 до 9. Яка ймовірність скласти п'ятицифрове число, в яких всі цифри непарні?

Ймовірності виходу на роботу для 4 робітників складають 0,9; 0,8; 0,7 і 0,85 відповідно. Знайти ймовірність, що на роботу вийшло рівно три робітника, якщо відомо, що другий вийшов на роботу.

Пристрій містить 3 запобіжники, які виробляються двома фірмами. У коробці 13 запобіжників виробництва першої фірми і 12 – другої. Складальник випадковим чином виймає запобіжники із коробки і установлює їх у пристрій. Знайти ймовірність того, що будуть встановлені:

- 1) всі запобіжники першої фірми;
- 2) всі запобіжники другої фірми;
- 3) всі запобіжники однакового виробництва (першої або другої фірми);
- 4) 1 запобіжник першої фірми і 2 запобіжники другої фірми;
- 5) 2 запобіжники першої фірми і 1 запобіжник другої фірми;
- 6) хоча б один запобіжник першої фірми;
- 7) хоча б один запобіжник другої фірми.

Ймовірність того, що студент відповість на додаткове запитання на

іспиті складає 0,75. Знайти ймовірність того, що студент відповість хоча б на одне додаткове запитання із трьох.

### Варіант 9

- 1 На кожній з 8 карток надрукована одна з літер: А, А, З, І, К, Л, Л, М. Картки перевернуті та перемішані. Знайти ймовірність того, що на п'яти навмання взятих і розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «ЗАЛІК».
- 2 В цеху працюють 6 чоловіків та 4 жінки. По табельних номерах навмання відібрано 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних людей виявиться 3 жінки.
- 3 На книжковій полиці є 20 книг, серед яких 6 книг по 5 грн., 10 – по 4 грн. і 4 – по 3 грн. Навмання беруть дві книги. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 8 грн.
- 4 Сесія складається із трьох іспитів з вищої математики, фізики і техніки безпеки. Ймовірності скласти які для студента дорівнюють 0,7; 0,8 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що студент буде мати рівно одну академічну заборгованість.
- 5 У студентському клубі наявні квитки на 2 вистави: 25 квитків на першу виставу і 30 квитків на другу виставу. На групу студентів випадковим чином видається 5 квитків. Знайти ймовірність того, що серед виданих квитків:
  - 1) всі квитки будуть на першу виставу;
  - 2) всі квитки будуть на другу виставу;
  - 3) всі квитки будуть на одну і ту саму виставу (першу або другу);
  - 4) 3 квитки на першу виставу і 2 квитки на другу виставу;
  - 5) 2 квитки на першу виставу і 3 квитки на другу виставу;
  - 6) хоча б один квиток на першу виставу;
  - 7) хоча б один квиток на другу виставу.
- 6 Ймовірність того, що вистава сподобається конкретному глядачу становить 0,8. Знайти ймовірність того, що серед трьох глядачів вистава сподобається хоча б одному.

### Варіант 10

- 1 Яка ймовірність скласти букети з 5 тюльпанів та 4 троянд, якщо є в наявності 10 тюльпанів та 14 троянд?

- 2 Яка ймовірність скласти чотирицифрове число, в якому всі цифри різні?
- 3 Гральний кубик підкидають два рази. Яка ймовірність, що двічі випаде непарна цифра?
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова ЙМОВІРНІСТЬ. Картки перемішуються, 5 карток дістаються випадковим чином і викладаються зліва направо. Знайти ймовірність того, що буде складено слово РІВНО.
- 5 На складі туристичної бази зберігаються сухі пайки, що виробляються двома компаніями: 23 пайки виробництва першої компанії і 12 – другої. Туристу перед походом видаються 3 сухих пайки. Знайти ймовірність того, що будуть видані:
  - 1) всі пайки виробництва першої компанії;
  - 2) всі пайки виробництва другої компанії;
  - 3) всі пайки однакового виробництва (першої або другої компанії);
  - 4) 1 пайок виробництва першої компанії і 2 пайки другої компанії;
  - 5) 2 пайки виробництва першої компанії і 1 пайок другої компанії;
  - 6) хоча б один пайок виробництва першої компанії;
  - 7) хоча б один пайок виробництва другої компанії.
- 6 Ймовірність того, що призовник придатний до проходження служби у десантних військах становить 0,4. Знайти ймовірність того, що серед трьох призовників хоча б один придатний до проходження служби у десантних військах.

### Варіант 11

- 1 Яка ймовірність скласти набір з 3 тістечок та 5 яблук, якщо є 10 тістечок та 20 яблук?
- 2 На кожній з карток надруковано одну з літер: А, М, И, Р, Т. Картки перемішано. Яка ймовірність скласти з цих карток слово РИТМ?
- 3 Гральний кубик підкидають три рази. Яка ймовірність, що всі три рази випадуть однакові цифри?
- 4 Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години його уваги буде потребувати перший верстат, дорівнює 0,7, другий – 0,5, третій – 0,75. Визначити ймовірність того, що протягом години уваги робітника будуть вимагати рівно два верстати.
- 5 У ящику знаходиться 25 стандартних деталей і 10 бракованих. Із ящика випадковим чином дістають 5 деталей. Знайти

ймовірність того, що серед вийнятих деталей:

- 1) всі стандартні;
- 2) всі браковані;
- 3) 3 стандартні і 2 браковані;
- 4) 2 стандартні і 3 браковані;
- 5) всі деталі однієї якості (всі стандартні або всі браковані);
- 6) хоча б одна стандартна;
- 7) хоча б одна бракована.

- 6 Залік полягає у відповіді на 2 запитання. Ймовірність того, що студент відповість на перше запитання дорівнює 0,8, а на друге – 0,6. Знайти ймовірність того, що студент здасть залік, якщо для цього потрібно відповісти хоча б на одне запитання.

### Варіант 12

- 1 Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума отриманих очок буде непарною.
- 2 Студент знає 30 із 50 питань навчальної програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на 2 питання із 3-х його екзаменаційного білета.
- 3 Яка ймовірність скласти слово ТИСК, переставляючи літери слова "статистика"?
- 4 Ймовірність того, що студент відповість на перше з трьох запитань екзаменаційного білету, дорівнює 0,95, на друге – 0,9 і на третє – 0,85. Визначити ймовірність того, що студент складе іспит. Якщо для цього йому необхідно відповісти рівно на два запитання.
- 5 У коробці знаходиться 18 білих кульок і 7 чорних. Із коробки випадковим чином дістають 4 кульки. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих кульок:
  - 1) всі білі;
  - 2) всі чорні;
  - 3) 3 білі і 1 чорна;
  - 4) 1 біла і 3 чорні;
  - 5) всі кульки одного кольору (всі білі або всі чорні);
  - 6) хоча б одна біла;
  - 7) хоча б одна чорна.
- 6 Для повідомлення про аварійну ситуацію встановлено два

сигналізатори, кожний з яких спрацьовує із ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що при виникненні аварійної ситуації спрацює хоча б один сигналізатор.

### Варіант 13

- 1 Яка ймовірність згадати шестизначний телефонний номер, якщо пам'ятати, що всі цифри в номері різні?
- 2 Серед членів туристичного гуртка 6 дівчинок та 7 хлопців. Для участі у змаганнях складають команду з чотирьох осіб, в яку обов'язково повинні увійти хоча б дві дівчини. Яка ймовірність це зробити?
- 3 В урні знаходиться 3 білих та 5 зелених куль. З урни навмання дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
- 4 Четверо студентів обирають для себе один із 7 туристичних маршрутів. Кожний маршрут кожним студентом може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що студенти оберуть різні туристичні маршрути.
- 5 Група студентів складається із 15 юнаків і 10 дівчат. Із складу групи випадковим чином обирають 3 студентів. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:
  - 1) всі юнаки;
  - 2) всі дівчата;
  - 3) 2 юнака і 1 дівчина;
  - 4) 1 юнак і 2 дівчини;
  - 5) всі обрані однієї статі (всі юнаки або всі дівчата);
  - 6) хоча б одна дівчина;
  - 7) хоча б один юнак.
- 6 Робітник обслуговує чотири верстати. Ймовірність того, що протягом годин перший верстат буде потребувати уваги робітника дорівнює 0,1, другий – 0,15, третій – 0,05, четвертий – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом години хоча б один верстат буде потребувати уваги робітника.

### Варіант 14

- 1 Яка ймовірність скласти число 793 з наступного набору цифр: 3, 3, 5, 7, 9, 1?
- 2 У відділенні банку працюють 15 спеціалістів, з них 4 жінки. Керівник

відділення вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Яка ймовірність того, що в цю групу потраплять принаймні 3 жінки?

- 3 На кожній із 6 однакових карток надруковано одну з літер: А, Е, Н, О, С, Ц. Картки перемішані та перевернуті. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розташованих зліва направо п'яти картках можна прочитати слово «СОНЦЕ».
- 4 Кожний із трьох водіїв обирає собі для придбання новий автомобіль однієї із 6 марок. Автомобіль кожної марки кожним водієм може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що всі водії оберуть автомобілі різних марок.
- 5 На базі знаходиться 25 виробів першого ґатунку і 15 виробів другого ґатунку. Зі складу до торгівельної мережі випадковим чином відвантажують 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відвантажених виробів:
- 1) всі першого ґатунку;
  - 2) всі другого ґатунку;
  - 3) 2 вироби першого ґатунку і 3 вироби другого ґатунку;
  - 4) 3 вироби першого ґатунку і 2 вироби другого ґатунку;
  - 5) всі відвантажені вироби однакової якості (всі першого ґатунку або всі другого ґатунку);
  - 6) хоча б один виріб першого ґатунку;
  - 7) хоча б один виріб другого ґатунку.
- 6 Гральний кубик підкидається чотири рази. Знайти ймовірність того, що за ці чотири підкидання грань із 6 очками з'явиться хоча б один раз.

### Варіант 15

- 1 В ящику знаходиться 3 білих та 2 чорних кульки. З ящика навмання дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки одного кольору.
- 2 Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність, що він правильно набрав номер телефону?
- 3 В магазині є 25 кг цукерок, серед яких 8 кг по 50 грн., 10 кг по 40 грн. і 7 кг по 30 грн. Навмання купують 2 кг цукерок. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 80 грн.?

- 4 Ймовірність виконати норматив для кожного із трьох спортсменів становить 0,8; 0,7 і 0,75 відповідно. Знайти ймовірність, що рівно два спортсмени виконають норматив.
- 5 У зборах приймають участь 25 чоловіків і 20 жінок. Із складу учасників зборів випадковим чином обирають делегацію із 4 осіб. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:
- 1) всі чоловіки;
  - 2) всі жінки;
  - 3) 3 чоловіки і 1 жінка;
  - 4) 1 чоловіки і 3 жінки;
  - 5) всі обрані однієї статі (всі чоловіки або всі жінки);
  - 6) хоча б одна жінка;
  - 7) хоча б один чоловік.
- 6 Троє друзів здають іспит. Ймовірність задати іспит для першого товариша дорівнює 0,8; для другого – 0,7 і для третього – 0,5. Знайти ймовірність того, що іспит здасть хоча б один із друзів.

### Варіант 16

- 1 В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них лише одна чорна.
- 2 Яка ймовірність скласти слово МІСТО з наступного набору карток: М, І, С, Т, О, К, Н?
- 3 У лотереї 40 білетів, з них 15 – із грошовими виграшами, 10 – з речовими, решта – без виграшу. Яка ймовірність того, що два придбаних білета будуть з виграшем?
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова ТЕОРЕМА. Картки перемішуються, 3 картки дістаються випадковим чином і викладаються з ліва на право. Знайти ймовірність того, що буде складено слово МЕТР.
- 5 Транспортна компанія володіє автобусами двох марок: 8 автобусами марки А і 7 автобусами марки Б. Для обслуговування делегації випадковим чином обираються 4 автобуси. Знайти ймовірність того, що серед обраних автобусів:
- всі автобуси марки А;
  - всі автобуси марки Б;
  - всі автобуси однієї марки (всі марки А або всі марки Б);

- 3 автобуси марки А і 1 автобус марки Б;
  - 1 автобус марки А і 3 автобуси марки Б;
  - хоча б один автобус марки А;
  - хоча б один автобус марки Б.
- 6 Одночасно підкидаються 5 монет. Знайти ймовірність того, що "герб" з'явиться хоча б на одній монеті.

### Варіант 17

- 1 Із 12 питань теми студент вивчив 6. Знайти ймовірність того, що з 5 запитань він знає відповіді на 3.
- 2 Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що добуток отриманих очок буде непарним.
- 3 На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з цифр: 4, 6, 8, 0. Картки перемішано. Яка ймовірність скласти число 68?
- 4 Чоловік забув дві останні цифри поштового індексу, який складається із 5 цифр. Але пам'ятає, що вони були різними. Знайти ймовірність того, що він з першої спроби напише індекс правильно.
- 5 Транспортна компанія володіє 15 вантажними і 20 легковими автомобілями. Для участі у параді випадковим чином обираються 4 автомобілі. Знайти ймовірність того, що серед обраних автомобілів:
- всі автомобілі вантажні;
  - всі автомобілі легкові;
  - всі автомобілі одного виду (всі вантажні або всі легкові);
  - 3 вантажних автомобілі і 1 легковий автомобіль;
  - 1 вантажний і 3 легкових автомобілів;
  - хоча б один вантажний автомобіль;
  - хоча б один легковий автомобіль.
- 6 Пристрій складається із 3 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови першого елемента дорівнює 0,15; другого – 0,2; третього – 0,1. Знайти ймовірність того, що хоча б один елемент буде працювати.

### Варіант 18

- 1 В урні знаходиться 3 білих та 2 чорних кульки. З урни дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

- 2 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 дівчини. Складають групу з 5 спортсменів. Яка ймовірність того, що в неї буде 3 дівчини?
- 3 Яка ймовірність вгадати задумане трицифрове число, в якому всі цифри різні?
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова СТАТИСТИКА. Картки перемішуються, 4 картки дістаються випадковим чином і викладаються з ліва на право. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ТИСК.
- 5 Пристрій містить 3 запобіжники, які виробляються двома фірмами. У коробці 11 запобіжників виробництва першої фірми і 14 – другої. Складальник випадковим чином виймає запобіжники із коробки і устатковує їх у пристрій. Знайти ймовірність того, що будуть встановлені:
- 1) всі запобіжники першої фірми;
  - 2) всі запобіжники другої фірми;
  - 3) всі запобіжники однакового виробництва (першої або другої фірми);
  - 4) 1 запобіжник першої фірми і 2 запобіжники другої фірми;
  - 5) 2 запобіжники першої фірми і 1 запобіжник другої фірми;
  - 6) хоча б один запобіжник першої фірми;
  - 7) хоча б один запобіжник другої фірми.
- 6 На автовокзалі очікують прибуття двох автобусів. Ймовірність запізнення для першого автобуса складає 0,2, а для другого – 0,15. Знайти ймовірність того, що хоча б один автобус прибуде вчасно.

### Варіант 19

- 1 В коробці знаходяться 6 однакових пронумерованих деталей. Навмання по одній дістають усі деталі. Знайти ймовірність того, що номери деталей з'являться в порядку збільшення.
- 2 В наборі з 13 олівців 8 червоних. Яка ймовірність вибрати 4 олівця, з яких 2 червоних?
- 3 Яка ймовірність вгадати задумане чотирицифрове число, в якому всі цифри парні?
- 4 Кожний із трьох товаришів обирає для іменника (четвертого товариша) один подарунок із 7 можливих варіантів. Подарунок кожного виду кожним товаришем може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що іменник отримає різні подарунки.
- 5 У студентському клубі наявні квитки на 2 вистави: 35 квитків на першу

виставу і 25 квитків на другу виставу. На групу студентів випадковим чином видається 5 квитків. Знайти ймовірність того, що серед виданих квитків:

- 1) всі квитки будуть на першу виставу;
- 2) всі квитки будуть на другу виставу;
- 3) всі квитки будуть на одну і ту саму виставу (першу або другу);
- 4) 3 квитки на першу виставу і 2 квитки на другу виставу;
- 5) 2 квитки на першу виставу і 3 квитки на другу виставу;
- 6) хоча б один квиток на першу виставу;
- 7) хоча б один квиток на другу виставу.

- 6 Ймовірність вчасно здати домашню роботу для трьох студентів дорівнює 0,8; 0,7 і 0,5 відповідно. Знайти ймовірність того, що хоча б один студент здасть домашню роботу вчасно.

### Варіант 20

- 1 В коробці знаходиться 6 однакових пронумерованих деталей. Навмання по одній дістають усі деталі. Знайти ймовірність того, що номери деталей з'являться в порядку збільшення.
- 2 Підкинуто два гральних кубика. Яка ймовірність того, що абсолютна величина різниці отриманих очок дорівнюватиме 2?
- 3 Яка ймовірність скласти слово ГРАМ з букв слова «паралелограм»?
- 4 Двоє студентів обирають для себе один із 5 факультативів. Кожний факультатив кожним студентом може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що студенти оберуть різні факультативи.
- 5 На складі туристичної бази зберігаються сухі пайки, що виробляються двома компаніями: 25 пайків виробництва першої компанії і 15 – другої. Туристу перед походом видаються 3 сухих пайки. Знайти ймовірність того, що будуть видані:
  - всі пайки виробництва першої компанії;
  - всі пайки виробництва другої компанії;
  - всі пайки однакового виробництва (першої або другої компанії);
  - 1 пайок виробництва першої компанії і 2 пайки другої компанії;
  - 2 пайки виробництва першої компанії і 1 пайок другої компанії;
  - хоча б один пайок виробництва першої компанії;
- 6 Ймовірність попадання бомби у ціль становить 0,5. Скинуто 4 бомби

знайти ймовірність того, що ціль буде вражена, якщо для цього достатньо хоча б одного влучення.

### **Варіант 21**

- 1 Кожна з літер слова «КАРЕТА» записана на окремому аркуші. Аркуші перемішані. Яка ймовірність знову скласти це слово?
- 2 Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на обох кубиках буде різна кількість очок.
- 3 В групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. По списку навмання відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них 5 відмінників.
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова УНІВЕРСИТЕТ. Картки перемішуються, 5 карток дістаються випадковим чином і викладаються зліва на право. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ТУНІС.
- 5 Транспортна компанія володіє 10 вантажними і 5 легковими автомобілями. Для участі у параді випадковим чином обираються 3 автомобілі. Знайти ймовірність того, що серед обраних автомобілів:
  - всі автомобілі вантажні;
  - всі автомобілі легкові;
  - всі автомобілі одного виду (всі вантажні або всі легкові);
  - 2 вантажних автомобілів і 1 легковий автомобіль;
  - 1 вантажний і 2 легкових автомобілів;
  - хоча б один вантажний автомобіль;
  - хоча б один легковий автомобіль.
- 6 Ймовірність того, що насіння проросте складає 0,9. Знайти ймовірність того, що серед двох насінин хоча б одна проросте.

### **Варіант 22**

- 1 У змаганні беруть участь 12 спортсменів, з них 4 - з України. Яка ймовірність скласти групу з 5 спортсменів, якщо в неї буде входити тільки 2 українця?
- 2 В наборі з 20 виробів 5 бракованих. Скількома способами можна вибрати 4 вироби, з яких 2 якісні?
- 3 Мається 10 карток, на кожній з яких написана одна цифра від 0 до 9. Яка ймовірність скласти п'ятицифрове число, в яких всі цифри непарні?

Ймовірності виходу на роботу для 4 робітників складають 0,9; 0,8; 0,7 і 0,85 відповідно. Знайти ймовірність, що на роботу вийшло рівно три робітника, якщо відомо, що другий вийшов на роботу.

Пристрій містить 3 запобіжники, які виробляються двома фірмами. У коробці 13 запобіжників виробництва першої фірми і 12 – другої. Складальник випадковим чином виймає запобіжники із коробки і устанавлює їх у пристрій. Знайти ймовірність того, що будуть встановлені:

- всі запобіжники першої фірми;
- всі запобіжники другої фірми;
- всі запобіжники однакового виробництва (першої або другої фірми);
- 1 запобіжник першої фірми і 2 запобіжники другої фірми;
- 2 запобіжники першої фірми і 1 запобіжник другої фірми;
- хоча б один запобіжник першої фірми;
- хоча б один запобіжник другої фірми.

Ймовірність того, що студент відповість на додаткове запитання на іспиті складає 0,75. Знайти ймовірність того, що студент відповість хоча б на одне додаткове запитання із трьох.

### Варіант 23

- 1 На кожній з 8 карток надрукована одна з літер: А, А, З, І, К, Л, Л, М. Картки перевернуті та перемішані. Знайти ймовірність того, що на п'яти навмання взятих і розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «ЗАЛІК».
- 2 В цеху працюють 6 чоловіків та 4 жінки. По табельних номерах навмання відібрано 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних людей виявиться 3 жінки.
- 3 На книжковій полиці є 20 книг, серед яких 6 книг по 5 грн., 10 – по 4 грн. і 4 – по 3 грн. Навмання беруть дві книги. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 8 грн.
- 4 Сесія складається із трьох іспитів з вищої математики, фізики і техніки безпеки. Ймовірності скласти які для студента дорівнюють 0,7; 0,8 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що студент буде мати рівно одну академічну заборгованість.
- 5 У студентському клубі наявні квитки на 2 вистави: 25 квитків на першу

виставу і 30 квитків на другу виставу. На групу студентів випадковим чином видається 5 квитків. Знайти ймовірність того, що серед виданих квитків:

- всі квитки будуть на першу виставу;
- всі квитки будуть на другу виставу;
- всі квитки будуть на одну і ту саму виставу (першу або другу);
- 3 квитки на першу виставу і 2 квитки на другу виставу;
- 2 квитки на першу виставу і 3 квитки на другу виставу;
- хоча б один квиток на першу виставу;
- хоча б один квиток на другу виставу.

- 6 Ймовірність того, що вистава сподобається конкретному глядачу становить 0,8. Знайти ймовірність того, що серед трьох глядачів вистава сподобається хоча б одному.

#### **Варіант 24**

- 1 Яка ймовірність скласти букети з 5 тюльпанів та 4 троянд, якщо є в наявності 10 тюльпанів та 14 троянд?
- 2 Яка ймовірність скласти чотирицифрове число, в якому всі цифри різні?
- 3 Гральний кубик підкидають два рази. Яка ймовірність, що двічі випаде непарна цифра?
- 4 На кожній картці написано по одній літері слова ЙМОВІРНІСТЬ. Картки перемішуються, 5 карток дістаються випадковим чином і викладаються зліва направо. Знайти ймовірність того, що буде складено слово РІВНО.
- 5 На складі туристичної бази зберігаються сухі пайки, що виробляються двома компаніями: 23 пайки виробництва першої компанії і 12 – другої. Туристу перед походом видаються 3 сухих пайки. Знайти ймовірність того, що будуть видані:
- всі пайки виробництва першої компанії;
  - всі пайки виробництва другої компанії;
  - всі пайки однакового виробництва (першої або другої компанії);
  - 1 пайок виробництва першої компанії і 2 пайки другої компанії;
  - 2 пайки виробництва першої компанії і 1 пайок другої компанії;
  - хоча б один пайок виробництва першої компанії;
  - хоча б один пайок виробництва другої компанії.
- 6 Ймовірність того, що призовник придатний до проходження служби у

десантних військах становить 0,4. Знайти ймовірність того, що серед трьох призовників хоча б один придатний до проходження служби у десантних військах.

### Варіант 25

- 1 Яка ймовірність скласти набір з 3 тістечок та 5 яблук, якщо є 10 тістечок та 20 яблук?
- 2 На кожній з карток надруковано одну з літер: А, М, И, Р, Т. Картки перемішано. Яка ймовірність скласти з цих карток слово РИТМ?
- 3 Гральний кубик підкидають три рази. Яка ймовірність, що всі три рази впадуть однакові цифри?
- 4 Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години його уваги буде потребувати перший верстат, дорівнює 0,7, другий – 0,5, третій – 0,75. Визначити ймовірність того, що протягом години уваги робітника будуть вимагати рівно два верстати.
- 5 У ящику знаходиться 25 стандартних деталей і 10 бракованих. Із ящика випадковим чином дістають 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед вибитих деталей:
  - всі стандартні;
  - всі браковані;
  - 3 стандартні і 2 браковані;
  - 2 стандартні і 3 браковані;
  - всі деталі однієї якості (всі стандартні або всі браковані);
  - хоча б одна стандартна;
  - хоча б одна бракована.
- 6 Залік полягає у відповіді на 2 запитання. Ймовірність того, що студент відповість на перше запитання дорівнює 0,8, а на друге – 0,6. Знайти ймовірність того, що студент здасть залік, якщо для цього потрібно відповісти хоча б на одне запитання.

### Варіант 26

- 1 Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума отриманих очок буде непарною.
- 2 Студент знає 30 із 50 питань навчальної програми. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на 2 питання із 3-х його екзаменаційного білета.

- 3 Яка ймовірність скласти слово ТИСК, переставляючи літери слова "статистика"?
- 4 Ймовірність того, що студент відповість на перше з трьох запитань екзаменаційного білету, дорівнює 0,95, на друге – 0,9 і на третє – 0,85. Визначити ймовірність того, що студент складе іспит. Якщо для цього йому необхідно відповісти рівно на два запитання.
- 5 У коробці знаходиться 18 білих кульок і 7 чорних. Із коробки випадковим чином дістають 4 кульки. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих кульок:
- всі білі;
  - всі чорні;
  - 3 білі і 1 чорна;
  - 1 біла і 3 чорні;
  - всі кульки одного кольору (всі білі або всі чорні);
  - хоча б одна біла;
  - хоча б одна чорна.
- 6 Для повідомлення про аварійну ситуацію встановлено два сигналізатори, кожний з яких спрацьовує із ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що при виникненні аварійної ситуації спрацює хоча б один сигналізатор.

### Варіант 27

- 1 Яка ймовірність згадати шестизначний телефонний номер, якщо пам'ятати, що всі цифри в номері різні?
- 2 Серед членів туристичного гуртка 6 дівчинок та 7 хлопців. Для участі у змаганнях складають команду з чотирьох осіб, в яку обов'язково повинні увійти хоча б дві дівчини. Яка ймовірність це зробити?
- 3 В урні знаходиться 3 білих та 5 зелених куль. З урни навмання дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
- 4 Четверо студентів обирають для себе один із 7 туристичних маршрутів. Кожний маршрут кожним студентом може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що студенти оберуть різні туристичні маршрути.
- 5 Група студентів складається із 15 юнаків і 10 дівчат. Із складу групи випадковим чином обирають 3 студентів. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:

- всі юнаки;
- всі дівчата;
- 2 юнака і 1 дівчина;
- 1 юнак і 2 дівчини;
- всі обрані однієї статі (всі юнаки або всі дівчата);
- хоча б одна дівчина;
- хоча б один юнак.

- 6 Робітник обслуговує чотири верстати. Ймовірність того, що протягом годин перший верстат буде потребувати уваги робітника дорівнює 0,1, другий – 0,15, третій – 0,05, четвертий – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом години хоча б один верстат буде потребувати уваги робітника.

### Варіант 28

- 1 Яка ймовірність скласти число 793 з наступного набору цифр: 3, 3, 5, 7, 9, 1?
- 2 У відділенні банку працюють 15 спеціалістів, з них 4 жінки. Керівник відділення вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Яка ймовірність того, що в цю групу потраплять принаймні 3 жінки?
- 3 На кожній із 6 однакових карток надруковано одну з літер: А, Е, Н, О, С, Ц. Картки перемішані та перевернуті. Знайти ймовірність того, що на вибитих по одній та розташованих зліва направо п'яти картках можна прочитати слово «СОНЦЕ».
- 4 Кожний із трьох водіїв обирає собі для придбання новий автомобіль однієї із 6 марок. Автомобіль кожної марки кожним водієм може бути обраний із рівною ймовірністю. Знайти ймовірність того, що всі водії оберуть автомобілі різних марок.
- 5 На базі знаходиться 25 виробів першого гатунку і 15 виробів другого гатунку. Зі складу до торгівельної мережі випадковим чином відвантажують 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відвантажених виробів:
  - всі першого гатунку;
  - всі другого гатунку;
  - 2 вироби першого гатунку і 3 вироби другого гатунку;
  - 3 вироби першого гатунку і 2 вироби другого гатунку;

- всі відвантажені вироби однакової якості (всі першого гатунку або всі другого гатунку);
- хоча б один виріб першого гатунку;
- хоча б один виріб другого гатунку.

6 Гральний кубик підкидається чотири рази. Знайти ймовірність того, що за ці чотири підкидання грань із 6 очками з'явиться хоча б один раз.

### Варіант 29

- 1 В ящику знаходиться 3 білих та 2 чорних кульки. З ящика навмання дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки одного кольору.
- 2 Абонент, набираючи номер телефону, забув три останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність, що він правильно набрав номер телефону?
- 3 В магазині є 25 кг цукерок, серед яких 8 кг по 50 грн., 10 кг по 40 грн. і 7 кг по 30 грн. Навмання купують 2 кг цукерок. Яка ймовірність того, що їхня сумарна вартість становить 80 грн.?
- 4 Ймовірність виконати норматив для кожного із трьох спортсменів становить 0,8; 0,7 і 0,75 відповідно. Знайти ймовірність, що рівно два спортсмени виконають норматив.
- 5 У зборах приймають участь 25 чоловіків і 20 жінок. Із складу учасників зборів випадковим чином обирають делегацію із 4 осіб. Знайти ймовірність того, що серед обраних студентів:
  - всі чоловіки;
  - всі жінки;
  - 3 чоловіки і 1 жінка;
  - 1 чоловіки і 3 жінки;
  - всі обрані однієї статі (всі чоловіки або всі жінки);
  - хоча б одна жінка;
  - хоча б один чоловік.
- 6 Троє друзів здають іспит. Ймовірність задати іспит для першого товариша дорівнює 0,8; для другого – 0,7 і для третього – 0,5. Знайти ймовірність того, що іспит здасть хоча б один із друзів.

### Варіант 30

- 1 В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль, які відрізняються лише

кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них лише одна чорна.

- 2    Яка ймовірність скласти слово МІСТО з наступного набору карток: М, І, С, Т, О, К, Н?
- 3    У лотереї 40 білетів, з них 15 – із грошовими виграшами, 10 – з речовими, решта – без виграшу. Яка ймовірність того, що два придбаних білета будуть з виграшем?
- 4    На кожній картці написано по одній літері слова ТЕОРЕМА. Картки перемішуються, 3 картки дістаються випадковим чином і викладаються з ліва на право. Знайти ймовірність того, що буде складено слово МЕТР.
- 5    Транспортна компанія володіє автобусами двох марок: 8 автобусами марки А і 7 автобусами марки Б. Для обслуговування делегації випадковим чином обираються 4 автобуси. Знайти ймовірність того, що серед обраних автобусів:
  - всі автобуси марки А;
  - всі автобуси марки Б;
  - всі автобуси однієї марки (всі марки А або всі марки Б);
  - 3 автобуси марки А і 1 автобус марки Б;
  - 1 автобус марки А і 3 автобуси марки Б;
  - б один автобус марки А;
  - хоча б один автобус марки Б.
- 6    Одночасно підкидаються 5 монет. Знайти ймовірність того, що "герб" з'явиться хоча б на одній монеті.

## Практичне заняття 12

Тема:

### Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез Бейєса. Повторні випробування

**Мета:** ознайомити студентів з формулою повної ймовірності і формулою гіпотез Бейєса та навчити застосовувати ці формули для розв'язання задач; показати відмінність ситуацій, при яких використовуються формули Бернуллі, Пуассона, локальна та інтегральна теореми Лапласа; навчити користуватися цими формулами.

### Умовна ймовірність

#### Означення 12.1.

**Умовною ймовірністю** події  $A$  за умови, що подія  $B$  відбулася, називається відношення  $P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ ,  $P(B) > 0$ .

Із даної рівності випливає теорема множення ймовірностей залежних подій.

#### Теорема 12.1

Якщо  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , то  $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ , тобто ймовірність добутку двох подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася.

Формулу множення ймовірностей можна узагальнити для будь-якого кінцевого числа випадкових подій.

Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – випадкові події, такі, що  $P(A_1, A_2, \dots, A_n) > 0$ , тоді

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

**Приклад 12.1.** З урни, в якій міститься 12 куль, серед яких 5 білих і 7 чорних, навмання виймають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі вони чорні?

**Розв'язання.** Нехай подія  $A_1$  – перша вийнята куля чорна,  $A_2$  – друга куля чорна та  $A_3$  – третя чорна. Позначимо подію – всі кулі чорні –  $A$ . Тоді подію  $A$  подамо у вигляді добутку залежних подій:  $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$ .

Ймовірність події  $P(A_1) = \frac{7}{12}$ , ця подія незалежна. Але, після того, як витягли

чорну кулю, всього куль стало 11, причому чорних з них вже 6. Тому подія  $A_2$  – друга вийнята куля чорна – вже залежна від першої і ймовірність  $P_{A_1}(A_2)$  умовна і дорівнює  $P_{A_1}(A_2) = \frac{6}{11}$ .

Аналогічно подія  $A_3$  залежна та її ймовірність  $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{10}$ . Отже,

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{7}{44}.$$

### Формула повної ймовірності

#### Теорема 12.2

Ймовірність події  $A$ , яка може відбутися тільки за умовою появи однієї з несумісних подій (гіпотез)  $H_i$  ( $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ), які утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей подій  $H_i$  та умовних ймовірностей настання події  $A$  за умови, що відбулася та або інша подія  $H_i$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (12.1)$$

**Приклад 12.2.** 10 студентів розв'язують задачу. З них два навчаються на «відмінно», п'ять – на «добре» і три на «задовільно». Ймовірність того, що задача буде розв'язана відмінником, дорівнює 0,9, тим, хто навчається на «добре» – 0,8; посереднім студентом – 0,5. Яка ймовірність розв'язати задачу довільним студентом?

**Розв'язання.** Подія  $A$  – розв'язана задача довільним студентом.

Тут можливі три події - гіпотези:  $H_1$  – задача розв'язана студентом, що навчається на «відмінно»;  $H_2$  – задача розв'язана студентом, що навчається на «добре»;  $H_3$  – задача розв'язана посереднім студентом. Очевидно, що події  $H_1, H_2, H_3$  несумісні й утворюють повну групу, а їх ймовірності становлять:  $P(H_1) = 0,2$  (в умові указано дві людини з 10),  $P(H_2) = 0,5$  та  $P(H_3) = 0,3$ . Відповідні умовні ймовірності події  $A$  складають:  $P_{H_1}(A) = 0,9$ ,  $P_{H_2}(A) = 0,8$  та  $P_{H_3}(A) = 0,5$ . Тоді за формулою повної ймовірності (12.1) маємо:

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,18 + 0,4 + 0,15 = 0,73.$$

**Приклад 12.3.** Є два ящика: у першому знаходиться 6 чорних та 4 білих куль; у другому – 5 чорних та 7 білих. З першого ящика переклали в другий одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другого ящика навмання беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

**Розв'язання.** Подія  $A$  – з другого ящика взято білу кулю. Цей результат залежить від кольору перекладеної кулі із першого ящика. Можуть бути дві гіпотези:  $H_1$  – із першого ящика перекладено білу кулю та  $H_2$  – із першого ящика перекладено чорну кулю. Ці події несумісні і одна з них обов'язково відбудеться. Оскільки всього в першому ящику 10 куль, а білих куль 4, то ймовірність першої гіпотези  $P(H_1) = \frac{4}{10}$ , другої –  $P(H_2) = \frac{6}{10}$ . Якщо відбудеться подія  $H_1$ , тобто, із першого ящика перекладено білу кулю, то в другому ящику стане 13 куль, серед яких тепер вже буде 8 білих. Отже, умовна ймовірність, за умовою, що відбудеться гіпотеза  $H_1$ , дорівнює  $P_{H_1}(A) = \frac{8}{13}$ . Якщо відбудеться подія  $H_2$ , тобто, з першого ящика перекладено чорну кулю, то в другому ящику стане 13 куль, але кількість білих куль не зміниться і залишиться 7. Тому умовна ймовірність, за умовою, що відбудеться гіпотеза  $H_2$ , дорівнює  $P_{H_2}(A) = \frac{7}{13}$ .

$$\text{За формулою повної ймовірності (12.1)} \quad P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{13} + \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{13} = \frac{74}{130}.$$

**Приклад 12.4.** На першому курсі навчається у два рази менше студентів, ніж на другому та у три рази менше, ніж на третьому. Ймовірність того, що на першому курсі навчаються дівчата, становить 0,3; на другому – 0,7 та 0,6 – на третьому. Обчисліть ймовірність того, що один випадково обраний студент (з будь-якого курсу) є дівчина.

**Розв'язання.** Позначимо шукану подію  $B$  – один випадково обраний студент є дівчина. Ймовірність події  $B$  залежить від того, яка з трьох гіпотез відбудеться. Кількість гіпотез співпадає з кількістю курсів: 3. Для обчислення ймовірностей гіпотез позначимо  $x$  – кількість студентів, які навчаються на першому курсі. Тоді кількість студентів, які навчаються на другому курсі  $2x$ , а на третьому  $3x$ . Ймовірність того, що випадково обраний студент буде з першого курсу, дорівнює  $P(H_1) = \frac{x}{x+2x+3x} = \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$ ; з другого –  $P(H_2) = \frac{2x}{x+2x+3x} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$ ; з третього –  $P(H_3) = \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}$ . Звернемо увагу, що  $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ , оскільки гіпотези складають повну групу подій. Умовні ймовірності задано за умовою і дорівнюють:  $P_{H_1}(B) = 0,3$ ,  $P_{H_2}(B) = 0,7$ ,  $P_{H_3}(B) = 0,6$ .

$$\text{За формулою повної ймовірності (12.1)} \quad P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{35}{60}.$$

**Приклад 12.5.** В спортивному залі було 10 м'ячів, з яких 6 нових. Для першої гри взяли 3 м'яча, не повертаючи їх назад. Для другої гри взяли знову 3 м'яча. Знайти ймовірність того, що всі м'ячі, які взяли для другої гри, будуть новими.

**Розв'язання.** Нехай подія  $A$  – всі м'ячі, які взяли для другої гри, будуть новими. Ймовірність шуканої події залежить від того, які м'ячі взяли для першої гри. Вони можуть бути: всі нові (гіпотеза  $H_1$ ), з трьох м'ячів один новий та два старих (гіпотеза  $H_2$ ), два нових та один старий (гіпотеза  $H_3$ ), всі м'ячі старі (гіпотеза  $H_4$ ).

Знайдемо ймовірність гіпотези  $H_1$  за допомогою формули класичної ймовірності та комбінаторної формули для обчислення сполучень:

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \text{ де } m = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20, \quad n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120,$$

$$P(H_1) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Ймовірності гіпотез  $H_2, H_3, H_4$  шукаємо аналогічно (значення  $n$  однакове для всіх гіпотез).

$$P(H_2) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{120} = \frac{6 \cdot 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}, \quad P(H_3) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{120} = \frac{15 \cdot 4}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2},$$

$$P(H_4) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Ці гіпотези становлять повну групу подій, переконуємося в цьому:

$$\frac{20}{120} + \frac{36}{120} + \frac{60}{120} + \frac{4}{120} = 1.$$

Розглянемо умовні ймовірності. Якщо відбулася перша гіпотеза, то перед другою грою в спортивному залі стало 7 м'ячів, з яких 3 нових. Тому ймовірність обрати 3 нових м'яча становить  $P_{H_1}(A) = \frac{m}{n}$ , де  $m = C_3^3 = 1$ ,

$$n = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 35. \text{ Звідси } P_{H_1}(A) = \frac{1}{35}. \text{ Якщо відбулася друга гіпотеза, то}$$

перед другою грою в спортивному залі стало 7 м'ячів, з яких 5 нових. Тоді

$$P_{H_2}(A) = \frac{C_5^3}{35} = \frac{5!}{35 \cdot 3!2!} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}. \text{ При третій гіпотезі: залишилося 7 м'ячів, з яких 4}$$

нових. Відповідно  $P_{H_3}(A) = \frac{C_4^3}{35} = \frac{4}{35}$ . При четвертій – з 7 м'ячів 3 нових, тому

$$P_{H_4}(A) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35}. \text{ За формулою повної ймовірності:}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{35} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{35} + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{35} =$$

$$= \frac{1}{210} + \frac{6}{70} + \frac{4}{70} + \frac{1}{1050} = \frac{16}{1050}.$$

### Формула гіпотез Бейєса.

У попередній формулі повної ймовірності передбачалось, що події  $H_i$  (гіпотези) несумісні, мають із деяких міркувань відомі ймовірності, а також відомими вважаються умовні ймовірності  $P_{H_i}(A)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Далі припустимо, що проведено експеримент, у результаті якого відбулася подія  $A$ . Тоді виникає питання про переоцінку ймовірностей виконання гіпотез  $H_i$ , тобто обчислення ймовірностей  $P_A(H_i)$ .

Формули для обчислення ймовірностей гіпотез називаються формулами гіпотез Бейєса та мають вигляд:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}. \quad (12.2)$$

Якщо ймовірності  $P_{H_i}(A)$  називаються апіорними (до експерименту), то ймовірності  $P_A(H_i)$  – апостеріорними (після експерименту).

**Приклад 12.6.** На математичну олімпіаду приїхали 25 студентів з України, 24 – з Польщі та 26 з Німеччини. Ймовірність того, що студент з України посіде перше місце, становить 0,6, з Польщі – 0,55, з Німеччини – 0,65. (Перше місце можуть взагалі нікому не присуджувати). Після змагання виявилось, що є студент, який посів перше місце. Знайти ймовірність того, що він українець.

**Розв’язання.** Подія  $A$  – є студент, який посів перше місце. Можливі три події – гіпотези:  $H_1$  – студент з України;  $H_2$  – студент з Польщі;  $H_3$  – студент з Німеччини..

Ймовірності гіпотез знайдемо:  $P(H_1) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$ ;  $P(H_2) = \frac{24}{75}$ ;  $P(H_3) = \frac{26}{75}$ . Також відомі умовні ймовірності події  $A$ :  $P_{H_1}(A) = 0,6$ ;  $P_{H_2}(A) = 0,55$ ;  $P_{H_3}(A) = 0,65$ .

Шукану ймовірність обчислимо за формулою:

$$\begin{aligned}
 P_A(H_1) &= \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{24}{75} \cdot \frac{55}{100} + \frac{26}{75} \cdot \frac{65}{100}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{66}{375} + \frac{169}{750}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{150 + 132 + 169}{750}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{451}{750}} = \frac{150}{451}.
 \end{aligned}$$

Отже, пройшла переоцінка гіпотези  $H_1$ . Якщо до змагання ця ймовірність складала  $P(H_1) = \frac{1}{3}$ , то після того, як олімпіада відбулася, ймовірність виявилася рівною  $P_A(H_1) = \frac{150}{451}$ .

**Приклад 12.7.** В ящику знаходяться цукерки трьох видів: шоколадні, фруктові та карамельні. Кількість цукерок кожного типу відноситься як 5:7:9 (відповідно). Ймовірність того, що шоколадна цукерка виготовлена на херсонській фабриці, становить 0,4, фруктова – 0,8 та карамельна – 0,7. Цукерка, яку обрали випадковим чином, виявилася херсонського виробництва. Ймовірніше всього, якого типу ця цукерка?

**Розв’язання.** Нехай подія  $M$  полягає в тому, що цукерка виявилася херсонського виробництва. Події  $M$  попереджує одна з трьох можливих подій (гіпотез):  $H_1$  – цукерка шоколадна,  $H_2$  – цукерка фруктова,  $H_3$  – цукерка карамельна. Для знаходження ймовірності гіпотез введемо коефіцієнт пропорційності –  $x$ . Тоді кількість шоколадних цукерок можна виразити  $5x$ , фруктових –  $7x$ , карамельних –  $9x$ . Загальна кількість цукерок становить  $5x + 7x + 9x = 21x$ . Виходячи з таких міркувань  $P(H_1) = \frac{5x}{21x} = \frac{5}{21}$ ,  $P(H_2) = \frac{7x}{21x} = \frac{7}{21}$ ,  $P(H_3) = \frac{9x}{21x} = \frac{9}{21}$ . Умовна ймовірність того, що, якщо цукерка шоколадна, то вона виготовлена на херсонській фабриці, становить 0,4; якщо цукерка фруктова, то 0,8; якщо карамельна, то 0,7. Знайдемо ймовірність того, що цукерка, яку обрали випадковим чином, виявилася херсонського виробництва за формулою повної ймовірності:

$$P(M) = \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{10} + \frac{7}{21} \cdot \frac{8}{10} + \frac{9}{21} \cdot \frac{7}{10} = \frac{20 + 56 + 63}{210} = \frac{139}{210}.$$

Тепер перерахуємо ймовірність того, що цукерка, яка вироблена в Херсоні, шоколадна, тобто перерахуємо ймовірність гіпотези  $H_1$  після експерименту (формула 12.2).

$$P_M(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(M)}{P(M)} = \frac{\frac{20}{210}}{\frac{139}{210}} = \frac{20}{139} \approx 0,144.$$

Аналогічно перерахуємо ймовірність того, що цукерка, яка вироблена в Херсоні, фруктована:

$$P_M(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(M)}{P(M)} = \frac{\frac{56}{210}}{\frac{139}{210}} = \frac{56}{139} \approx 0,403.$$

Ймовірність третьої гіпотези

$$P_M(H_3) = \frac{P \cdot P_{H_3}(M)}{P(M)} = \frac{\frac{63}{210}}{\frac{139}{210}} = \frac{63}{139} \approx 0,453.$$

Звернемо увагу на той факт, що сума апостеріорних ймовірностей теж дорівнює одиниці:  $\frac{20}{139} + \frac{56}{139} + \frac{63}{139} = 1$ .

Оскільки з трьох одержаних значень найбільше 0,453, то третя гіпотеза найбільш вірогідна, тобто, якщо цукерка вироблена в Херсоні, то вона, скоріше за все, карамельна.

## Повторні незалежні випробування

### Формула Бернуллі

Проводиться  $n$  незалежних випробувань, в яких спостерігається поява події  $A$ . Яка ймовірність появи події  $A$  в  $n$  випробуваннях  $k$  разів, якщо ймовірність появи  $A$  в одному випробуванні дорівнює  $p$ , а не появи –  $q$ ?

Проте  $P(B_k) = P_n(k)$ , отже

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (12.3)$$

Формула (12.3) називається **формулою Бернуллі**

**Приклад 12.8.** Господиня посадила 7 цибулин тюльпанів із схожістю 90%. Знайти ймовірність того, що взійде 5 цибулин.

**Розв'язання.** Схожість кожної окремої цибулини – незалежне випробування. Загальна кількість випробувань  $n = 7$ ,  $k=5$  – стільки разів очікується благоприємний

результат,  $p = 0,9$  – ймовірність того, що цибулина проросте,  $q = 1 - 0,9 = 0,1$  – ймовірність того, що не проросте. За формулою Бернуллі:

$$P_7(5) = C_7^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^2 = \frac{7!}{5!2!} \cdot 0,59049 \cdot 0,01 = 0,1240029.$$

### Теорема Пуассона.

**Теорема 12.3.** Якщо проводяться випробування Бернуллі при  $n \rightarrow \infty$  а  $p \rightarrow 0$ , але  $np = a$ , то ймовірність появи  $k$  разів події  $A$ , що з'являється в окремому випробуванні з ймовірністю  $p$ , прямує до

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (12.4)$$

Вираз (12.4) називається **асимптотичною формулою Пуассона**.

**Приклад 12.9.** Деякий пристрій виходить з ладу, якщо відмовляє мікросхема. Ймовірність її відмови протягом години становить 0,004. Яка ймовірність, що за 1000 годин роботи 5 разів треба буде замінити мікросхему?

**Розв'язання.**  $p = 0,004$ ,  $n = 1000$ . Обчислимо  $a = np$  та скористаємося формулою Пуассона (12.4):

$$a = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$$

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0,1563.$$

**Приклад 12.10.** Магазин замовив у постачальника 1000 партій бананів. Ймовірність того, що партія загубиться в дорозі складає 0,005. Потрібно знайти ймовірність того, що загубиться не більше, ніж сім партій.

**Розв'язання.** Позначимо через  $A$  подію, яка полягає в тому, що загубиться не більше, ніж сім партій. Це складна подія, вона визначається вісьмома елементарними подіями:  $A_0$  – жодна партія не загубилася,  $A_1$  – одна загубилася,  $A_2$  – дві загубилася і т.д.;  $A_7$  – сім партій загубилося.

Ймовірність події  $A$  дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій:

$$P(A) = P_{1000}(A_0) + P_{1000}(A_1) + \dots + P_{1000}(A_7).$$

Для підрахунку кожної ймовірності застосуємо теорему Пуассона. При

$$p = 0,005; n = 1000; a = np = 5;$$

$$P_{1000}(A_i) = e^{-a} \cdot \frac{a^i}{i!} = e^{-5} \frac{5^i}{i!},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 7$$

$$P(A) = e^{-5} \left( \frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \dots + \frac{5^7}{7!} \right) \approx 0,875.$$

### Локальна теорема Муавра – Лапласа

Якщо кількість незалежних випробувань досить велика, замість формули Бернуллі треба користуватися локальною і інтегральною теоремами Лапласа, які дають приближений результат, але він тим ближче до результату точної формули Бернуллі, чим більше кількість випробувань.

**Теорема 12.4.** Якщо робиться  $n$  незалежних випробувань, у кожному з яких подія  $A$  з'являється з однаковою ймовірністю  $p$ ;  $p \in (0;1)$ , то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія  $A$  відбудеться рівно  $k$  разів (байдуже, у якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше  $n$ ) за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (12.5)$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \text{функція Гаусса; } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Значення функції Гаусса знаходимо по таблиці (Додаток Таблиця 3).

**Приклад 12.11.** Знайти ймовірність появи події 70 разів у 243 незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події в одному випробуванні дорівнює 0,25.

**Розв'язання.**  $n=243$ ,  $k=70$ ,  $p=0,25$ ,  $q=0,75$ .

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37, \quad \varphi(1,37) = 0,1561$$

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231.$$

Зазначимо, що локальна теорема Муавра - Лапласа дає змогу оцінити окремі ймовірності та їхню поведінку як функцію  $k$  при великих  $n$ .

### Інтегральна теорема Лапласа

**Теорема 12.5. (Інтегральна теорема Лапласа).**

Якщо робиться  $n$  незалежних випробувань, у кожному з яких подія  $A$  з'являється з однаковою ймовірністю  $p$ , то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія  $A$  відбудеться не менше  $k_1$  разів і не більш  $k_2$  разів (байдуже, в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше  $n$ ) за формулою

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (12.6)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Функція  $\Phi(x)$  називається функцією Лапласа. Її значення знаходяться по таблиці (Додаток Таблиця 4).

**Приклад 12.12.** Ймовірність випуску нестандартної лампи дорівнює 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 2000 ламп стандартних не менш, ніж 1790 штук?

**Розв'язання.** У нашому прикладі  $n$  досить велике і ймовірність можна оцінити за інтегральною теоремою. За умовою маємо:

$$p = 0,9, \quad q = 0,1, \quad n = 2000, \quad k_1 = 1790, \quad k_2 = 2000$$

$$x_2 = \frac{2000 - 2000 \cdot 0,9}{\sqrt{2000 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{2000 - 1800}{13,42} = 14,9, \quad x_1 = \frac{1790 - 2000 \cdot 0,9}{\sqrt{2000 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = \frac{-10}{13,42} = -0,75.$$

Оскільки  $x_2 = 14,9 \geq 5$ , то вважаємо, що  $\Phi(x_2) \approx 0,5$ . Оскільки  $x_1 = -0,75$ , то, в силу непарності функції Лапласа, маємо  $\Phi(x_1) = \Phi(-0,75) = -\Phi(0,75) = -0,275$ . Отже, за формулою (12.6):

$$P_{2000}(1790 \leq k \leq 2000) = \Phi(14,9) - \Phi(-0,75) = 0,5 + 0,275 = 0,775.$$

### Теоретичні запитання.

1. Яка ймовірність називається умовною?
2. Які події називаються гіпотезами?
3. Навести формулу повної ймовірності.
4. Сформулювати теорему Бейєса.
5. Яке призначення формули Бейєса?
6. Які гіпотези називаються апіорними?
7. Які гіпотези називаються апостеріорними?
8. Що називають схемою Бернуллі?
9. Які експерименти є незалежними?
10. Сформулювати теорему Бернуллі.
11. При якому числі незалежних експериментів рекомендується використовувати формулу Бернуллі?
12. Сформулювати локальну теорему Лапласа.

13. У чому принципова відмінність теореми Бернуллі від локальної теореми Лапласа?
14. Сформулювати теорему Пуассона.
15. Яке призначення теореми Пуассона?
16. Сформулювати інтегральну теорему Лапласа.
17. Яке призначення інтегральної теореми Лапласа?

### **Завдання для самостійної роботи**

1. 13 студентів першого, 17 - другого та 20 студентів третього курсів паралельно проводять розрахунки. Ймовірність того, що студент першого курсу припустить помилку становить 0,2; другого – 0,25; третього – 0,15. Викладач перевіряє випадково обрану роботу. Знайти ймовірність того, що вона буде без помилки.
2. 13 студентів першого, 17 - другого та 20 студентів третього курсів паралельно проводять розрахунки. Ймовірність того, що студент першого курсу припустить помилку становить 0,2; другого – 0,25; третього – 0,15. Викладач перевіряє випадково обрану роботу. Знайти ймовірність того, що вона буде без помилки.
3. В ящику знаходяться цукерки трьох видів: шоколадні, фруктові та карамельні. Кількість цукерок кожного типу відноситься як 5:7:9 (відповідно). Ймовірність того, що шоколадна цукерка виготовлена на Херсонській фабриці становить 0,4, фруктова – 0,8 та карамельна – 0,7. Знайти ймовірність того, що цукерка, яку обрали випадковим чином, виявилася херсонського виробництва.
4. Студентам дозволено обирати один екзамен з трьох: або вища математика, або фізика, або техніка безпеки. Кількість студентів, що обрали вищу математику в 2 рази більше, ніж тих, що обрали фізику. Але кількість студентів, що обрали техніку безпеки, в 4 рази більше, ніж тих, що обрали математику. Ймовірності скласти іспити без заборгованостей дорівнюють 0,6; 0,4 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент склав іспит без заборгованості.
5. В гаражі знаходиться 4 автомобіля. Ймовірності того, що кожний із автомобілів знаходиться у справному стані дорівнюють 0,9; 0,8; 0,7 і 0,75. Знайти ймовірність того, що у справному стані знаходяться:  
а) рівно 3 автомобілі; б) хоча б один автомобіль?

## Індивідуальні завдання

### Варіант 1

- 1 На зборку від першого автомата надійшло 2000 деталей, а від другого – 3000. Перший автомат припускає в середньому 0,2% браку, другий – 0,1%.
  - 1) Знайти ймовірність надходжень на зборку бракованої деталі.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим автоматом.
- 2 У змаганнях беруть участь представники трьох команд. Перша команда складається із 25 спортсменів, друга – із 18, третя – із 17. Ймовірність виконати норматив спортсменом із першої команди становить 0,8; із другої – 0,75, а із третьої – 0,85.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином викликаний спортсмен виконає норматив.
  - 2) Викликаний спортсмен виконав норматив. Знайти ймовірність того, що він є представником першої команди.
- 3 В урну, в якій лежало 5 кульок, поклали одну білу та всі кульки перемішали. Яка ймовірність витягти після цього з урни білу кульку, якщо вважати рівноможливими всі гіпотези про початковий склад урни.
- 4 Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде більше одного разу.
- 5 Пристрій складається із 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного з елементів за час  $T$  складає 0,002. Знайти ймовірність того, що за час  $T$  відмовлять 3 елементи.
- 6 Ймовірність вразити мішень при одному пострілі з гвинтівки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах мішень буде вражена 250 разів.
- 7 Фабрика виробляє в середньому 80% продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 100 виробів кількість першосортних знаходиться між 70 та 80 штук?

### Варіант 2

- 1 З тролейбусного парку у випадковому порядку виходять 4 тролейбуси маршруту №1 та 8 тролейбусів маршруту №2.
  - 1) Знайти ймовірність того, що другим по порядку на лінію вийде тролейбус маршруту №1.
  - 2) Другим на лінію вийшов тролейбус №1. Знайти ймовірність того, що

першим на лінію вийшов тролейбус маршруту №2.

- 2 У першій лабораторії виготовлено 10 дослідних зразків пристрою, у другій – 15. Ймовірність того, що дослідний зразок першої лабораторії витримає випробування становить 0,7, а другої – 0,65.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний дослідний зразок витримає випробування.
  - 2) Випадково обраний дослідний зразок витримав випробування Знайти ймовірність того, що він виготовлений у першій лабораторії.
- 3 Для виробничої практики на 35 студентів виділено 20 місць в Києві, 8 – в Херсоні та 7 – в Одесі. Яка ймовірність того, що два певні студенти поїдуть в одне місто?
- 4 Знайти ймовірність того, що в чотирьох незалежних випробуваннях подія  $A$  настане не більше 3 разів, враховуючи, що в кожному випробуванні ймовірність того, що подія настане, дорівнює 0,25.
- 5 Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні складає 0,004. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено менше трьох виробів.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що із 100 народжених дітей хлопчиків і дівчаток буде однакова кількість.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2700 незалежних випробувань дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не більше 2069 разів.

### Варіант 3

- 1 Два автомати виготовляють деталі. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,06, а на другому – 0,09. Продуктивність другого автомата вдвічі більша, ніж першого.
  - 1) Знайти ймовірність виготовлення бракованої деталі.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим автоматом.
- 2 Майстер виконує 55% всього об'єму роботи, а учень – решту. Ймовірність виготовити деталь відмінної якості становить 0,95 для майстра, а для учня – 0,75.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана деталь виявиться відмінної якості.
  - 2) Випадковим чином вибрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена учнем.

- 3 В магазині є 30 кг цукерок, серед яких 8 кг шоколадних, 10 кг карамельних та 12 кг з фруктовію начинкою. Навмання купують 3 кг цукерок. Яка ймовірність того, що куплені цукерки одного виду?
- 4 Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 3 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,7.
- 5 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка виявиться пошкодженою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає не більше, ніж 3 розбиті пляшки.
- 6 Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,5. Знайти ймовірність 125 влучень із 270 пострілів.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 200 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше, ніж 175 разів.

#### Варіант 4

- 1 Продуктивність першого, другого та третього автоматів співвідноситься як 2:3:5. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена першим автоматом, відмінної якості, дорівнює 0,7, другим – 0,6, третім – 0,9.
  - 1) Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться відмінної якості.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другому автоматі.
- 2 На факультеті навчаються студенти з трьох спеціальностей: 60, 80 та 90 осіб відповідно. Ймовірність здати сесію без заборгованостей для студента першої спеціальності становить 0,75; для студента другої спеціальності – 0,8 і для третьої – 0,7.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент факультету здасть сесію без заборгованостей.
  - 2) Випадково обраний студент здав сесію без заборгованостей. Знайти ймовірність того, що він навчається за другою спеціальністю.
- 3 В наборі є 10 олівців червоних, 15 чорних та 20 синіх. Яка ймовірність взяти з набору три олівця одного кольору?
- 4 Необхідно знайти ймовірність того, що в  $n = 5$  незалежних випробуваннях подія  $A$  з'явиться не більше двох разів, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,5.
- 5 Магазин отримав 2000 пакетів соку. Ймовірність того, що пакет при

транспортуванні буде пошкоджений складає 0,0005. Знайти ймовірність того, що при прийманні товару буде виявлено 4 пошкоджених пакети соку.

- 6 Знайти ймовірність того, що із 1000 посіяних зерен зійде 230, якщо схожість зерна оцінюється ймовірністю 0,8.
- 7 Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде від 565 до 655 хлопчиків. Для спрощення розрахунків вважати ймовірність народження хлопчика рівною 0,5.

### Варіант 5

- 1 Два контролери перевіряють деталі на якість. Перший виконує 60% всієї роботи, а другий 40%. Ймовірність того, що перший контролер визнає деталь стандартною, становить 0,9, а другий – 0,96.
- 1) Знайти ймовірність того, що деталь, яка надійшла на перевірку, буде визнана стандартною.
- 2) При перевірці деталь визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що її перевіряв перший контролер.
- 2 У змаганнях беруть участь 150 машин першого виробника і 120 машин другого виробника. Ймовірність того, що переможе машина першого виробника, становить 0,7, а другого – 0,75.
- 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана машина переможе під час змагань.
- 2) Випадковим чином обрана машина перемогла під час змагань. Знайти ймовірність того, що вона зібрана на заводі першого виробника.
- 3 З 30 студентів курсу 15 пишуть курсову роботу з математичного аналізу, 10 – з алгебри та 5 – з теорії ймовірностей. Яка ймовірність того, що чотири випадково обраних студента пишуть роботу з одного предмету?
- 4 Ймовірність виграти по лотерейному квитку дорівнює  $1/7$ . Знайти ймовірність виграшу не менш, ніж по 2 квитках із 6.
- 5 До банка відправлено 4000 пакетів грошових купюр. Ймовірність того, що пакет містить надлишок або має нестачу купюр складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що при перевірці буде виявлено 3 пакети з вадами комплектації.
- 6 Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,475. Яка ймовірність того, що серед 1000 немовлят буде 380 дівчаток?
- 7 Ймовірність появи події в кожному з 2700 випробувань дорівнює 0,65. Яка ймовірність того, що подія з'явиться не менш, ніж 2400, і не більше, ніж 2600 разів?

### Варіант 6

- 1 В партії 60 деталей, із яких 20 виготовлено на першому заводі, 25 – на другому та 15 – на третьому. Відповідні ймовірності того, що деталі виготовлені на першому, другому та третьому заводах стандартні – 0,97; 0,91 та 0,93.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана з даної партії деталь виявиться стандартною.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що її виготовили на першому заводі.
- 2 В першій урні знаходиться 12 куль, із яких 10 білих; в другій урні – 18 куль, серед яких 3 білі. Із випадковим чином обраної урни дістали кулю.
  - 1) Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.
  - 2) Випадковим чином вийнята куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що її дістали із першої урни.
- 3 В урну, в якій лежало 5 кульок, поклали одну білу та всі кульки перемішали. Яка ймовірність витягти після цього з урни чорну кульку, якщо вважати рівноможливими всі гіпотези про початковий склад урни.
- 4 Знайти ймовірність того, що в 4 незалежних випробуваннях подія з'явиться хоча б один раз, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,9.
- 5 Книга видається тиражем 1000 примірників. Для кожної книги ймовірність бути неправильно зброшурованою становить 0,002. Знайти ймовірність того, що тираж буде містити 7 бракованих книжок.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться рівно 100 разів у 273 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,15.
- 7 Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що із 300 випадково відібраних деталей виявляться неперевіреними від 25 до 50 деталей.

### Варіант 7

- 1 10 студентів розв'язують задачу. З них два навчаються на "відмінно", п'ять – на "добре" і три – на "задовільно". Ймовірність того, що задача буде розв'язана відмінником, дорівнює 0,9, тим, хто навчається на "4" – 0,8; посереднім студентом – 0,5.
  - 1) Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана.

- 2) Задача розв'язана. Знайти ймовірність того, що її розв'язав відмінник.
- 2 З першого автомата надходить для складання 80%, а з другого – 20% однакових деталей. На першому автоматі бракованими виготовляються 1%, на другому – 4% всіх деталей.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана деталь виявиться стандартною.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другому автоматі.
- 3 В магазині є 80 кг цукерок, серед яких 38 кг шоколадних, 24 кг карамельних та 18 кг з фруктовю начинкою. Навмання купують 3 кг цукерок. Яка ймовірність того, що куплені цукерки одного виду?
- 4 Нехай ймовірність того, що навмання взята деталь нестандартна дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5 деталей нестандартних буде не більше двох.
- 5 Ймовірність виготовлення нестандартної деталі становить 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей 5 виявляться нестандартними.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться 2400 разів в 3400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,65.
- 7 Гральний кубик підкидають 600 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратних трьом, випаде не менше 188 і не більше 256 разів?

### Варіант 8

- 1 В трьох ящиках знаходиться по 10 деталей, причому із них в першому ящику – 2, в другому – 3, а в третьому – 1 деталь браковані. Із навмання вибраного ящика навмання взято 2 деталі.
  - 1) Знайти ймовірність того, що ці деталі браковані.
  - 2) Дві вибрані деталі виявилися бракованими. Знайти ймовірність того, що їх дістали із другого ящика.
- 2 У першій лабораторії виготовлено 3 дослідні зразки пристрою, у другій – 5. Ймовірність того, що дослідний зразок першої лабораторії витримає випробування становить 0,7, а другої – 0,65.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний дослідний зразок витримає випробування.
  - 2) Випадково обраний дослідний зразок витримав випробування. Знайти ймовірність того, що він виготовлений у першій лабораторії.

- 3 В першій урні знаходиться 3 чорних та 7 білих куль, в другій – 13 чорних та 17 білих. З другої урни навмання виймається одна куля і перекладається до першої урни, після чого з першої урни дістається одна куля. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з першої урни, виявиться білою.
- 4 Знайти ймовірність того, що в 4 незалежних випробуваннях подія з'явиться не менше трьох разів, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи цієї події дорівнює 0,8.
- 5 Автомат штампує деталі. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,02. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей 5 виявляться бракованими.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят виявиться 55 хлопчиків.
- 7 Ймовірність події в кожному з 200 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше, ніж 190 разів.

### Варіант 9

- 1 Два автомати виробляють однакові деталі, які далі надходять на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомату вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана на конвеєрі деталь виявиться відмінної якості.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що її виготовили на другому автоматі.
- 2 В двох ящиках зберігають по 10 деталей, серед яких в першому ящику – 6, а в другому – 8 стандартних. З першого навмання дістають одну деталь і перекладають до другого ящика.
  - 1) Знайти ймовірність того, що навмання взята після цього деталь з другого ящика виявиться стандартною.
  - 2) Навмання взята з другого ящика (після перекладання) деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що із першого ящика в другий переклали теж стандартну деталь.
- 3 Для виробничої практики на 30 студентів виділено 15 місць в Києві, 10 – в Херсоні та 5 – в Одесі. Яка ймовірність того, що 3 певні студенти поїдуть в одне місто?
- 4 Нехай ймовірність того, що телевізор потребує ремонту протягом

гарантійного терміну, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну із 6 телевізорів не більше одного потребує ремонт.

- 5 У мікрорайоні встановлено 10000 нових кодових замків на входних дверях будинків. Ймовірність виходу із ладу одного замка протягом першого місяця експлуатації дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що за перший місяць відмовить рівно 1 замок.
- 6 Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,68. Знайти ймовірність того, що при 170 пострілах стрілець влучить в мішень 140 разів.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2700 випробувань дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше 2070 разів.

### Варіант 10

- 1 У відділі ТК працюють 10 штатних працівників та 5 практикантів. Штатні працівники виконують 60% всіх вимірювань, а практиканти – 40 %. Ймовірність того, що вимірювання буде проведене без помилок штатним працівником становить 0,95, а практикантом – 0,75.
  - 1) Знайти ймовірність того, що поточне вимірювання буде виконано без помилок.
  - 2) Поточне вимірювання виконано правильно. Знайти ймовірність того, що воно виконано практикантом.
- 2 У перегонах беруть участь 15 машин першого виробника і 12 машин другого виробника. Ймовірність того, що з траси не зійде машина першого виробника становить 0,8, а другого – 0,75.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана машина не зійде з траси підчас змагань.
  - 2) Випадковим чином обрана машина пройшла всю трасу змагань. Знайти ймовірність того, що вона зібрана на заводі першого виробника.
- 3 В наборі є 15 олівців червоних, 10 чорних та 20 синіх. Яка ймовірність взяти з набору три олівця одного кольору?
- 4 Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде більше 4 разів.
- 5 Завод відправив у торгівельну мережу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу під час доставки 0,003. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні не буде пошкоджено жодного виробу.
- 6 Гральний кубик підкидають 5020 разів. Яка ймовірність того, що при цьому чотири очка випаде 1520 разів?

- 7 Фабрика виробляє 80% виробів першого гатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що із 400 виробів першосортними будуть від 246 до 307 виробів?

### Варіант 11

- 1 В першій урні знаходиться 2 білих та три чорних кульки, в другій – 3 білих та 5 чорних кульок. Із випадково обраної урни дістали одну кулю.
- 1) Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявилася білою.
  - 2) Вийнята куля виявилася чорною. Знайти ймовірність того, що її дістали із другої урни.
- 2 Студент може піти до однієї із трьох бібліотек із ймовірностями 0,4; 0,35 і 0,25 відповідно. Ймовірність того, що потрібна книга наявна у першій бібліотеці становить 0,75, у другій – 0,6 і у третій – 0,5.
- 1) Знайти ймовірність того, що у випадково обраній бібліотеці потрібна книга буде знайдена.
  - 2) Потрібна книга знайдена у бібліотеці. Знайти ймовірність, що студент відвідав третю бібліотеку.
- 3 З 20 студентів курсу 7 пишуть курсову роботу з математичного аналізу, 8 – з алгебри та 5 – з теорії ймовірностей. Яка ймовірність, що чотири випадково обраних студента пишуть роботу з одного предмету?

### Варіант 12

- 1 У змаганнях беруть участь представники трьох команд. Перша команда складається із 15 спортсменів, друга – із 18, третя – із 17. Ймовірність виконати норматив спортсменом із першої команди становить 0,8; із другої – 0,75, а із третьої – 0,85.
- 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином викликаний спортсмен виконає норматив.
  - 2) Викликаний спортсмен виконав норматив. Знайти ймовірність того, що він є представником першої команди.
- 2 Ймовірність того, що випробування витримає експериментальний зразок автомобіля першого виробника становить 0,75, а другого виробника – 0,85. Для проведення випробування першим виробником надано 15 автомобілів, другим – 20.
- 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обраний автомобіль витримає тест.
  - 2) Випадковим чином обраний автомобіль не витримав тест. Яким із

виробників він ймовіріше всього виготовлений?

- 3 В урну, в якій лежало 7 кульок, поклали одну білу кульку та всі їх перемішали. Яка ймовірність витягти після цього з урни білу кульку, якщо вважати рівноможливими всі гіпотези про попередній склад урни?
- 4 Автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за одну годину не буде вироблено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що будуть стандартними всі деталі, вироблені за 3 години.
- 5 Ймовірність виготовлення бракованої деталі при їх масовому виробництві становить 0,001. Знайти ймовірність того, що в партії із 800 деталей рівно 2 будуть бракованими.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що із 200 дітей хлопчиків та дівчаток буде однакова кількість.
- 7 Гральний кубик підкидають 5020 разів. Яка ймовірність того, що при цьому чотири очка випаде від 1500 до 1550 разів?

### Варіант 13

- 1 В магазині знаходиться 55% приладів, які виготовлені на першому заводі і 45% – другому заводу. Ймовірність того, що прилад з першого заводу відпрацює гарантійний термін становить 0,9, а з другого заводу – 0,8.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обраний прилад відпрацює гарантійний термін.
  - 2) Випадковим чином обраний прилад відпрацював гарантійний термін. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на другому заводу.
- 2 Майстер виконує 65% всього об'єму роботи, а учень – 35%. Ймовірність того, що майстер виготовить деталь відмінної якості, становить 0,95, а учень – 0,75.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана деталь виявиться відмінної якості.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена учнем.
- 3 З 40 студентів курсу 15 пишуть курсову роботу з математичного аналізу, 10 – з алгебри та 15 – з теорії ймовірностей. Яка ймовірність того, що чотири випадково обраних студента пишуть роботу з одного предмету?
- 4 Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 2 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність того, що вона настане, дорівнює 0,8.
- 5 Верстат за зміну виготовляє 100000 деталей. Ймовірність виготовлення

бракованої деталі складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що за зміну буде виготовлено 5 бракованих деталей.

- 6 Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,4. Знайти ймовірність 100 влучень при 320 пострілах.
- 7 Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених від 465 до 555 будуть хлопчики. Для спрощення розрахунків прийняти ймовірність народження хлопчика рівною 0,5.

#### **Варіант 14**

- 1 Транспортна компанія має автобуси трьох марок у кількостях: 15, 20 та 25 відповідно. Ймовірність того, що під час рейсу автобус першої марки не буде потребувати ремонту становить 0,98; другої – 0,95 та третьої – 0,9.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний рейс виконано без ремонту.
  - 2) Випадково обраний рейс виконано без ремонту. Знайти ймовірність того, що рейс виконувався автобусом третьої марки.
- 2 На факультеті навчаються студенти з трьох спеціальностей: 50, 80 та 75 осіб відповідно. Ймовірність здати сесію без заборгованостей для студента першої спеціальності становить 0,75; для студента другої спеціальності – 0,8 і для третьої – 0,7.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент факультету здасть сесію без заборгованостей.
  - 2) Випадково обраний студент здав сесію без заборгованостей. Знайти ймовірність того, що він навчається за другою спеціальністю.
- 3 В кожній з двох урн знаходиться 5 чорних та 15 білих куль. З другої урни навмання виймається одна куля і перекладається до першої урни, після чого з першої урни дістається одна куля. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з першої урни, виявиться білою.
- 4 Монета підкидається 5 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" з'явиться не більше трьох разів.
- 5 В будинку використовується 1500 лампочок. Ймовірність виходу із ладу однієї лампочки протягом року складає 0,002. Знайти ймовірність того, що протягом року із ладу вийдуть 3 лампочки.
- 6 Знайти ймовірність того, що з посіяних 500 штук насіння зійде 130, якщо схожість оцінюється ймовірністю 0,75.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань постійна і

дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше 90 разів.

### Варіант 15

- 1 Ймовірності того, що студент вибере один із трьох туристичних маршрутів складають 0,3; 0,4 і 0,3. А ймовірності того, що на обраний маршрут є вільні квитки становлять 0,8; 0,6 та 0,5 відповідно.
  - 1) Знайти ймовірність того, що студент здійснить подорож.
  - 2) Студент здійснив подорож. Знайти ймовірність того, що вона відбулася за другим маршрутом.
- 2 Для посівної підготовлено три сорти насіння зі сходженням 90%, 95% та 85%. Першого сорту підготовлено 5 т, другого – 3 т та третього – 2 т.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обрана насінина зійде.
  - 2) Випадково обрана насінина зійшла. Знайти ймовірність того, що вона належить до першого сорту.
- 3 В магазині є 40 кг цукерок, серед яких 8 кг шоколадних, 10 кг карамельних та 22 кг з фруктовোю начинкою. Навмання купують 3 кг цукерок. Яка ймовірність того, що куплені цукерки одного виду?
- 4 Ймовірність виграшу по лотерейному білету дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що із 3 лотерейних білетів виграє 2.
- 5 Виробник вважає, що ймовірність негативного ставлення покупців до нового товару 0,01. Знайти ймовірність того, що із 200 опитаних негативний відгук на товар нададуть 4 покупці.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  настане рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того що подія настане не менше, ніж 1470 і не більше, ніж 1500 разів.

### Варіант 16

- 1 Деталі штампуються на двох автоматах і надходять у спільний бункер. Перший автомат виготовляє 10 деталей за хвилину, другий – 8. Перший автомат випускає 5% деталей бракованими, другий – 3%.
  - 1) Знайти ймовірність, що вийнята випадковим чином із бункера деталь виявиться стандартною.
  - 2) Деталь із бункера вже вийняли і вона виявилася стандартною. Оцінити

ймовірність, що вийнята деталь виготовлена першим автоматом.

- 2 Три автомати виготовляють деталі. Продуктивності першого, другого та третього автоматів відносяться як 2:3:5. Ймовірність того, що деталь, виготовлена першим автоматом, відмінної якості, дорівнює 0,9, другим – 0,8, третім – 0,7. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться відмінної якості.
- 3 Для виробничої практики 30 студентам надано 15 місць в Миколаєві, 8 – в Каховці та 7 – в Херсоні. Яка ймовірність того, що 2 певних студента попадуть на практику в одне місто?
- 4 Ймовірність появи події  $A$  в одному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в трьох випробуваннях ця подія з'явиться хоча б один раз.
- 5 Ймовірність того, що вкладник забере із банку свій вклад до призначеного терміну зберігання становить 0,0025. Знайти ймовірність того, що із 500 вкладників 2 заберуть свої накопичення.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Яка ймовірність того, що серед 1000 немовлят буде 480 дівчаток?
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань стала і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія настане не менше 75 разів.

### Варіант 17

- 1 На зборку надходять деталі з двох автоматів. Перший дає в середньому 0,2% браку, другий – 0,1%. Знайти ймовірність надходжень на зборку бракованої деталі, якщо з першого автомата надійшло 2000 деталей, а з другого – 3000.
- 2 В гаманці знаходиться 7 монет вартістю 2 копійки та 5 монет вартістю 10 копійок. Знайти ймовірність того, що дві взяті навмання монети виявляться однієї вартості.
- 3 Автопарк складається із 30 вантажних автомобілів і 20 легкових автомобілів. Ймовірність вийти з ладу протягом робочого дня для вантажного автомобіля становить 0,15, а для легкового – 0,1.
  - 1) Знайти ймовірність того, що протягом робочого дня будь-якому автомобілю знадобиться ремонт.
  - 2) Автомобіль, що належить автопарку, вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що ремонт потрібний легковому автомобілю.
- 4 Знайти ймовірність того, що при 5 кидках монети "герб" з'явиться рівно 3 рази.

- 5 Ймовірність того, що на окремій сторінці книги можуть бути виявлені друкарські помилки дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в книзі із 500 сторінок від 3 до 5 сторінок містять друкарські помилки.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  настане у 1400 випадках із 2400 випробувань, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія настане не менше 1470 разів.

### Варіант 18

- 1 В ящику знаходиться 25 тенісних м'ячів, серед яких – 9 нових. Для першої гри навмання береться 3 м'ячі, після гри вони повертаються в ящик. Для другої гри знову навмання береться 3 м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі м'ячі, взяті для другої гри, були новими.
- 2 З тролейбусного парку у випадковому порядку виходять 4 тролейбуси маршруту №1 та 8 тролейбусів маршруту №2. Знайти ймовірність того, що другим по порядку на лінію вийде тролейбус маршруту №1.
- 3 В кожній з двох урн знаходиться 3 чорних та 7 білих куль. З другої урни навмання виймається одна куля і перекладається до першої урни, після чого з першої урни дістається одна куля.
- 1) Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з першої урни, виявиться білою.
- 2) Вийнята з першої урни куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що з другої урни перед цим переклали чорну кулю.
- 4 Гральний кубик підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що 6 очок випаде рівно 4 рази.
- 5 Ймовірність випуску свердла підвищеної крихкості дорівнює 0,02. Свердла укладаються в коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що кількість свердел із вказаною вадою у коробці не перевищить двох.
- 6 Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах в мішень влучать 75 разів.
- 7 Ймовірність того, що деталь пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевіреними виявиться від 70 до 100 деталей.

### Варіант 19

- 1 В кожній з двох урн знаходиться 3 чорних та 7 білих куль. З другої урни навмання виймається одна куля і перекладається до першої урни, після чого з першої урни дістається одна куля. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з першої урни, виявиться білою.
- 2 Два автомати виготовляють деталі. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,06, а на другому – 0,09. Продуктивність другого автомата вдвічі більша, ніж першого. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде нестандартною.
- 3 В ящику знаходиться 5 деталей, виготовлених заводом №1, та 10 деталей, виготовлених заводом №2. Складальник послідовно дістає з ящика деталі одну за одною.
  - 1) Знайти ймовірність того, що за другим разом з'явиться деталь, виготовлена заводом №1.
  - 2) За другим вийманням складальник дістав деталь, яка виготовлена на заводі №2. Знайти ймовірність того, що перший раз він дістав деталь того ж заводу.
- 4 Нехай схожість насіння даної рослини дорівнює 90%. Знайти ймовірність того, що із 6 зерен зійде не менше 5.
- 5 Серед насіння жита 0,04% бур'янів. Яка ймовірність виявити 5 насінин бур'янів серед 5000 відібраних?
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше 1469 разів.

### Варіант 20

- 1 В ящику знаходиться 5 деталей, виготовлених заводом №1, та 10 деталей, виготовлених заводом №2. Складальник послідовно дістає з ящика деталі одну за одною. Знайти ймовірність того, що за другим разом з'явиться деталь, виготовлена заводом №1.
- 2 Продуктивність першого, другого та третього автоматів по виготовленню деталей співвідноситься як 2:3:5. Ймовірність того, що деталь, виготовлена

першим автоматом, відмінної якості, дорівнює 0,7, другим – 0,6, третім – 0,9. Знайти ймовірність того, що навімання взята деталь виявиться відмінної якості.

- 3 Студентська група з 15 дівчат та 5 хлопців по одному заходить на іспит.
  - 1) Знайти ймовірність того, що на іспит другою зайде дівчина.
  - 2) На іспит другою зайшла дівчина. Знайти ймовірність того, що на іспит першою зайшла теж дівчина.
- 4 Схожість кукурудзи складає 85%. Яка ймовірність того, що із 5 посіяних зерен зійдуть 3?
- 5 Плакат випускається тиражем 3000 примірників. Ймовірність наявності друкарських вад для кожного плаката становить 0,05%. Яка ймовірність, що у тиражі буде виявлено 4 плакати із друкарськими вадами?
- 6 Гральний кубик підкидають 4200 разів. Яка ймовірність того, що 5 очок випаде 700 разів?
- 7 Фабрика виготовляє 75% товарів першого ґатунку. Яка ймовірність того, що із 300 виробів кількість першосортних буде між 219 та 234?

### Варіант 21

- 1 На зборку від першого автомата надійшло 2000 деталей, а від другого – 3000. Перший автомат припускає в середньому 0,2% браку, другий – 0,1%.
  - 1) Знайти ймовірність надходжень на зборку бракованої деталі.
  - 2) Випадковим чином обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим автоматом.
- 2 У змаганнях беруть участь представники трьох команд. Перша команда складається із 25 спортсменів, друга – із 18, третя – із 17. Ймовірність виконати норматив спортсменом із першої команди становить 0,8; із другої – 0,75, а із третьої – 0,85.
  - 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином викликаний спортсмен виконає норматив.
  - 4) Викликаний спортсмен виконав норматив. Знайти ймовірність того, що він є представником першої команди.
- 3 В урну, в якій лежало 5 кульок, поклали одну білу та всі кульки перемішали. Яка ймовірність витягти після цього з урни білу кульку, якщо вважати рівноможливими всі гіпотези про початковий склад урни.
- 4 Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде більше одного разу.

- 5 Пристрій складається із 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного з елементів за час  $T$  складає 0,002. Знайти ймовірність того, що за час  $T$  відмовлять 3 елементи.
- 6 Ймовірність вразити мішень при одному пострілі з гвинтівки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах мішень буде вражена 250 разів.
- 7 Фабрика виробляє в середньому 80% продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 100 виробів кількість першосортних знаходиться між 70 та 80 штук?

### Варіант 22

- 1 З тролейбусного парку у випадковому порядку виходять 4 тролейбуси маршруту №1 та 8 тролейбусів маршруту №2.
  - 1) Знайти ймовірність того, що другим по порядку на лінію вийде тролейбус маршруту №1.
  - 2) Другим на лінію вийшов тролейбус №1. Знайти ймовірність того, що першим на лінію вийшов тролейбус маршруту №2.
- 2 У першій лабораторії виготовлено 10 дослідних зразків пристрою, у другій – 15. Ймовірність того, що дослідний зразок першої лабораторії витримає випробування становить 0,7, а другої – 0,65.
  - 3) Знайти ймовірність того, що випадково обраний дослідний зразок витримає випробування.
  - 4) Випадково обраний дослідний зразок витримав випробування. Знайти ймовірність того, що він виготовлений у першій лабораторії.
- 3 Для виробничої практики на 35 студентів виділено 20 місць в Києві, 8 – в Херсоні та 7 – в Одесі. Яка ймовірність того, що два певні студенти поїдуть в одне місто?
- 4 Знайти ймовірність того, що в чотирьох незалежних випробуваннях подія  $A$  настане не більше 3 разів, враховуючи, що в кожному випробуванні ймовірність того, що подія настане, дорівнює 0,25.
- 5 Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні складає 0,004. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено менше трьох виробів.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що із 100 народжених дітей хлопчиків і дівчаток буде однакова кількість.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2700 незалежних випробувань дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не більше 2069 разів.

### Варіант 23

- 1 Два автомати виготовляють деталі. Ймовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,06, а на другому – 0,09. Продуктивність другого автомата вдвічі більша, ніж першого.
  - 3) Знайти ймовірність виготовлення бракованої деталі.
  - 4) Випадковим чином обрана деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим автоматом.
- 2 Майстер виконує 55% всього об'єму роботи, а учень – решту. Ймовірність виготовити деталь відмінної якості становить 0,95 для майстра, а для учня – 0,75.
  - 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана деталь виявиться відмінної якості.
  - 4) Випадковим чином вибрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена учнем.
- 3 В магазині є 30 кг цукерок, серед яких 8 кг шоколадних, 10 кг карамельних та 12 кг з фруктовোю начинкою. Навмання купують 3 кг цукерок. Яка ймовірність того, що куплені цукерки одного виду?
- 4 Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 3 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,7.
- 5 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка виявиться пошкодженою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає не більше, ніж 3 розбиті пляшки.
- 6 Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,5. Знайти ймовірність 125 влучень із 270 пострілів.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 200 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше, ніж 175 разів.

### Варіант 24

- 1 Продуктивність першого, другого та третього автоматів співвідноситься як 2:3:5. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена першим автоматом, відмінної якості, дорівнює 0,7, другим – 0,6, третім – 0,9.
  - 3) Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться відмінної якості.
  - 4) Випадковим чином обрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другому автоматі.

- 2 На факультеті навчаються студенти з трьох спеціальностей: 60, 80 та 90 осіб відповідно. Ймовірність здати сесію без заборгованостей для студента першої спеціальності становить 0,75; для студента другої спеціальності – 0,8 і для третьої – 0,7.
  - 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний студент факультету здасть сесію без заборгованостей.
  - 2) Випадково обраний студент здав сесію без заборгованостей. Знайти ймовірність того, що він навчається за другою спеціальністю.
- 3 В наборі є 10 олівців червоних, 15 чорних та 20 синіх. Яка ймовірність взяти з набору три олівця одного кольору?
- 4 Необхідно знайти ймовірність того, що в  $n = 5$  незалежних випробуваннях подія  $A$  з'явиться не більше двох разів, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,5.
- 5 Магазин отримав 2000 пакетів соку. Ймовірність того, що пакет при транспортуванні буде пошкоджений складає 0,0005. Знайти ймовірність того, що при прийманні товару буде виявлено 4 пошкоджених пакети соку.
- 6 Знайти ймовірність того, що із 1000 посіяних зерен зійде 230, якщо схожість зерна оцінюється ймовірністю 0,8.
- 7 Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде від 565 до 655 хлопчиків. Для спрощення розрахунків вважати ймовірність народження хлопчика рівною 0,5.

### Варіант 25

- 1 Два контролери перевіряють деталі на якість. Перший виконує 60% всієї роботи, а другий 40%. Ймовірність того, що перший контролер визнає деталь стандартною, становить 0,9, а другий – 0,96.
  - 3) Знайти ймовірність того, що деталь, яка надійшла на перевірку, буде визнана стандартною.
  - 4) При перевірці деталь визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що її перевіряв перший контролер.
- 2 У змаганнях беруть участь 150 машин першого виробника і 120 машин другого виробника. Ймовірність того, що переможе машина першого виробника, становить 0,7, а другого – 0,75.
  - 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана машина переможе під час змагань.

- 4) Випадковим чином обрана машина перемогла під час змагань. Знайти ймовірність того, що вона зібрана на заводі першого виробника.
- 3 З 30 студентів курсу 15 пишуть курсову роботу з математичного аналізу, 10 – з алгебри та 5 – з теорії ймовірностей. Яка ймовірність того, що чотири випадково обраних студента пишуть роботу з одного предмету?
- 4 Ймовірність виграти по лотерейному квитку дорівнює  $1/7$ . Знайти ймовірність виграшу не менш, ніж по 2 квитках із 6.
- 5 До банку відправлено 4000 пакетів грошових купюр. Ймовірність того, що пакет містить надлишок або має нестачу купюр складає 0,0001. Знайти ймовірність того, що при перевірці буде виявлено 3 пакети з вадами комплектації.
- 6 Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,475. Яка ймовірність того, що серед 1000 немовлят буде 380 дівчаток?
- 7 Ймовірність появи події в кожному з 2700 випробувань дорівнює 0,65. Яка ймовірність того, що подія з'явиться не менш, ніж 2400, і не більше, ніж 2600 разів?

### Варіант 26

- 1 В партії 60 деталей, із яких 20 виготовлено на першому заводі, 25 – на другому та 15 – на третьому. Відповідні ймовірності того, що деталі виготовлені на першому, другому та третьому заводах стандартні – 0,97; 0,91 та 0,93.
- 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана з даної партії деталь виявиться стандартною.
- 4) Випадковим чином обрана деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що її виготовили на першому заводі.
- 2 В першій урні знаходиться 12 куль, із яких 10 білих; в другій урні – 18 куль, серед яких 3 білі. Із випадковим чином обраної урни дістали кулю.
- 3) Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.
- 4) Випадковим чином вийнята куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що її дістали із першої урни.
- 3 В урну, в якій лежало 5 кульок, поклали одну білу та всі кульки перемішали. Яка ймовірність витягти після цього з урни чорну кульку, якщо вважати рівноможливими всі гіпотези про початковий склад урни.
- 4 Знайти ймовірність того, що в 4 незалежних випробуваннях подія з'явиться хоча б один раз, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи події

дорівнює 0,9.

- 5 Книга видається тиражем 1000 примірників. Для кожної книги ймовірність бути неправильно зброшурованою становить 0,002. Знайти ймовірність того, що тираж буде містити 7 бракованих книжок.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться рівно 100 разів у 273 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,15.
- 7 Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що із 300 випадково відібраних деталей виявляться неперевіреними від 25 до 50 деталей.

### Варіант 27

- 1 10 студентів розв'язують задачу. З них два навчаються на "відмінно", п'ять – на "добре" і три – на "задовільно". Ймовірність того, що задача буде розв'язана відмінником, дорівнює 0,9, тим, хто навчається на "4" – 0,8; посереднім студентом – 0,5.
  - 3) Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана.
  - 4) Задача розв'язана. Знайти ймовірність того, що її розв'язав відмінник.
- 2 З першого автомата надходить для складання 80%, а з другого – 20% однакових деталей. На першому автоматі бракованими виготовляються 1%, на другому – 4% всіх деталей.
  - 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана деталь виявиться стандартною.
  - 4) Випадковим чином обрана деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другому автоматі.
- 3 В магазині є 80 кг цукерок, серед яких 38 кг шоколадних, 24 кг карамельних та 18 кг з фруктовим начинкою. Навмання купують 3 кг цукерок. Яка ймовірність того, що куплені цукерки одного виду?
- 4 Нехай ймовірність того, що навмання взята деталь нестандартна дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5 деталей нестандартних буде не більше двох.
- 5 Ймовірність виготовлення нестандартної деталі становить 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей 5 виявляться нестандартними.
- 6 Знайти ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться 2400 разів в 3400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,65.

- 7 Гральний кубик підкидають 600 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратних трьом, випаде не менше 188 і не більше 256 разів?

### Варіант 28

- 1 В трьох ящиках знаходиться по 10 деталей, причому із них в першому ящику – 2, в другому – 3, а в третьому – 1 деталь браковані. Із навмання вибраного ящика навмання взято 2 деталі.
- 3) Знайти ймовірність того, що ці деталі браковані.
- 4) Дві вибрані деталі виявилися бракованими. Знайти ймовірність того, що їх дістали із другого ящика.
- 2 У першій лабораторії виготовлено 3 дослідні зразки пристрою, у другій – 5. Ймовірність того, що дослідний зразок першої лабораторії витримає випробування становить 0,7, а другої – 0,65.
- 1) Знайти ймовірність того, що випадково обраний дослідний зразок витримає випробування.
- 2) Випадково обраний дослідний зразок витримав випробування Знайти ймовірність того, що він виготовлений у першій лабораторії.
- 3 В першій урні знаходиться 3 чорних та 7 білих куль, в другій – 13 чорних та 17 білих. З другої урни навмання виймається одна куля і перекладається до першої урни, після чого з першої урни дістається одна куля. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з першої урни, виявиться білою.
- 4 Знайти ймовірність того, що в 4 незалежних випробуваннях подія з'явиться не менше трьох разів, знаючи, що в кожному випробуванні ймовірність появи цієї події дорівнює 0,8.
- 5 Автомат штампує деталі. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,02. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей 5 виявляться бракованими.
- 6 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят виявиться 55 хлопчиків.
- 7 Ймовірність події в кожному з 200 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше, ніж 190 разів.

### Варіант 29

- 1 Два автомати виробляють однакові деталі, які далі надходять на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомату вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%.

- 3) Знайти ймовірність того, що випадковим чином вибрана на конвеєрі деталь виявиться відмінної якості.
- 4) Випадковим чином обрана деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що її виготовили на другому автоматі.
- 2 В двох ящиках зберігають по 10 деталей, серед яких в першому ящику – 6, а в другому – 8 стандартних. З першого навмання дістають одну деталь і перекладають до другого ящика.
  - 3) Знайти ймовірність того, що навмання взята після цього деталь з другого ящика виявиться стандартною.
  - 4) Навмання взята з другого ящика (після перекладання) деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що із першого ящика в другий переклали теж стандартну деталь.
- 3 Для виробничої практики на 30 студентів виділено 15 місць в Києві, 10 – в Херсоні та 5 – в Одесі. Яка ймовірність того, що 3 певні студенти поїдуть в одне місто?
- 4 Нехай ймовірність того, що телевизор потребує ремонту протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну із 6 телевизорів не більше одного потребує ремонт.
- 5 У мікрорайоні встановлено 10000 нових кодових замків на входних дверях будинків. Ймовірність виходу із ладу одного замка протягом першого місяця експлуатації дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що за перший місяць відмовить рівно 1 замок.
- 6 Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,68. Знайти ймовірність того, що при 170 пострілах стрілець влучить в мішень 140 разів.
- 7 Ймовірність появи події в кожному із 2700 випробувань дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше 2070 разів.

### Варіант 30

- 1 У відділі ТК працюють 10 штатних працівників та 5 практикантів. Штатні працівники виконують 60% всіх вимірювань, а практиканти – 40 %. Ймовірність того, що вимірювання буде проведене без помилок штатним працівником становить 0,95, а практикантом – 0,75.
  - 3) Знайти ймовірність того, що поточне вимірювання буде виконано без помилок.
  - 4) Поточне вимірювання виконано правильно. Знайти ймовірність того, що воно виконано практикантом.

- 2 У перегонах беруть участь 15 машин першого виробника і 12 машин другого виробника. Ймовірність того, що з траси не зійде машина першого виробника становить 0,8, а другого – 0,75.
- 1) Знайти ймовірність того, що випадковим чином обрана машина не зійде з траси підчас змагань.
- 2) Випадковим чином обрана машина пройшла всю трасу змагань. Знайти ймовірність того, що вона зібрана на заводі першого виробника.
- 3 В наборі є 15 олівців червоних, 10 чорних та 20 синіх. Яка ймовірність взяти з набору три олівця одного кольору?
- 4 Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде більше 4 разів.
- 5 Завод відправив у торгівельну мережу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу під час доставки 0,003. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні не буде пошкоджено жодного виробу.
- 6 Гральний кубик підкидають 5020 разів. Яка ймовірність того, що при цьому чотири очка випаде 1520 разів?
- 7 Фабрика виробляє 80% виробів першого гатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що із 400 виробів першосортними будуть від 246 до 307 виробів?

## РОЗДІЛ VIII

### Випадкові величини

#### Практичне заняття 13

**Тема:** Дискретні та неперервні випадкові величини,  
їх числові характеристики

**Мета:** ознайомити студентів із способами завдання дискретних та неперервних величин; навчити обчислювати їх числові характеристики.

#### Випадкові величини

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

##### Означення 13.1.

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо:

- 1) сукупність її можливих значень удається перерахувати –  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тобто значення належать зчисленної множині – скінченній або нескінченній;
- 2) можна знайти відповідні ймовірності  $p = p_i \{X = x_i\}$  того, що випадкова величина  $X$  приймає ці значення..

##### Означення 13.2.

**Неперервною** випадковою величиною називається випадкова величина, можливі значення якої безперервно заповнюють будь-який проміжок.

Для того щоб мати вичерпну характеристику випадкової величини, необхідно знати її закон розподілу.

##### Означення 13.3.

**Закон розподілу випадкової величини** – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

##### Означення 13.4.

**Многокутник розподілу** – це діаграма залежності ймовірностей  $p_i$  можливих значень випадкової величини від самих цих значень  $x_i$ , ( $i=\{1, 2, \dots, n\}$ ) (рис. 13.1).

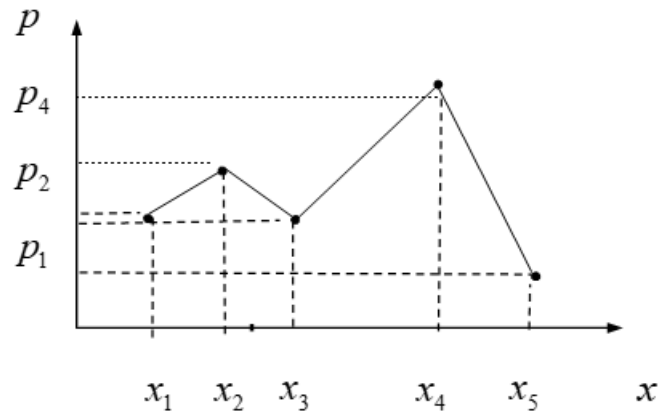


Рис. 13.1

### **Числові характеристики дискретних випадкових величин.**

#### **Математичне сподівання дискретної випадкової величини**

##### **Означення 13.5.**

**Математичним сподіванням** дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень та їхніх ймовірностей:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n \quad (13.1)$$

Якщо дискретна випадкова величина приймає скінченну кількість значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (13.2)$$

#### **Дисперсія дискретної випадкової величини**

Математичне сподівання не є характеристикою, яка дає вичерпну інформацію про випадкову величину. За математичним сподіванням неможливо зрозуміти, які значення набуває величина та наскільки ці значення розсіяні навколо математичного сподівання.

Більш вичерпну інформацію дає дисперсія.

##### **Означення 13.6.**

**Дисперсією випадкової величини X** називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \quad (13.3)$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватися наступною теоремою.

##### **Теорема 13.1.**

Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (13.4)$$

### Середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Для оцінки розсіювання значень випадкової величини навколо математичного сподівання існує ще одна характеристика – середнє квадратичне відхилення.

#### Означення 13.7.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (13.5)$$

**Приклад 13.1.** Знайти дисперсію випадкової величини, яка задана законом розподілу:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -20 | 3   | 15  |
| $P$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

#### Розв'язання

1. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини  $X$ :

$$M(X) = -20 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 15 \cdot 0,3 = 4,3$$

2. Складемо закон розподілу величини  $X^2$ :

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $X^2$ | 400 | 9   | 225 |
| $P$   | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

3. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини  $X^2$ :

$$M(X^2) = 400 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 225 \cdot 0,3 = 112,9.$$

4. Шукана дисперсія дорівнює:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 112,9 - (4,3)^2 = 94,41.$$

**Приклад 13.2.** Незалежна випадкова величина задана законом розподілу:

|     |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
| $X$ | -10  | -4   | 0    | 3    | 4    |
| $P$ | 0,36 | 0,31 | 0,08 | 0,06 | 0,19 |

Знайти всі числові характеристики випадкової величини  $X^2$ .

#### Розв'язання.

1. Знайдемо закон розподілу величини  $X^2$ :

|       |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|
| $X^2$ | 100  | 16   | 0    | 9    | 16   |
| $P$   | 0,36 | 0,31 | 0,08 | 0,06 | 0,19 |

2. Позбавимося однакових значень величини:

|       |      |     |      |      |
|-------|------|-----|------|------|
| $X^2$ | 100  | 16  | 0    | 9    |
| $P$   | 0,36 | 0,5 | 0,08 | 0,06 |

3. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X^2) = 100 \cdot 0,36 + 16 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,08 + 9 \cdot 0,06 = 36 + 8 + 0 + 0,54 = 44,54$$

4. Складемо закон розподілу величини  $(X^2)^2$ :

|           |       |     |      |      |
|-----------|-------|-----|------|------|
| $(X^2)^2$ | 10000 | 256 | 0    | 81   |
| $P$       | 0,36  | 0,5 | 0,08 | 0,06 |

5. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини  $(X^2)^2$ :

$$\begin{aligned} M((X^2)^2) &= 10000 \cdot 0,36 + 256 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,08 + 81 \cdot 0,06 \\ &= 3600 + 128 + 0 + 48,6 = 3776,6 \end{aligned}$$

6. Дисперсія величини  $(X^2)^2$  дорівнює:

$$\begin{aligned} D(X) &= M((X^2)^2) - [M(X^2)]^2 = 3776,6 - (44,54)^2 = \\ &= 3776,6 - 1983,8116 = 1792,7884 \end{aligned}$$

7. Шукане середнє квадратичне відхилення таке:

$$\sigma(X) = \sqrt{1792,7884} \approx 42,34.$$

### Неперервна випадкова величина

#### Означення 13.8.

**Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини  $F(x)$**  називається функція, яка виражає ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше за  $x$ :

$$F(x) = P(X < x).$$

**Властивість.** Ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, яке належить інтервалу  $(a; b)$ , становить

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (13.6)$$

**Приклад 13.3.** Неперервна випадкова величина має функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Визначити ймовірність того, що  $X$  потрапить в проміжок  $(1;2)$ .

**Розв'язання.** Проміжок  $(1;2)$  належить проміжку  $(0;2)$ . Це другий інтервал у функції розподілу. Тому за формулою (13.6) ймовірність того, що  $X$  виявиться у межах  $(1;2)$ , дорівнює:

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - \frac{1}{8} \cdot 1^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

### Щільність розподілу ймовірностей.

#### Означення 13.9.

**Щільністю розподілу ймовірностей** випадкової величини  $X$  називається функція

$$f(x) = F'(x) \quad (13.7)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал через щільність розподілу обчислюється за формулою:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (13.8)$$

**Приклад 13.4.** Для випадкової величини  $X$  з приклада 13.3 знайти щільність розподілу  $f(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

**Розв'язання.** За означенням:  $f(x) = F'(x)$ , тому :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \frac{1}{8} \cdot 3x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

## Числові характеристики неперервних випадкових величин

### Математичне сподівання

#### Означення 13.10.

**Математичним сподіванням** неперервної випадкової величини називається

границя  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$ , (якщо вона існує).

Звідси одержуємо формулу для обчислення:

$$M[X] = \int_a^b x f(x) dx = \quad (13.9)$$

У випадку, якщо  $-\infty < x < +\infty$ ,

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (13.10)$$

### Дисперсія неперервної випадкової величини

Якщо  $X$  – неперервна випадкова величина, значення якої  $a \leq x \leq b$ , і  $f(x)$  її щільність розподілу, то її дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad (13.11)$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватися наступною формулою:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X) \quad (13.12)$$

У випадку, якщо  $-\infty < x < +\infty$ ,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad (13.13)$$

**Приклад 13.5.** Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, & -2 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Необхідно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей  $f(x)$ ; б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової

величини  $X$ ; в) знайти ймовірність того, що  $X$  прийме значення з інтервалу  $(0; 2)$ ; г) побудувати графіки функцій  $F(x)$ ,  $f(x)$ .

### Розв'язання.

а) Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу (13.7):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{2}{9}(x+2), & -2 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

б) Обчислимо математичне сподівання неперервної випадкової величини за формулою (13.9):

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{2}{9} \int_{-\infty}^{\infty} x(x+2)dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (x^2 + 2x)dx = \\ &= \frac{2}{9} \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{2}{9} \left( \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Дисперсію неперервної випадкової величини обчислимо за формулою (13.12):

$$\begin{aligned} ; \quad D(X) &= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X); \\ D(X) &= \frac{2}{9} \int_{-2}^1 x^2 \cdot (x+2) dx - M^2(X) = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (x^3 + 2x^2) dx - 0 = \\ &= \frac{2}{9} \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) - \left( 4 - \frac{16}{3} \right) \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{2} = 0,5; \end{aligned}$$

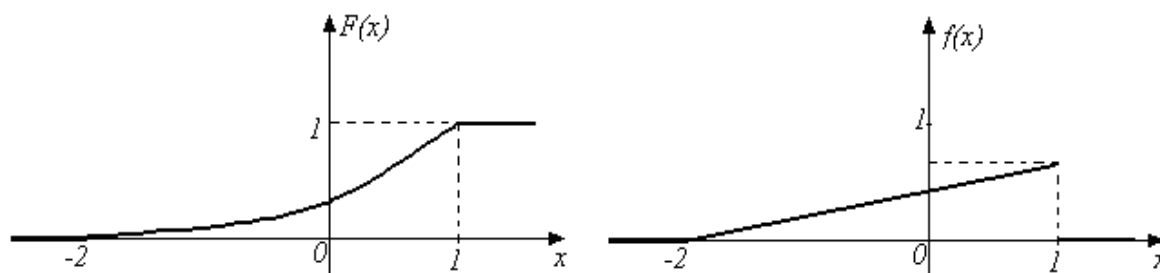
Обчислимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ :

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,5} = 0,71.$$

в) Обчислимо ймовірність того, що  $X$  прийме значення з інтервалу  $(0; 2)$  за формулою (13.8):

$$P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^1 \frac{2}{9}(x+2)dx = \frac{2}{9} \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{9} \left( \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{5}{9}.$$

г) Побудуємо графіки функцій  $F(x)$  і  $f(x)$  відповідно.



### Теоретичні запитання

1. Яка величина називається випадковою?
2. Яка випадкова величина називається дискретною?
3. Яка випадкова величина називається неперервною?
4. Які способи завдання дискретної випадкової величини?
5. Дати визначення математичному сподіванню дискретної випадкової величини.
6. Як обчислюється математичне сподівання дискретної випадкової величини?
7. Сформулюйте властивості математичного сподівання дискретної випадкової величини.
8. Що називається дисперсією дискретної випадкової величини?
9. Як обчислюється дисперсія дискретної випадкової величини?
10. Сформулюйте властивості дисперсії дискретної випадкової величини.
11. Як обчислюється середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини?
12. В чому різниця дисперсії від середнього квадратичного відхилення?
13. Дати визначення функції розподілу неперервної випадкової величини.
14. Які основні властивості функції розподілу неперервної випадкової величини?
15. Що називається щільністю ймовірності?
16. Як обчислюється математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини?

### Завдання для самостійної роботи

1. Для заданих дискретних величин  $X$  та  $Y$  знайти середнє квадратичне відхилення:

|        |     |     |      |      |
|--------|-----|-----|------|------|
| $x_i,$ | -5  | -3  | 6    | 8    |
| $p_i,$ | 0,4 | 0,3 | 0,15 | 0,15 |

|        |     |      |      |
|--------|-----|------|------|
| $y_i,$ | -4  | 0    | 16   |
| $p_i,$ | 0,4 | 0,45 | 0,15 |

2. Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \frac{1}{5} \cdot x^5, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Необхідно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей  $f(x)$ ; б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ ; в) знайти ймовірність того, що  $X$  прийме значення з інтервалу  $(0; 0,5)$ ; г) побудувати графіки функцій  $F(x)$  та  $f(x)$ .

### Індивідуальні завдання

1) Дано незалежні випадкові величини  $X$  та  $Y$ . Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величин  $X$  та  $Y$ ;

| Варіант |            |           |            |          |           |          |            |            |           |           |          |
|---------|------------|-----------|------------|----------|-----------|----------|------------|------------|-----------|-----------|----------|
| 1       | $X$<br>$p$ | -4<br>0,1 | 0<br>0,2   | 3<br>0,4 | 5<br>0,3  |          | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,3   | 2<br>0,3  | 3<br>0,4  |          |
| 2       | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | 0<br>0,2   | 1<br>0,3 | 2<br>0,4  |          | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,3   | 1<br>0,5  | 2<br>0,2  |          |
| 3       | $X$<br>$p$ | -3<br>0,1 | -2<br>0,2  | 0<br>0,3 | 2<br>0,4  |          | $Y$<br>$p$ | -1<br>0,25 | 2<br>0,5  | 4<br>0,25 |          |
| 4       | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | -1<br>0,1  | 0<br>0,3 | 1<br>0,5  |          | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,1   | 1<br>0,3  | 3<br>0,6  |          |
| 5       | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | -1<br>0,15 | 0<br>0,5 | 4<br>0,25 |          | $Y$<br>$p$ | 2<br>0,25  | 3<br>0,5  | 4<br>0,25 |          |
| 6       | $X$<br>$p$ | 2<br>0,4  | 4<br>0,2   | 6<br>0,1 | 8<br>0,3  |          | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,5   | 1<br>0,25 | 2<br>0,25 |          |
| 7       | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | -1<br>0,2  | 0<br>0,5 | 1<br>0,2  |          | $Y$<br>$p$ | 2<br>0,4   | 4<br>0,2  | 6<br>0,1  | 8<br>0,3 |
| 8       | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | -1<br>0,2  | 0<br>0,4 | 1<br>0,1  | 2<br>0,2 | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,5   | 1<br>0,3  | 4<br>0,1  | 9<br>0,1 |
| 9       | $X$<br>$p$ | -6<br>0,1 | 0<br>0,5   | 3<br>0,3 | 6<br>0,1  |          | $Y$<br>$p$ | 3<br>0,1   | 4<br>0,4  | 6<br>0,5  |          |
| 10      | $X$<br>$p$ | 0<br>0,3  | 1<br>0,3   | 2<br>0,2 | 3<br>0,2  |          | $Y$<br>$p$ | -1<br>0,2  | 0<br>0,6  | 2<br>0,2  |          |

|           |            |           |           |           |           |            |            |             |             |            |            |           |
|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|-----------|
| <b>11</b> | $X$<br>$p$ | -1<br>0,1 | 0<br>0,2  | 1<br>0,3  | 2<br>0,4  |            | $Y$<br>$p$ | -2<br>0,6   | -1<br>0,3   | 0<br>0,1   |            |           |
| <b>12</b> | $X$<br>$p$ | 0<br>0,25 | 1<br>0,5  | 2<br>0,25 |           |            | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,4    | 1<br>0,3    | 2<br>0,2   | 3<br>0,1   |           |
| <b>13</b> | $X$<br>$p$ | 4<br>0,7  | 7<br>0,2  | 6<br>0,1  |           |            | $Y$<br>$p$ | -3<br>0,2   | -2<br>0,4   | 0<br>0,4   |            |           |
| <b>14</b> | $X$<br>$p$ | -1<br>0,3 | 0<br>0,4  | 2<br>0,2  | 3<br>0,1  |            | $Y$<br>$p$ | -2<br>0,1   | 0<br>0,5    | 1<br>0,4   |            |           |
| <b>15</b> | $X$<br>$p$ | 0<br>0,4  | 1<br>0,3  | 2<br>0,2  | 3<br>0,1  |            | $Y$<br>$p$ | -4<br>0,4   | 2<br>0,3    | 8<br>0,1   | 10<br>0,2  |           |
| <b>16</b> | $X$<br>$p$ | -2<br>0,2 | 0<br>0,3  | 4<br>0,5  |           |            | $Y$<br>$p$ | -4,2<br>0,1 | -1,2<br>0,4 | 1,8<br>0,3 | 4,8<br>0,2 |           |
| <b>17</b> | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | 0<br>0,5  | 3<br>0,4  |           |            | $Y$<br>$p$ | 1<br>0,05   | 2<br>0,18   | 3<br>0,23  | 4<br>0,41  | 5<br>0,13 |
| <b>18</b> | $X$<br>$p$ | -3<br>0,1 | -2<br>0,2 | 0<br>0,3  | 1<br>0,4  |            | $Y$<br>$p$ | 2<br>0,25   | 3<br>0,15   | 4<br>0,27  | 5<br>0,08  | 8<br>0,25 |
| <b>19</b> | $X$<br>$p$ | 4<br>0,21 | 5<br>0,17 | 6<br>0,18 | 8<br>0,23 | 10<br>0,21 | $Y$<br>$p$ | -1<br>0,1   | 0<br>0,3    | 2<br>0,5   | 3<br>0,1   |           |
| <b>20</b> | $X$<br>$p$ | 4<br>0,7  | 6<br>0,2  | 7<br>0,1  |           |            | $Y$<br>$p$ | -3<br>0,2   | -2<br>0,4   | 0<br>0,4   |            |           |
| <b>21</b> | $X$<br>$p$ | -1<br>0,1 | 0<br>0,2  | 1<br>0,3  | 2<br>0,4  |            | $Y$<br>$p$ | -2<br>0,6   | -1<br>0,3   | 0<br>0,1   |            |           |
| <b>22</b> | $X$<br>$p$ | 0<br>0,25 | 1<br>0,5  | 2<br>0,25 |           |            | $Y$<br>$p$ | 0<br>0,4    | 1<br>0,3    | 2<br>0,2   | 3<br>0,1   |           |
| <b>23</b> | $X$<br>$p$ | 4<br>0,7  | 7<br>0,2  | 6<br>0,1  |           |            | $Y$<br>$p$ | -3<br>0,2   | -2<br>0,4   | 0<br>0,4   |            |           |
| <b>24</b> | $X$<br>$p$ | -1<br>0,3 | 0<br>0,4  | 2<br>0,2  | 3<br>0,1  |            | $Y$<br>$p$ | -2<br>0,1   | 0<br>0,5    | 1<br>0,4   |            |           |
| <b>25</b> | $X$<br>$p$ | 0<br>0,4  | 1<br>0,3  | 2<br>0,2  | 3<br>0,1  |            | $Y$<br>$p$ | -4<br>0,4   | 2<br>0,3    | 8<br>0,1   | 10<br>0,2  |           |
| <b>26</b> | $X$<br>$p$ | -2<br>0,2 | 0<br>0,3  | 4<br>0,5  |           |            | $Y$<br>$p$ | -4,2<br>0,1 | -1,2<br>0,4 | 1,8<br>0,3 | 4,8<br>0,2 |           |
| <b>27</b> | $X$<br>$p$ | -2<br>0,1 | 0<br>0,5  | 3<br>0,4  |           |            | $Y$<br>$p$ | 1<br>0,05   | 2<br>0,18   | 3<br>0,23  | 4<br>0,41  | 5<br>0,13 |
| <b>28</b> | $X$        | -3        | -2        | 0         | 1         |            | $Y$        | 2           | 3           | 4          | 5          | 8         |

|           |     |      |      |      |      |      |     |      |      |      |      |      |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|
|           | $p$ | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  |      | $p$ | 0,25 | 0,15 | 0,27 | 0,08 | 0,25 |
| <b>29</b> | $X$ | 4    | 5    | 6    | 8    | 10   | $Y$ | -1   | 0    | 2    | 3    |      |
|           | $p$ | 0,21 | 0,17 | 0,18 | 0,23 | 0,21 | $p$ | 0,1  | 0,3  | 0,5  | 0,1  |      |
| <b>30</b> | $X$ | 4    | 6    | 7    |      |      | $Y$ | -3   | -2   | 0    |      |      |
|           | $p$ | 0,7  | 0,2  | 0,1  |      |      | $p$ | 0,2  | 0,4  | 0,4  |      |      |

2) Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу а) для непарних варіантів, б) для парних варіантів:

$$\text{а) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{(x-a)^2}{b^2}, & a < x \leq a+b, \\ 1, & x > a+b; \end{cases} \quad \text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1 - \frac{(a+b-x)^2}{b^2}, & a < x \leq a+b, \\ 1, & x > a+b. \end{cases}$$

Необхідно:

- а) знайти щільність розподілу ймовірності  $f(x)$ ;
- б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ ;
- в) знайти ймовірність того, що  $X$  прийме значення з інтервалу  $(c, d)$ ;
- г) побудувати графіки функцій  $F(x)$  та  $f(x)$ .

| Варіант       | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | Варіант       | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---------------|-----|-----|-----|-----|---------------|-----|-----|-----|-----|
| <b>1; 2</b>   | -1  | 3   | 0   | 4   | <b>17; 18</b> | 0   | 2   | 1   | 3   |
| <b>3; 4</b>   | -2  | 4   | -1  | 1   | <b>19; 20</b> | -2  | 2   | -1  | 1   |
| <b>5; 6</b>   | 4   | 2   | 0   | 5   | <b>21; 22</b> | 0   | 3   | -1  | 2   |
| <b>7; 8</b>   | 3   | 3   | 2   | 5   | <b>23; 24</b> | 1   | 2   | 0   | 2   |
| <b>9; 10</b>  | 1   | 3   | 2   | 5   | <b>25; 26</b> | 1   | 2   | 2   | 4   |
| <b>11; 12</b> | 4   | 2   | 0   | 5   | <b>27; 28</b> | 0   | 3   | -1  | 2   |
| <b>13; 14</b> | 3   | 3   | 2   | 5   | <b>29; 30</b> | 1   | 2   | 0   | 2   |
| <b>15; 16</b> | 1   | 3   | 2   | 5   |               |     |     |     |     |

## РОЗДІЛ IX

### Елементи економіко – математичного моделювання

#### Практичне заняття 14

**Тема:** Постановка оптимізаційних економічних задач

**Мета:** ознайомити студентів з деякими типами економічних задач математичного програмування; надати приклади побудови загальної економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування

#### Математичне моделювання як метод наукового дослідження економічних явищ і процесів

##### Означення 14.1.

**Модель від лат.** («modulus» — зразок, норма, міра.) — це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

##### Приклад 14.1. Задача використання ресурсів.

Для виготовлення трьох виробів  $A$ ,  $B$  і  $C$  використовується три види сировини. Витрати сировини, необхідні для виробництва виробів  $A$ ,  $B$  і  $C$ , а також забезпечення сировиною виробів кожного виду, прибуток від реалізації виробів наведені в таблиці:

| Вид сировини                                    | Витрати сировини на<br>одиницю виробу (в кг) |          |          | Загальна кількість<br>сировини |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------|----------|--------------------------------|
|                                                 | <i>A</i>                                     | <i>B</i> | <i>C</i> |                                |
| I                                               | 18                                           | 15       | 12       | 360                            |
| II                                              | 6                                            | 4        | 8        | 192                            |
| III                                             | 5                                            | 3        | 3        | 180                            |
| Прибуток від реалізації<br>одиниці виробу, грн. | 9                                            | 10       | 16       |                                |

Скласти план виробництва продукції *A*, *B* і *C*, який забезпечив би максимальний прибуток від реалізації.

**Розв’язання.** Побудуємо математичну модель ЗЛП. Спочатку введемо змінні задачі.

Припустимо, що  $x_1$  – кількість виробів *A*,  $x_2$  – кількість виробів *B*,  $x_3$  – кількість виробів *C*. Тоді сировини I –го типу буде витрачено  $18x_1 + 15x_2 + 12x_3$ , сировини II –го типу витрачено  $6x_1 + 4x_2 + 8x_3$ , сировини III –го типу -  $5x_1 + 3x_2 + 3x_3$ . Враховуючи, що на кожний вид сировини є обмеження, складемо нерівності:  $18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360$ ,  $6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192$  та  $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180$ . Оскільки  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  - це кількість, то накладаємо на них умову невід’ємності:  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

Загальний прибуток від реалізації всієї продукції є цільовою функцією та складає  $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ .

Тоді математичну модель запишемо у вигляді:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

#### Приклад 14.2. Задача змішування та дозування.

Міський молочний завод виготовляє молоко, кефір і сметану, розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1,01 т, 1,01 т і 9,45 т молока. При цьому затрати робочого часу при розливі 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва молочних виробів завод може використати 136 т молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани – впродовж 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно становить 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виробляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. Скласти математичну модель задачі.

| Продукція               | Сировина, т  | Затрати, маш.-<br>год.                                | Обмеження<br>в товарі, т | Прибуток від<br>реалізації,<br>грн |
|-------------------------|--------------|-------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| Молоко                  | 1,01         | 0,18                                                  | Не менш 100              | 30                                 |
| Кефир                   | 1,01         | 0,19                                                  | -                        | 22                                 |
| Сметана                 | 9,45         | 3,25                                                  | -                        | 136                                |
| Обмеження<br>в ресурсах | не більш 136 | 21,4(для молока<br>та кефиру), 16,25<br>(для сметани) |                          |                                    |

**Розв’язання.** Припустимо, що молочний завод буде щодня виготовляти  $x_1$  тонну молока,  $x_2$  тони кефіру і  $x_3$  тони сметани. Тоді йому для виробництва цієї продукції необхідно  $1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3$  тони молока.

Оскільки завод може використовувати щодня не більше 136 т молока, то повинна виконуватися нерівність

$$1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3 \leq 136.$$

Аналогічні міркування, проведені відносно можливого використання ліній розливу молочної продукції і автоматів з розфасовки сметани, дозволяють записати такі нерівності:

$$\begin{aligned} 0,18x_1 + 0,19x_2 &\leq 21,4, \\ 3,25x_3 &\leq 16,25. \end{aligned}$$

Оскільки щодня повинно вироблятися не менше 100 т молока, то  $x_1 \geq 100$ . Далі, за своїм економічним значенням змінні  $x_2$  і  $x_3$  можуть набувати тільки невід'ємних значень:  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ . Загальний прибуток від реалізації  $x_1$  тони молока,  $x_2$  тони кефіру і  $x_3$  тони сметани дорівнює  $30x_1 + 22x_2 + 136x_3$  грн. Таким чином, переходимо до наступної математичної моделі задачі:

$$\begin{cases} 1,01x_1 + 1,01x_2 + 9,45x_3 \leq 136, \\ 0,18x_1 + 0,19x_2 \leq 21,4, \\ 3,25x_3 \leq 16,25, \\ x_1 \geq 100, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Це система лінійних нерівностей із трьома невідомими  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  (система обмежень) і лінійна функція (функція цілі) відносно цих самих змінних

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3.$$

Математична модель задачі виглядає так: знайти такий оптимальний план  $X = \{x_1; x_2; x_3\}$ , при якому серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей функція цілі матиме максимальне значення.

Оскільки система являє собою співвідношення лінійних нерівностей і функція мети лінійна, то задача є задачею лінійного програмування.

### Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми « $\Sigma$ ». Тоді цільову функцію можна подати так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

а систему обмежень так:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i (i=1, 2, \dots, m); \\ x_j &\geq 0 (j=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Виділяють три форми запису задачі лінійного програмування: загальну, стандартну (симетричну) та канонічну.

| Форма запису ЗЛП | Цільова функція $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ | Система обмежень                                                                                                |
|------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Загальна         | Максимум або мінімум                       | $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$ |
| Стандартна       | Максимум                                   | $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$                |
| Канонічна        | Максимум                                   | $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$                   |

Зауважимо, що коли необхідно знайти мінімум функції  $F$ , можна перейти до знаходження максимуму:

$$\max F = - \min F, \quad \min F = - \max F.$$

Для переходу від загальної ЗЛП до канонічної треба обмеження – нерівності перетворити в обмеження-рівності шляхом використання так званих допоміжних невід’ємних змінних.

|                                                      |               |                                                             |
|------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|
| обмеження в формі нерівності                         |               | обмеження в формі рівності                                  |
| $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$ | $\Rightarrow$ | $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$ |
| $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j$ | $\Rightarrow$ | $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + x_{n+2} = b_j$ |

**Приклад 14.3.** Записати ЗЛП у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

**Розв’язання.** Оскільки канонічний вигляд ЗЛП потребує від системи обмежень тільки наявності знаків  $=$ , то введемо невід’ємні допоміжні змінні  $x_6, x_7, x_8, x_9$  (кількість змінних відповідає кількості рядків системи обмежень). Додавання до кожного рядка системи невід’ємного виразу дає можливість позбавитися від знака «менше або дорівнює» та замінити його на «дорівнює». Введення допоміжних змінних не змінює цільової функції. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 \geq 8, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 9. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \rightarrow \max$$

Отже, будь-яку задачу ЛП можна записати в канонічній формі.

**Приклад 14.4.** Записати ЗЛП у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 4. \end{cases}$$

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

**Розв’язання.** Оскільки канонічний вигляд ЗЛП потребує від системи обмежень не тільки наявності знаків  $=$ , а й максимізації цільової функції, то введемо дві невід’ємні допоміжні змінні  $x_5, x_6$  (перший рядок системи обмежень не потребує зміни). Окрім цього, помножимо третій рядок системи на  $-1$ , при цьому

змінимо знак нерівності на протилежний. Для цільової функції використаємо властивість:  $\min F = -\max F$ . Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max$$

### Теоретичні запитання

1. Дайте поняття математичної моделі.
2. Які відомі етапи математичного моделювання?
3. Яка класифікація економіко-математичних моделей відома?
4. Назвіть типи економічних задач математичного програмування.
5. Запишіть загальну математичну модель лінійного програмування.
6. З яких виразів може складатися система обмежень?
7. З яких виразів може складатися цільова функція?
8. Які є форми запису задач лінійного програмування?
9. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

### Завдання для самостійної роботи

1. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в таблиці:

| № п/п | Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га | Сільськогосподарська культура |                | Наявний ресурс |
|-------|----------------------------------------------------|-------------------------------|----------------|----------------|
|       |                                                    | Озима пшениця                 | Цукровий буряк |                |
| 1     | Жива праця, людино-днів                            | 5                             | 25             | 270            |
| 2     | Механізована праця, людино-днів                    | 2                             | 8              | 80             |
| 3     | Прибуток, тис. грн.                                | 0,7                           | 1              |                |

Скласти математичну модель вирощування культур, щоб прибуток був максимальним.

2. Записати в канонічній формі задачу ЛП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -180, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

### Індивідуальні завдання

**Задача.** Відомо, що для виготовлення двох видів продукції  $P_1$  і  $P_2$  підприємству необхідно три види сировини:  $S_1, S_2, S_3$ . Запаси сировини; число одиниць сировини, затрачуваних на виготовлення одиниці продукції і прибуток від реалізації кожного виду продукції задано в таблиці. Скласти математичну модель задачі планування виробництва продукції, при якій прибуток буде максимальним (скласти задачу лінійного програмування (ЗЛП) у стандартній формі з обмеженнями-нерівностями).

#### Варіант 1

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 4$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 2$                                                  | $c_2 = 5$    |

#### Варіант 2

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 20$     | $a_{11} = 1$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 3$                                                  | $c_2 = 3$    |

**Варіант 3**

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 8$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 10$     | $a_{31} = 2$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 3$    |

**Варіант 4**

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 3$ |
| $S_3$        | $b_3 = 24$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 6$                                                  | $c_2 = 6$    |

**Варіант 5**

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 4$    |

**Варіант 6**

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 8$      | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 2$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 7

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 8$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 8$      | $a_{31} = 2$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 2$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 8

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 16$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 9

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 24$     | $a_{11} = 4$                                               | $a_{12} = 3$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 20$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 5$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 10

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 12$     | $a_{21} = 4$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 11

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 4$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 2$                                                  | $c_2 = 5$    |

### Варіант 12

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 20$     | $a_{11} = 1$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 3$                                                  | $c_2 = 3$    |

### Варіант 13

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 8$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 10$     | $a_{31} = 2$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 3$    |

### Варіант 14

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 3$ |
| $S_3$        | $b_3 = 24$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 6$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 15

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 4$    |

### Варіант 16

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 8$      | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 2$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 17

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 8$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 8$      | $a_{31} = 2$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 2$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 18

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 16$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 19

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 24$     | $a_{11} = 4$                                               | $a_{12} = 3$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 20$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 5$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 20

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 12$     | $a_{21} = 4$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 22

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 24$     | $a_{11} = 4$                                               | $a_{12} = 3$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 20$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 5$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 23

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 12$     | $a_{21} = 4$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 24

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 4$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 2$                                                  | $c_2 = 5$    |

### Варіант 25

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 20$     | $a_{11} = 1$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 10$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 16$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 3$                                                  | $c_2 = 3$    |

### Варіант 26

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 8$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 2$ |
| $S_3$        | $b_3 = 10$     | $a_{31} = 2$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 3$    |

### Варіант 27

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 15$     | $a_{11} = 3$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 24$     | $a_{21} = 3$                                               | $a_{22} = 3$ |
| $S_3$        | $b_3 = 24$     | $a_{31} = 6$                                               | $a_{32} = 0$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 6$                                                  | $c_2 = 6$    |

### Варіант 28

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 5$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 8$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 4$    |

### Варіант 29

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 10$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 1$ |
| $S_2$        | $b_2 = 6$      | $a_{21} = 1$                                               | $a_{22} = 1$ |
| $S_3$        | $b_3 = 8$      | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 2$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 1$                                                  | $c_2 = 2$    |

### Варіант 30

| Вид сировини | Запас сировини | Витрати сировини на одиницю продукції, ум. од., за видами: |              |
|--------------|----------------|------------------------------------------------------------|--------------|
|              |                | $P_1$                                                      | $P_2$        |
| $S_1$        | $b_1 = 12$     | $a_{11} = 2$                                               | $a_{12} = 2$ |
| $S_2$        | $b_2 = 16$     | $a_{21} = 2$                                               | $a_{22} = 4$ |
| $S_3$        | $b_3 = 12$     | $a_{31} = 0$                                               | $a_{32} = 4$ |
| Прибуток     |                | $c_1 = 4$                                                  | $c_2 = 6$    |

## Практичне заняття 15

### Тема: Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

**Мета:** ознайомити студентів з алгоритмом графічного методу розв'язання задач лінійного програмування, продемонструвати різні випадки, які може набувати область допустимих значень та показати типи задач, які можуть бути розв'язані графічним методом.

**Приклад 15.1.** Знайти максимум і мінімум функції  $F = x_1 + x_2$  за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Побудуємо багатокутник розв'язків (рисунок 15.1). Для цього будуємо прямі:

$$2x_1 + 4x_2 = 16, \quad (1)$$

$$-4x_1 + 2x_2 = 8, \quad (2)$$

$$x_1 + 3x_2 = 9. \quad (3)$$

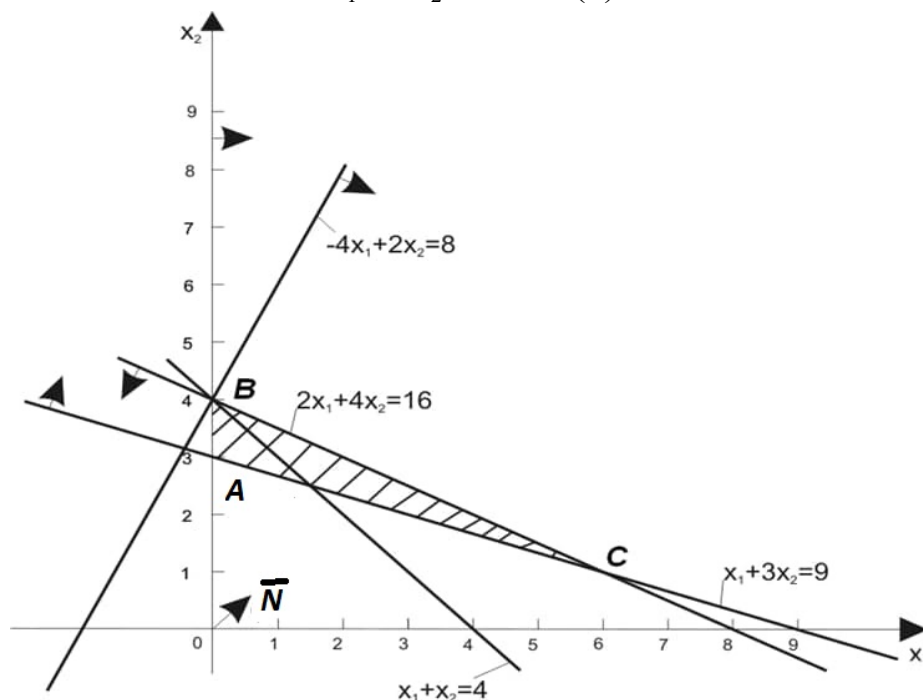


Рис.15.1

Знаходимо півплощини, які відповідають умовам, заданим в початковій системі. Бачимо, що багатокутником розв'язків є трикутник  $ABC$ . Координати всіх точок цього трикутника задовольняють умові невід'ємності і нерівностям системи

обмежень задачі. Отже, задача буде розв'язана, якщо серед точок трикутника  $ABC$  знайти такі, в яких функція  $F = x_1 + x_2$  набуває максимального і мінімального значення. Для знаходження таких точок побудуємо пряму  $x_1 + x_2 = \text{const}$  (наприклад,  $x_1 + x_2 = 4$ ) і вектор  $\overline{N} = (1; 1)$ . (Для зручності вектор виводимо з початку координат).

Рухаючи дану пряму паралельно самій собі у напрямі вектора  $\overline{N} = (1; 1)$ , бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв'язків задачі (з трикутником  $ABC$ ) є точка  $C$ . Отже, в цій точці функція  $F$  матиме максимальне значення.

Оскільки  $C$  — точка перетину прямих (1) і (3), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 1$ . Таким чином, максимальне значення функції  $F_{\max} = 7$ .

Для знаходження мінімального значення цільової функції задачі рухаємо пряму  $x_1 + x_2 = 4$  в напрямку, протилежному напрямку вектора  $\overline{N}$ . Для визначення координат точки  $A$  розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

звідки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ . Підставляючи знайдені значення змінних у цільову функцію, отримаємо  $F_{\min} = 3$ .

**Приклад 15.2.** Знайти максимальне значення функції

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** На відміну від розглянутої вище задачі, у даній задачі обмеження задано у вигляді рівнянь. При цьому число невідомих дорівнює п'яти. Тому дану задачу потрібно звести до задачі, в якій число невідомих дорівнювало б двом. Для цього перейдемо від запису заданої задачі у формі основної до задачі, записаної у стандартній формі. Оскільки  $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ , то, відкидаємо їх у системі обмежень та заміняємо знаки рівнянь на знаки нерівностей. Отримаємо

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Для одержання нової цільової функції виразимо з кожного початкового рівняння змінні  $x_3, x_4, x_5$  через  $x_1, x_2$  та підставимо в  $F$ . Отримаємо

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

Побудуємо багатокутник розв'язків отриманої задачі (рисунок 15.2).

Для цього будуємо прямі:

$$2x_1 + x_2 = 10, \quad (1)$$

$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8. \quad (3)$$

Знаходимо півплощини, які відповідають умовам, заданим в початковій системі. Бачимо, що багатокутником розв'язків є чотирикутник  $ABCD$ . Координати всіх точок цього чотирикутника задовольняють умові невід'ємності і нерівностям системи обмежень задачі. Отже, задача буде розв'язана, якщо серед точок чотирикутника  $ABCD$  знайти такі, в яких функція  $F = 2x_1 + 3x_2$  набуває максимального значення. Для знаходження такої точки побудуємо пряму  $2x_1 + 3x_2 = \text{const}$  (наприклад,  $2x_1 + 3x_2 = 14$ ) і вектор  $\overline{N} = (2; 3)$ . (Для зручності вектор виводимо з початку координат).

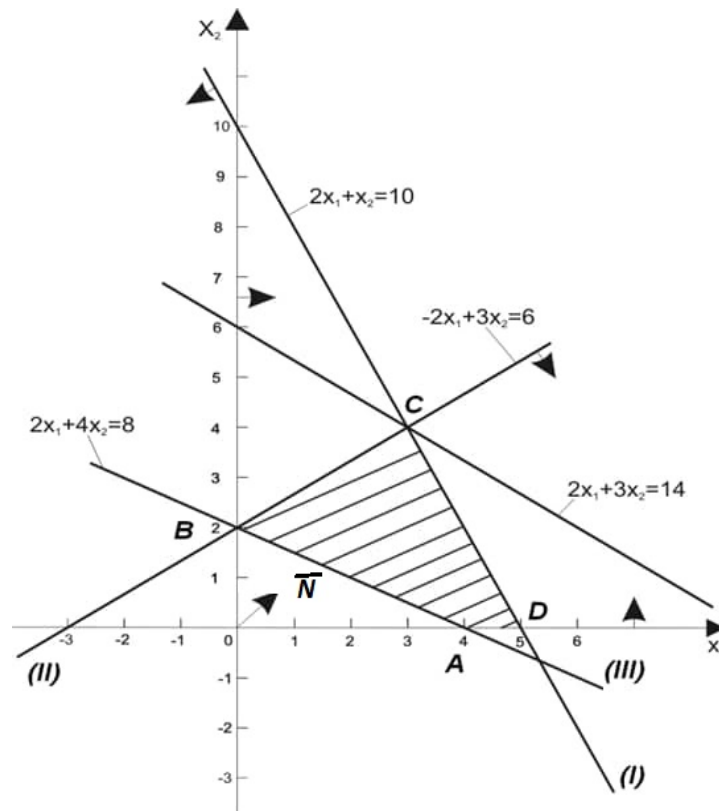


Рис.15.2

Рухаючи дану пряму паралельно самій собі у напрямі вектора  $\bar{N} = (2;3)$ , бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв'язків є точка  $C$ . Отже, в цій точці функція  $F$  матиме максимальне значення.

Як видно з рисунку, точка  $C$  знаходиться на перетині прямих (1) та (2).

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

Звідси  $x_2 = 4$ ,  $x_1 = 3$ .

Підставляючи знайдені значення  $x_1$  і  $x_2$  у початкові рівняння системи обмежень задачі, знайдемо  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 14$ . Підставимо значення змінних в цільову функцію, маємо  $F = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$ . Отже, оптимальним планом заданої задачі буде  $X^* = (3; 4; 0; 0; 14)$ . При цьому плані  $F_{\max} = 18$ .

### Теоретичні запитання

1. Які задачі можна розв'язувати графічним методом?
2. Які основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте етапи алгоритму графічного методу.
4. Що становить область допустимих планів для задачі з двома та трьома змінними?

5. Як будується область допустимих планів для задачі з двома змінними?
6. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
7. За яких умов задача лінійного програмування має альтернативний розв'язок?
8. За яких умов задача лінійного програмування з кількістю змінних, більше, ніж 3, може бути розв'язана графічно?

### Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати графічно ЗЛП: знайти оптимальний розв'язок, який надає екстремальне значення цільовій функції:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min, \max$$

$$б) \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 6; \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70; \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ x_1 \leq 6; x_2 \geq 2. \end{cases}$$

$$F = 3,5x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \max.$$

2). Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 дол. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 дол., а телереклами — 90 дол. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіореклами. Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витратитися на рекламу, за якого обсягу збут продукції фірми буде найбільшим. Розв'язати ЗЛП графічно.

3). Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива

(фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожен культуру та запас добрив у господарстві наведено в таблиці:

| Мінеральні добрива | Норма внесення добрива, кг діючої речовини /га |        | Запас добрив, кг |
|--------------------|------------------------------------------------|--------|------------------|
|                    | Капуста                                        | Томати |                  |
| Фосфорні           | 150                                            | 400    | 6000             |
| Калійні            | 500                                            | 300    | 9000             |

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 ум. од., а 1 ц томатів — 20 ум. од. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів — 200 ц/га. Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують максимально можливого запасу. Розв'язати задачу графічно.

### Індивідуальні завдання

Графічним методом визначити оптимальні плани задач лінійного програмування.

| Варіант 5                                                                                                                                                                  | Варіант 6                                                                                                                                                                           | Варіант 7                                                                                                                                               | Варіант 8                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\min(\max) (2x_1 - 4x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | $\min(\max) (x_1 - 3x_2)$<br>$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$          | $\min(\max) (3x_1 + 4x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 5, \\ x_2 \geq 5. \end{cases}$                      | $\min(\max) (x_1 + x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$      |
| $\min(\max) (3x_1 + 3x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 3. \end{cases}$                                         | $x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \max$<br>$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | $\min(\max) (x_1 + x_2)$<br>$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ | $\min(\max) (x_1 - 2x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Варіант 9</b><br><br>$\min(\max) (x_1 + 2x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$x_1 + x_2 \rightarrow \min, \max$<br>$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$         | <b>Варіант 10</b><br><br>$\min(\max) (4x_1 + 3x_2)$<br>$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (x_1 + 2x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq 1, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ | <b>Варіант 11</b><br><br>$\min(\max) (3x_1 - 2x_2)$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \geq -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (x_1 + 3x_2)$<br>$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ | <b>Варіант 12</b><br><br>$\min(\max) (3x_1 + x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (2x_1 + 2x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                             |
| <b>Варіант 13</b><br><br>$\min(\max) (3x_1 - 2x_2)$<br>$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \geq -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (x_1 + x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <b>Варіант 14</b><br><br>$\min(\max) (3x_1 + x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (x_1 + 3x_2)$<br>$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$               | <b>Варіант 15</b><br><br>$\min(\max) (-x_1 - 2x_2)$<br>$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (3x_1 - 6x_2)$<br>$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$        | <b>Варіант 16</b><br><br>$\min(\max) (2x_1 + 3x_2)$<br>$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 4x_1 - 2x_2 \geq -8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$<br><br>$\min(\max) (2x_1 - 9x_2)$<br>$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |

|                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Варіант 17</b></p> $Z = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 7x_1 - x_2 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 18</b></p> $\min(\max) (2x_1 - 3x_2)$ $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 19</b></p> $\min(\max) (2x_1 - x_2)$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 20</b></p> $\min(\max) (5x_1 - 2x_2)$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |
| $\min(\max) (2x_1 + 2x_2)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$                                                                          | $\min(\max) (x_1 + x_2)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                                 | $\min(\max) (x_1 + 2x_2)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$                                              | $\min(\max) (2x_1 + 2x_2)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$                                                                   |
| <p><b>Варіант 21</b></p> $\min(\max) (-x_1 + x_2)$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ -4x_1 + x_2 \geq -8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$        | <p><b>Варіант 22</b></p> $\min(\max) (-2x_1 + x_2)$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                            | <p><b>Варіант 23</b></p> $\min(\max) (2x_1 + 3x_2)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 24</b></p> $\min(\max) (3x_1 - 2x_2)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + x_2 \geq -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                   |
| $\min(\max) (2x_1 + 2x_2)$ $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$                                                   | $\min(\max) (-x_1 - 2x_2)$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                                                 | $\min(\max) (x_1 + 3x_2)$ $\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$                                              | $\min(\max) (5x_1 + 5x_2)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$                            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Варіант 25</b></p> <p><math>\min(\max) (2x_1 - x_2)</math></p> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ <p><math>\min(\max) (2x_1 + 2x_2)</math></p> $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 26</b></p> <p><math>\min(\max) (x_1 + 2x_2)</math></p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq 1, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ <p><math>\min(\max) (-x_1 - 2x_2)</math></p> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 27</b></p> <p><math>\min(\max) (x_1 + 2x_2)</math></p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ <p><math>\min(\max) (x_1 + 3x_2)</math></p> $\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$ | <p><b>Варіант 28</b></p> <p><math>x_1 + x_2 \rightarrow \min, \max</math></p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ <p><math>\min(\max) (5x_1 + 5x_2)</math></p> $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |
| <p><b>Варіант 29</b></p> <p><math>\min(\max) (-x_1 + x_2) \quad \min(\max) (2x_1 + 2x_2)</math></p> $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ -4x_1 + x_2 \geq -8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p><b>Варіант 30</b></p> <p><math>\min(\max) (2x_1 + 3x_2) \quad \min(\max) (x_1 + 3x_2)</math></p> $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

## ДОДАТКИ

Додаток 1

### Похідні основних елементарних функцій

|    |                                                                                                                                                                                                |     |                                                 |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------|
| 1. | $(c)' = 0, c = \text{const}$                                                                                                                                                                   | 6.  | $(\sin x)' = \cos x$                            |
| 2. | $(x)' = 1$                                                                                                                                                                                     | 7.  | $(\cos x)' = -\sin x$                           |
| 3. | $(x^n)' = nx^{n-1},$<br>$n$ – будь-яке дійсне число<br><br>$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$<br><br>$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 8.  | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   |
|    |                                                                                                                                                                                                | 9.  | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
|    |                                                                                                                                                                                                | 10. | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         |
| 4. | $(a^x)' = a^x \ln a,$<br>$a$ – дійсне число, $a > 0, a \neq 1$<br><br>$(e^x)' = e^x$                                                                                                           | 11. | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        |
|    |                                                                                                                                                                                                | 12. | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$   |
| 5. | $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$<br><br>$(\ln x)' = \frac{1}{x}$                                                                                        | 13. | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Таблиця основних інтегралів

|    |                                                                                                                         |     |                                                                                      |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $\int 0 \, dx = C$                                                                                                      | 8.  | $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x  + C$                                  |
| 2. | $\int dx = x + C$                                                                                                       | 9.  | $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x  + C$                                  |
| 3. | $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , де $n$ –<br>будь-яке дійсне число, $n \neq -1$                             | 10. | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$                                 |
|    |                                                                                                                         | 11. | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$                               |
| 4. | $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$                                                                                        | 12. | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$       |
| 5. | $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ , де $a$ –<br>дійсне число, $a > 0$ , $a \neq 1$<br>$\int e^x \, dx = e^x + C$ | 13. | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$    |
|    |                                                                                                                         | 14. | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$ |
| 6. | $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$                                                                                       | 15. | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$                         |
| 7. | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$                                                                                        | 16. | $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$      |

Таблиця значень функції Гаусса  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

|            | 0             | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>0,0</b> | <b>0,3989</b> | <b>0,3989</b> | <b>0,3989</b> | <b>0,3988</b> | <b>0,3986</b> | <b>0,3984</b> | <b>0,3982</b> | <b>0,3980</b> | <b>0,3977</b> | <b>0,3973</b> |
| 0,1        | 0,3970        | 0,3965        | 0,3961        | 0,3956        | 0,3951        | 0,3945        | 0,3939        | 0,3932        | 0,3925        | 0,3918        |
| 0,2        | 0,3910        | 0,3902        | 0,3894        | 0,3885        | 0,3876        | 0,3867        | 0,3857        | 0,3847        | 0,3836        | 0,3825        |
| 0,3        | 0,3814        | 0,3802        | 0,3790        | 0,3778        | 0,3765        | 0,3752        | 0,3739        | 0,3726        | 0,3712        | 0,3697        |
| 0,4        | 0,3683        | 0,3668        | 0,3652        | 0,2637        | 0,3621        | 0,3605        | 0,3589        | 0,3572        | 0,3555        | 0,3538        |
| 0,5        | 0,3521        | 0,3503        | 0,3485        | 0,3467        | 0,3448        | 0,3429        | 0,3410        | 0,3391        | 0,3372        | 0,3352        |
| 0,6        | 0,3332        | 0,3312        | 0,3292        | 0,3271        | 0,3251        | 0,3230        | 0,3209        | 0,3187        | 0,3166        | 0,3144        |
| 0,7        | 0,3123        | 0,3101        | 0,3079        | 0,3056        | 0,3034        | 0,3011        | 0,2989        | 0,2966        | 0,2943        | 0,2920        |
| 0,8        | 0,2897        | 0,2874        | 0,2850        | 0,2827        | 0,2803        | 0,2780        | 0,2756        | 0,2732        | 0,2709        | 0,2685        |
| 0,9        | 0,2661        | 0,2637        | 0,2613        | 0,2589        | 0,2565        | 0,2541        | 0,2516        | 0,2492        | 0,2468        | 0,2444        |
| <b>1,0</b> | <b>0,2420</b> | <b>0,2396</b> | <b>0,2371</b> | <b>0,2347</b> | <b>0,2323</b> | <b>0,2299</b> | <b>0,2275</b> | <b>0,2251</b> | <b>0,2227</b> | <b>0,2203</b> |
| 1,1        | 0,2179        | 0,2155        | 0,2131        | 0,2107        | 0,2083        | 0,2059        | 0,2036        | 0,2012        | 0,1989        | 0,1965        |
| 1,2        | 0,1942        | 0,1919        | 0,1895        | 0,1872        | 0,1849        | 0,1826        | 0,1804        | 0,1781        | 0,1758        | 0,1736        |
| 1,3        | 0,1714        | 0,1691        | 0,1669        | 0,1647        | 0,1626        | 0,1604        | 0,1582        | 0,1561        | 0,1539        | 0,1518        |
| 1,4        | 0,1497        | 0,1476        | 0,1456        | 0,1435        | 0,1415        | 0,1394        | 0,1374        | 0,1354        | 0,1334        | 0,1315        |
| 1,5        | 0,1295        | 0,1276        | 0,1257        | 0,1238        | 0,1219        | 0,1200        | 0,1182        | 0,1163        | 0,1145        | 0,1127        |
| 1,6        | 0,1109        | 0,1092        | 0,1074        | 0,1057        | 0,1040        | 0,1023        | 0,1006        | 0,0989        | 0,0973        | 0,0957        |
| 1,7        | 0,0940        | 0,0925        | 0,0909        | 0,0893        | 0,0878        | 0,0863        | 0,0848        | 0,0833        | 0,0818        | 0,0804        |
| 1,8        | 0,0790        | 0,0775        | 0,0761        | 0,0748        | 0,0734        | 0,0721        | 0,0707        | 0,0694        | 0,0681        | 0,0669        |
| 1,9        | 0,0656        | 0,0644        | 0,0632        | 0,0620        | 0,0608        | 0,0596        | 0,0584        | 0,0573        | 0,0562        | 0,0551        |
| <b>2,0</b> | <b>0,0540</b> | <b>0,0529</b> | <b>0,0519</b> | <b>0,0508</b> | <b>0,0498</b> | <b>0,0488</b> | <b>0,0478</b> | <b>0,0468</b> | <b>0,0459</b> | <b>0,0449</b> |
| 2,1        | 0,0440        | 0,0431        | 0,0422        | 0,0413        | 0,0404        | 0,0396        | 0,0387        | 0,0379        | 0,0371        | 0,0363        |
| 2,2        | 0,0355        | 0,0347        | 0,0339        | 0,0332        | 0,0325        | 0,0317        | 0,0310        | 0,0303        | 0,0297        | 0,0290        |
| 2,3        | 0,0283        | 0,0277        | 0,0270        | 0,0264        | 0,0258        | 0,0252        | 0,0246        | 0,0241        | 0,0235        | 0,0229        |
| 2,4        | 0,0224        | 0,0219        | 0,0213        | 0,0208        | 0,0203        | 0,0198        | 0,0194        | 0,0189        | 0,0184        | 0,0180        |
| 2,5        | 0,0175        | 0,0171        | 0,0167        | 0,0163        | 0,0158        | 0,0154        | 0,0151        | 0,0147        | 0,0143        | 0,0139        |
| 2,6        | 0,0136        | 0,0132        | 0,0129        | 0,0126        | 0,0122        | 0,0119        | 0,0116        | 0,0113        | 0,0110        | 0,0107        |

|            |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2,7        | 0,0104        | 0,0101        | 0,0099        | 0,0096        | 0,0093        | 0,0091        | 0,0088        | 0,0086        | 0,0084        | 0,0081        |
| 2,8        | 0,0079        | 0,0077        | 0,0075        | 0,0073        | 0,0071        | 0,0069        | 0,0067        | 0,0065        | 0,0063        | 0,0061        |
| 2,9        | 0,0060        | 0,0058        | 0,0056        | 0,0055        | 0,0053        | 0,0051        | 0,0050        | 0,0048        | 0,0047        | 0,0046        |
| <b>3,0</b> | <b>0,0044</b> | <b>0,0043</b> | <b>0,0042</b> | <b>0,0040</b> | <b>0,0039</b> | <b>0,0038</b> | <b>0,0037</b> | <b>0,0036</b> | <b>0,0035</b> | <b>0,0034</b> |
| 3,1        | 0,0033        | 0,0032        | 0,0031        | 0,0030        | 0,0029        | 0,0028        | 0,0027        | 0,0026        | 0,0025        | 0,0025        |
| 3,2        | 0,0024        | 0,0023        | 0,0022        | 0,0022        | 0,0021        | 0,0020        | 0,0020        | 0,0019        | 0,0018        | 0,0018        |
| 3,3        | 0,0017        | 0,0017        | 0,0016        | 0,0016        | 0,0015        | 0,0015        | 0,0014        | 0,0014        | 0,0013        | 0,0013        |
| 3,4        | 0,0012        | 0,0012        | 0,0012        | 0,0011        | 0,0011        | 0,0010        | 0,0010        | 0,0010        | 0,0009        | 0,0009        |
| 3,5        | 0,0009        | 0,0008        | 0,0008        | 0,0008        | 0,0008        | 0,0007        | 0,0007        | 0,0007        | 0,0007        | 0,0006        |
| 3,6        | 0,0006        | 0,0006        | 0,0006        | 0,0005        | 0,0005        | 0,0005        | 0,0005        | 0,0005        | 0,0005        | 0,0004        |
| 3,7        | 0,0004        | 0,0004        | 0,0004        | 0,0004        | 0,0004        | 0,0004        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0003        |
| 3,8        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0003        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        |
| 3,9        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0002        | 0,0001        | 0,0001        |

Таблиця значень функції Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

| $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,00 | 0,0000    | 0,65 | 0,2422    | 1,30 | 0,4032    | 1,95 | 0,4744    |
| 0,01 | 0,0040    | 0,66 | 0,2454    | 1,31 | 0,4049    | 1,96 | 0,4750    |
| 0,02 | 0,0080    | 0,67 | 0,2486    | 1,32 | 0,4066    | 1,97 | 0,4756    |
| 0,03 | 0,0120    | 0,68 | 0,2517    | 1,33 | 0,4082    | 1,98 | 0,4761    |
| 0,04 | 0,0160    | 0,69 | 0,2549    | 1,34 | 0,4099    | 1,99 | 0,4767    |
| 0,05 | 0,0199    | 0,70 | 0,2580    | 1,35 | 0,4115    | 2,00 | 0,4772    |
| 0,06 | 0,0239    | 0,71 | 0,2611    | 1,36 | 0,4131    | 2,02 | 0,4783    |
| 0,07 | 0,0279    | 0,72 | 0,2642    | 1,37 | 0,4147    | 2,04 | 0,4793    |
| 0,08 | 0,0319    | 0,73 | 0,2673    | 1,38 | 0,4162    | 2,06 | 0,4803    |
| 0,09 | 0,0359    | 0,74 | 0,2703    | 1,39 | 0,4177    | 2,08 | 0,4812    |
| 0,10 | 0,0398    | 0,75 | 0,2734    | 1,40 | 0,4192    | 2,10 | 0,4821    |
| 0,11 | 0,0438    | 0,76 | 0,2764    | 1,41 | 0,4207    | 2,12 | 0,4830    |
| 0,12 | 0,0478    | 0,77 | 0,2794    | 1,42 | 0,4222    | 2,14 | 0,4838    |
| 0,13 | 0,0517    | 0,78 | 0,2823    | 1,43 | 0,4236    | 2,16 | 0,4846    |
| 0,14 | 0,0557    | 0,79 | 0,2852    | 1,44 | 0,4251    | 2,18 | 0,4854    |
| 0,15 | 0,0596    | 0,80 | 0,2881    | 1,45 | 0,4265    | 2,20 | 0,4861    |
| 0,16 | 0,0636    | 0,81 | 0,2910    | 1,46 | 0,4279    | 2,22 | 0,4868    |
| 0,17 | 0,0675    | 0,82 | 0,2939    | 1,47 | 0,4292    | 2,24 | 0,4875    |
| 0,18 | 0,0714    | 0,83 | 0,2967    | 1,48 | 0,4306    | 2,26 | 0,4881    |
| 0,19 | 0,0753    | 0,84 | 0,2995    | 1,49 | 0,4319    | 2,28 | 0,4887    |
| 0,20 | 0,0793    | 0,85 | 0,3023    | 1,50 | 0,4332    | 2,30 | 0,4893    |
| 0,21 | 0,0832    | 0,86 | 0,3051    | 1,51 | 0,4345    | 2,32 | 0,4898    |
| 0,22 | 0,0871    | 0,87 | 0,3078    | 1,52 | 0,4357    | 2,34 | 0,4904    |
| 0,23 | 0,0910    | 0,88 | 0,3106    | 1,53 | 0,4370    | 2,36 | 0,4909    |
| 0,24 | 0,0948    | 0,89 | 0,3133    | 1,54 | 0,4382    | 2,38 | 0,4913    |
| 0,25 | 0,0987    | 0,90 | 0,3159    | 1,55 | 0,4394    | 2,40 | 0,4918    |
| 0,26 | 0,1026    | 0,91 | 0,3186    | 1,56 | 0,4406    | 2,42 | 0,4922    |

|      |        |      |        |      |        |      |         |
|------|--------|------|--------|------|--------|------|---------|
| 0,27 | 0,1064 | 0,92 | 0,3212 | 1,57 | 0,4418 | 2,44 | 0,4927  |
| 0,28 | 0,1103 | 0,93 | 0,3238 | 1,58 | 0,4429 | 2,46 | 0,4931  |
| 0,29 | 0,1141 | 0,94 | 0,3264 | 1,59 | 0,4441 | 2,48 | 0,4934  |
| 0,30 | 0,1179 | 0,95 | 0,3289 | 1,60 | 0,4452 | 2,50 | 0,4938  |
| 0,31 | 0,1217 | 0,96 | 0,3315 | 1,61 | 0,4463 | 2,52 | 0,4941  |
| 0,32 | 0,1255 | 0,97 | 0,3340 | 1,62 | 0,4474 | 2,54 | 0,4945  |
| 0,33 | 0,1293 | 0,98 | 0,3365 | 1,63 | 0,4484 | 2,56 | 0,4948  |
| 0,34 | 0,1331 | 0,99 | 0,3389 | 1,64 | 0,4495 | 2,58 | 0,4951  |
| 0,35 | 0,1368 | 1,00 | 0,3413 | 1,65 | 0,4505 | 2,60 | 0,4953  |
| 0,36 | 0,1406 | 1,01 | 0,3438 | 1,66 | 0,4515 | 2,62 | 0,4956  |
| 0,37 | 0,1443 | 1,02 | 0,3461 | 1,67 | 0,4525 | 2,64 | 0,4959  |
| 0,38 | 0,1480 | 1,03 | 0,3485 | 1,68 | 0,4535 | 2,66 | 0,4961  |
| 0,39 | 0,1517 | 1,04 | 0,3508 | 1,69 | 0,4545 | 2,68 | 0,4963  |
| 0,40 | 0,1554 | 1,05 | 0,3531 | 1,70 | 0,4554 | 2,70 | 0,4965  |
| 0,41 | 0,1591 | 1,06 | 0,3554 | 1,71 | 0,4564 | 2,72 | 0,4967  |
| 0,42 | 0,1628 | 1,07 | 0,3577 | 1,72 | 0,4573 | 2,74 | 0,4969  |
| 0,43 | 0,1664 | 1,08 | 0,3599 | 1,73 | 0,4582 | 2,76 | 0,4971  |
| 0,44 | 0,1700 | 1,09 | 0,3621 | 1,74 | 0,4591 | 2,78 | 0,4973  |
| 0,45 | 0,1736 | 1,10 | 0,3643 | 1,75 | 0,4599 | 2,80 | 0,4974  |
| 0,46 | 0,1772 | 1,11 | 0,3665 | 1,76 | 0,4608 | 2,82 | 0,4976  |
| 0,47 | 0,1808 | 1,12 | 0,3686 | 1,77 | 0,4616 | 2,84 | 0,4977  |
| 0,48 | 0,1844 | 1,13 | 0,3708 | 1,78 | 0,4625 | 2,86 | 0,4979  |
| 0,49 | 0,1879 | 1,14 | 0,3729 | 1,79 | 0,4633 | 2,88 | 0,4980  |
| 0,50 | 0,1915 | 1,15 | 0,3749 | 1,80 | 0,4641 | 2,90 | 0,4981  |
| 0,51 | 0,1950 | 1,16 | 0,3770 | 1,81 | 0,4649 | 2,92 | 0,4982  |
| 0,52 | 0,1985 | 1,17 | 0,3790 | 1,82 | 0,4656 | 2,94 | 0,4984  |
| 0,53 | 0,2019 | 1,18 | 0,3810 | 1,83 | 0,4664 | 2,96 | 0,4985  |
| 0,54 | 0,2054 | 1,19 | 0,3830 | 1,84 | 0,4671 | 2,98 | 0,4986  |
| 0,55 | 0,2088 | 1,20 | 0,3849 | 1,85 | 0,4678 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,56 | 0,2123 | 1,21 | 0,3869 | 1,86 | 0,4686 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,57 | 0,2157 | 1,22 | 0,3883 | 1,87 | 0,4693 | 3,40 | 0,49966 |

|      |        |      |        |      |        |          |          |
|------|--------|------|--------|------|--------|----------|----------|
| 0,58 | 0,2190 | 1,23 | 0,3907 | 1,88 | 0,4699 | 3,60     | 0,499841 |
| 0,59 | 0,2224 | 1,24 | 0,3925 | 1,89 | 0,4706 | 3,80     | 0,499928 |
| 0,60 | 0,2257 | 1,25 | 0,3944 | 1,90 | 0,4713 | 4,00     | 0,499968 |
| 0,61 | 0,2291 | 1,26 | 0,3962 | 1,91 | 0,4719 | 4,50     | 0,499997 |
| 0,62 | 0,2324 | 1,27 | 0,3980 | 1,92 | 0,4726 | 5,00     | 0,499997 |
| 0,63 | 0,2357 | 1,28 | 0,3997 | 1,93 | 0,4732 | $\infty$ | 0,5      |
| 0,64 | 0,2389 | 1,29 | 0,4015 | 1,94 | 0,4738 |          |          |

Таблиця розподілу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

| $k \backslash a$ | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      | 0,8      | 1        | 1,5      | 2        |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 | 0,449329 | 0,367879 | 0,22313  | 0,135335 |
| 1                | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 | 0,359463 | 0,367879 | 0,334695 | 0,270671 |
| 2                | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 | 0,143785 | 0,18394  | 0,251021 | 0,270671 |
| 3                | 0,000151 | 0,001092 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 | 0,038343 | 0,061313 | 0,125511 | 0,180447 |
| 4                | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 | 0,007669 | 0,015328 | 0,047067 | 0,090224 |
| 5                | 0        | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 | 0,001227 | 0,003066 | 0,014120 | 0,036089 |
| 6                | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000036 | 0,000164 | 0,000511 | 0,003530 | 0,012030 |
| 7                | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000003 | 0,000019 | 0,000073 | 0,000756 | 0,003437 |
| 8                | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000002 | 0,000009 | 0,000142 | 0,000859 |
| 9                | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000024 | 0,000191 |
| 10               | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000004 | 0,000038 |
| 11               | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000007 |
| 12               | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 |
| 13               | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| $k \backslash a$ | 2,5      | 3        | 3,5      | 4        | 4,5      | 5        | 5,5      | 6        | 6,5      | 7        |
| 0                | 0,082085 | 0,049787 | 0,030197 | 0,018316 | 0,011109 | 0,006738 | 0,004087 | 0,002479 | 0,001503 | 0,000912 |
| 1                | 0,205212 | 0,149361 | 0,105691 | 0,073263 | 0,04999  | 0,033690 | 0,022477 | 0,014873 | 0,009772 | 0,006383 |
| 2                | 0,256516 | 0,224042 | 0,184959 | 0,146525 | 0,112479 | 0,084224 | 0,061812 | 0,044618 | 0,03176  | 0,022341 |
| 3                | 0,213763 | 0,224042 | 0,215785 | 0,195367 | 0,168718 | 0,140374 | 0,113323 | 0,089235 | 0,068814 | 0,052129 |
| 4                | 0,133602 | 0,168031 | 0,188812 | 0,195367 | 0,189808 | 0,175467 | 0,155819 | 0,133853 | 0,111822 | 0,091226 |
| 5                | 0,066801 | 0,100819 | 0,132169 | 0,156293 | 0,170827 | 0,175467 | 0,171401 | 0,160623 | 0,145369 | 0,127717 |
| 6                | 0,027834 | 0,050409 | 0,077098 | 0,104196 | 0,12812  | 0,146223 | 0,157117 | 0,160623 | 0,157483 | 0,149003 |

|    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 7  | 0,009941 | 0,021604 | 0,038549 | 0,059540 | 0,082363 | 0,104445 | 0,123449 | 0,137677 | 0,146234 | 0,149003 |
| 8  | 0,003106 | 0,008102 | 0,016865 | 0,029770 | 0,046329 | 0,065278 | 0,084871 | 0,103258 | 0,118815 | 0,130377 |
| 9  | 0,000863 | 0,002701 | 0,006559 | 0,013231 | 0,023165 | 0,036266 | 0,051866 | 0,068838 | 0,085811 | 0,101405 |
| 10 | 0,000216 | 0,00081  | 0,002296 | 0,005292 | 0,010424 | 0,018133 | 0,028526 | 0,041303 | 0,055777 | 0,070983 |
| 11 | 0,000049 | 0,000221 | 0,000730 | 0,001925 | 0,004264 | 0,008242 | 0,014263 | 0,022529 | 0,032959 | 0,045171 |
| 12 | 0,000010 | 0,000055 | 0,000213 | 0,000642 | 0,001599 | 0,003434 | 0,006537 | 0,011264 | 0,017853 | 0,026350 |
| 13 | 0,000002 | 0,000013 | 0,000057 | 0,000197 | 0,000554 | 0,001321 | 0,002766 | 0,005199 | 0,008926 | 0,014188 |
| 14 | 0        | 0,000003 | 0,000014 | 0,000056 | 0,000178 | 0,000472 | 0,001087 | 0,002228 | 0,004144 | 0,007094 |
| 15 | 0        | 0,000001 | 0,000003 | 0,000015 | 0,000053 | 0,000157 | 0,000398 | 0,000891 | 0,001796 | 0,003311 |
| 16 | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000015 | 0,000049 | 0,000137 | 0,000334 | 0,00073  | 0,001448 |
| 17 | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000014 | 0,000044 | 0,000118 | 0,000279 | 0,000596 |
| 18 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000014 | 0,000039 | 0,000101 | 0,000232 |
| 19 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000012 | 0,000034 | 0,000085 |
| 20 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000004 | 0,000011 | 0,00003  |
| 21 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000003 | 0,000010 |
| 22 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 | 0,000003 |
| 23 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0,000001 |
| 24 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. В.М. Мацкул Вища математика для економістів. Підручник. — Одеса: Одеський національний економічний університет (ОНЕУ), 2018. — 472 с
2. Васильків І.М. В 28 Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. — 184 с.
3. Практикум з вищої математики. Частина 1: Навчальний посібник / В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура та ін.; За ред. В.М. Мойсишина, Я.І. Савчука. — Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2022. — 623с.
4. А.І. Пілявський Вища математика. Практикум : навчальний посібник / Пілявський А.І., Кісілевич О.В., Мельник М.О. та ін. Львів: вид-во Львівського торговельно-економічного університету, 2019. 180 с
5. Л.Б.Коваленко Вища математика для менеджерів. Підручник. / 2-ге вид., перероб. та допов. — Харків: Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова (ХНУМГ ім. О.М. Бекетова), 2019. — 341 с.
6. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник /Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. — Вінниця : ВНТУ, 2019. — 121 с.
7. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник /Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. — Вінниця : ВНТУ, 2019. — 121 с.
8. Козак Ю.Г. Математичне моделювання для економістів: бакалавр – магістр – доктор філософії (PhD): Навч. посібник / За ред. Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул. — К.: Центр учбової літератури, 2017. — 252 с.
9. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. — 440 с.
10. Волонтир Л.О. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. — Вінниця: ВНАУ, 2020 — 404 с.
11. Ю.М. Бардачов Практикум з вищої математики. Ч. 2. / Бардачов Ю.М., Крючковський В.В., Цибуленко О.В., Матвієнко А.М., Моїсеєнко С.В., Чуйко Н.М., Белоус Л.Я. - Херсон: "ОЛДІ-плюс", 2014. - 416 с.

*Навчальне електронне видання*

Вигоднер Інна Валентинівна  
Моїсеєнко Світлана Вікторівна

**ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**  
**ПРАКТИКУМ**  
**Навчальний посібник**

**ISBN 978-617-8187-31-6 (електронне видання)**



Підписано до видання 21.09.2024 р. Формат 60x84/8.  
Гарнітура Times.  
Ум. друк. арк. 30,34. Обл.-вид. арк. 32,62.  
Замовлення №3114.

Видано з готового оригінал-макету у  
Книжковому видавництві ФОП Вишемирський В.С.  
Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи:  
Серія ХС №48 від 14.04.2005 р.  
Видано Управлінням у справах преси та інформації  
73000, Україна, м. Херсон, вул. Соборна, 2.  
Тел. +38(050)133-10-13  
e-mail: printvvs@gmail.com