

**ЕКОНОМІКО –
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І
МОДЕЛІ:
ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ
І МОДЕЛІ
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

Інна Вигоднер Світлана Моїсеєнко

Хмельницький – 2024

Херсонський національний технічний університет

І. В. ВИГОДНЕР С. В. МОІСЕЄНКО

**ЕКОНОМІКО – МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ:
ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ**

Навчальний посібник

Хмельницький – 2024 р.

**УДК 330.42 (075.8)
В41**

Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 11 від 16.04.2024 р.)

Рецензенти:

Д. О. Редчиць — д.ф.-м.н., ст. наук. співр., заступник директора з науково-організаційної роботи Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України

В. В. Македон — д. е. н., професор кафедри міжнародної економіки і світових фінансів, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Вигоднер І.В., Моїсеєнко С.В.

В41 Економіко – математичні методи і моделі: оптимізаційні методи і моделі: навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання / І. В. Вигоднер, С. В. Моїсеєнко. – Херсон: Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В. С., 2024 р. – 149 с.

ISBN 978-617-8187-26-2 (електронне видання)

Навчальний посібник побудовано відповідно чинним навчальній та робочій програмам підготовки студентів з дисципліни «**Економіко – математичні методи і моделі: оптимізаційні методи і моделі**». Посібник містить всі розділи даного курсу. З кожної теми запропоновано досить розгорнутий курс лекційного матеріалу, наведено розв'язки типових прикладів і задач. Кожний розділ супроводжується контрольними запитаннями для самоперевірки та завданнями для самостійної роботи.

УДК 330.42 (075.8)

ISBN 978–617–8187–26–2 (електронне видання)

© Вигоднер І. В., 2024
© Моїсеєнко С. В., 2024
© ФОП Вишемирський В.С., 2024

ВСТУП

Дисципліна «Економіко – математичні методи і моделі: оптимізаційні методи і моделі» належить до переліку нормативних навчальних дисциплін, які слухають студенти економічних спеціальностей. «Економіко-математичні методи та моделі» є одним з базових курсів, що сприяє формуванню аналітично-дослідницьких компетентностей, які є необхідними для майбутніх економістів, аналітиків в умовах сучасного виробництва.

Завданням таких спеціалістів є керування економічними системами, оптимізація їх структури, знаходження траєкторії розвитку й функціонування установи з метою досягнення максимальної економічної ефективності.

Щоб відповідати таким вимогам, необхідно володіти методами математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів та явищ. Ці проблеми вивчає декілька наук економіко-математичного циклу, одна з них «Економіко – математичні методи і моделі: оптимізаційні методи і моделі», яка охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних: від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукування оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану. Метою розробки навчального посібника є пізнання та використання на практиці оптимізаційних методів і моделей при розв'язанні прикладних задач, аналіз результатів.

У запропонованому навчальному посібнику викладено теоретичні основи (лекційний матеріал), який відповідає робочій програмі дисципліни, надано алгоритми розв'язування прикладних задач, кожна з яких має економічну спрямованість. Кожний розділ містить теоретичні запитання для самоперевірки та практичні завдання для самостійного виконання.

ЗМІСТ

Розділ 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки. Постановка задачі математичного програмування	6
Розділ 2. Постановка задачі математичного програмування. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування	20
Розділ 3. Точні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Жордана - Гаусса	32
Розділ 4. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування	40
Розділ 5. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування	56
Розділ 6. Поняття двоїстості та правила побудови двоїстих задач	88
Розділ 7. Транспортна задача	110
Розділ 8. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем. Дробово-лінійне програмування. Методи їх розв’язування та аналізу	136

Розділ 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Математичне моделювання

як метод наукового дослідження економічних явищ і процесів

Модель (від лат. «modulus» — зразок, норма, міра.) — це об’єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Сутність методології математичного моделювання полягає в заміні досліджуваного об’єкта його «образом» — математичною моделлю — і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп’ютерних програм. Робота не із самим об’єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп’ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з моделями об’єктів дозволяють ретельно та досить глибоко вивчати об’єкт, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту).

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об’єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи:

модель — алгоритм — програма (рис.1.1).

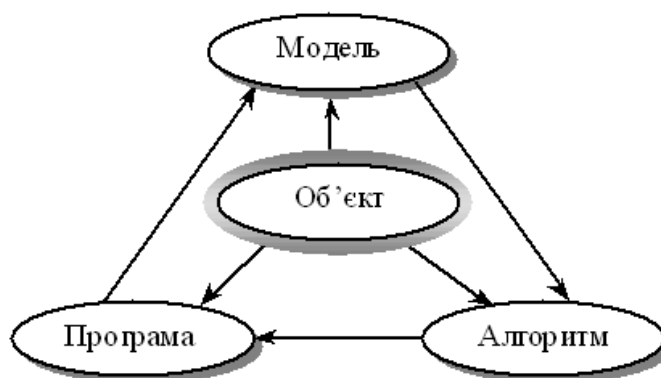


Рис. 1.1— Узагальнена схема математичного моделювання

На *першому етапі* обирається (чи будується) «еквівалент» об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші (ключові) його властивості — закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що притаманні складовим його частинам, тощо. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дає змогу отримати важливі (концептуального характеру) нові знання про об'єкт.

Другий етап — вибір (чи розроблення) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, зручній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю.

На *третьому етапі* створюються програми, що «переносять» модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову. Їх можна назвати «електронним» еквівалентом досліджуваного об'єкта, що є придатним для безпосереднього експериментування на комп'ютері.

Створивши *тріаду*: «модель — алгоритм — програма», дослідник (системний аналітик) отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як *адекватність*

(достатній рівень відповідності, зважаючи на цілі та прийняту систему гіпотез) тріади щодо досліджуваного об'єкта засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта.

1.2 Особливості і принципи математичного моделювання

Сформулюємо принципи, які визначають ті загальні вимоги, яким повинна задовольняти правильно побудована математична модель деякого об'єкта (системи).

Принцип 1. Первинність об'єкта. З двох взаємно пов'язаних полюсів діалектичної пари «модель — об'єкт» один із них (об'єкт) є первинним, інший (модель) — похідним від нього.

Принцип 2. Адекватність. Цей принцип передбачає відповідність моделі меті дослідження, прийнятій системі гіпотез за рівнем складності й організації, а також відповідність реальній системі (об'єкту). Доки не вирішено питання, чи правильно відображає модель досліджувану систему (об'єкт), цінність моделі незначна.

Принцип 3. Спрощення за умови збереження суттєвих (ключових) властивостей об'єкта (системи). Модель повинна бути в деяких аспектах суттєво простішою від об'єкту — в цьому власне й полягає сенс моделювання, тобто модель ігнорує несуттєві властивості об'єкта. Цей принцип може бути названий принципом абстрагування від другорядних деталей.

Практичні рекомендації щодо зменшення складності моделі:

- зменшення кількості змінних за допомогою виключення несуттєвих змінних або їх об'єднання. Процес перетворення (редукції) моделі в модель з меншою кількістю змінних і обмежень називають *агрегуванням*;
- зміна природи змінних величин й параметрів. Змінні величини й параметри наближено розглядаються як постійні, дискретні — як неперервні тощо;

- зміна функціональної залежності між змінними. Нелінійна залежність замінюється зазвичай лінійною, дискретна функція розподілу ймовірностей — неперервною тощо;
- зміна обмежень (збільшення, виключення чи модифікація) та обмеження точності моделі. Точність результатів моделі не може бути вищою за точність вхідних даних.

1.3 Основні дефініції економіко-математичного моделювання

Якщо йдеться про математичну модель, що описує механізм функціонування певної гіпотетичної економічної чи соціально-економічної системи, то таку модель називають економіко-математичною чи просто економічною.

Під економіко-математичною моделлю розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Математична модель — це об'єкт, котрий створюється системним аналітиком для отримання нових знань про об'єкт-оригінал і відбиває лише суттєві (з погляду системного аналітика) властивості об'єкта-оригіналу.

Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення, на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу відбиває закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому середовищі.

Як було зазначено, під моделюванням розуміють процес побудови, вивчення й використання моделей. *Процес моделювання* включає три системотвірних елементи: суб'єкт дослідження (системний аналітик), об'єкт дослідження та модель, яка опосередковує відносини між об'єктом, який вивчається, та суб'єктом, який пізнає (системним аналітиком).

У загальних рисах можна відокремити чотири основні етапи процесу математичного моделювання економічних систем і подати їх за такою узагальненою схемою (рисунок 1.2).



Рисунок 1.2. Узагальнена схема процесу економіко-математичного моделювання

1.4 Особливості економічних спостережень і вимірів

Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору й опрацювання справляють визначальний вплив на вибір типів прикладних моделей. З іншого боку, завдання моделювання економіки висувають нові вимоги до системи інформації.

Залежно від модельованих об'єктів і призначення моделей використана в них вхідна інформація має суттєво відмінний характер і походження. Вона може бути розподіленою на дві категорії: щодо минулого розвитку та сучасного стану об'єктів

(економічне спостереження й опрацювання); про майбутній розвиток об'єктів, яка включає дані про очікувані зміни, внутрішні параметри та зовнішні умови (прогнози). Інша категорія інформації є результатом самостійних досліджень, які також можуть проводитися за допомогою моделювання.

Методи економічних спостережень і використання їхніх результатів розробляються економічною статистикою. З огляду на це варто визначити лише специфічні проблеми економічних спостережень, які стосуються моделювання економічних процесів. В економіці чимало процесів є масовими: вони характеризуються закономірностями, що не проявляються на підставі лише одного чи кількох спостережень. Тому моделювання в економіці має спиратися на масові спостереження.

Інша проблема породжується динамічністю економічних процесів, мінливістю їхніх параметрів і структурних відношень. Унаслідок цього доводиться постійно вивчати економічні процеси, здійснювати їх моніторинг. Оскільки спостереження за цими процесами й опрацювання емпіричних даних зазвичай забирають досить багато часу, то, будуючи економіко-математичні моделі, необхідно коригувати вхідну інформацію з урахуванням часу.

Дослідження кількісних відношень економічних процесів і явищ спирається на економічні виміри. Точність проведення вимірювань значною мірою впливає на точність кінцевих результатів кількісного аналізу. Тому застосування математичного моделювання загостило проблему вимірювання та кількісного зіставлення різних аспектів і явищ соціально-економічного розвитку та повноти одержуваних даних, захисту їх від навмисних і технічних викривлень (деформації).

1.5 Етапи економіко-математичного моделювання

В різних галузях знань, зокрема в економіці, етапи моделювання набувають специфічних рис. Проаналізуємо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

а). Постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі. Головне на цьому етапі — чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, що приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді. З урахування а)м цілей дослідження проводиться якісний аналіз об'єкта; виокремлюються, абстрагуючись від другорядних, найважливіші риси і властивості об'єкта, що моделюється. З позиції системного підходу вивчаються структура об'єкта й головні взаємозв'язки між його елементами (підсистемами). Обираються та обґрунтовуються основні показники й система гіпотез, що пояснюють поведінку та розвиток об'єкта і на основі яких буде відбуватись подальша формалізація.

На цьому етапі моделювання широко застосовуються якісні методи описання систем, знакові та мовні моделі. Таке попереднє, наближене зображення системи називають концептуальною моделлю.

б). Розроблення математичних моделей. Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). На цьому етапі проводиться теоретичне (аналітичне) дослідження моделі, обираються методи дослідження й розв'язку.

Метою теоретичного (аналітичного) дослідження є з'ясування загальних властивостей моделі. Найважливіший момент — доведення існування розв'язку для моделі. Знання загальних властивостей моделі настільки важливе, що часто задля доведення подібних властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію первинної моделі. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують

відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

в). Реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм (ППП) та проведення розрахунків. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ (можливе використання існуючих ППП з відповідною адаптацією) і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім великою розмірністю економічних задач, необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі за різних значень деяких параметрів. Дослідження, що проводяться за допомогою числових методів, можуть стати суттєвим доповненням до результатів аналітичного дослідження. Клас економічних задач, які можна розв'язувати числовими методами, значно ширший, ніж клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

г). Перевірка адекватності моделі. Вимога адекватності є суперечною до вимоги простоти, і це слід враховувати, перевіряючи модель на адекватність. Початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами: чи всі суттєві параметри включені в модель; чи містить модель несуттєві параметри; чи правильно відображені функціональні зв'язки між параметрами; чи правильно визначені обмеження на значення параметрів тощо.

Для встановлення відповідності створюваної моделі оригіналу використовують такі методи:

- порівняння результатів моделювання з окремими експериментальними результатами, одержаними за однакових (подібних) умов;

- використання інших схожих моделей;
- порівняння структури і функціонування моделі з прототипом.

Головним шляхом перевірки адекватності моделі досліджуваного об'єкта виступає практика. Але вона потребує накопичення статистики, котра не завжди буває достатньою для отримання надійних даних. Для багатьох моделей перші два методи виявляються менш прийнятними. Тоді залишається лише один шлях: висновок про подібність моделі та прототипу робити на підставі порівняння їхніх структур і виконуваних функцій.

Згідно з результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання чи проведення коригування.

д). Аналіз числових результатів та прийняття відповідних рішень. Результати досліджень подаються у вигляді, зручному для огляду, і на основі обробки отриманих результатів проводиться аналіз матеріалів дослідження моделі. На цьому, завершальному, етапі виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про можливість практичного застосування останніх, і, найголовніше, про досягнення цілей дослідження.

1.6. Елементи класифікації економіко-математичних моделей

Для класифікації економіко-математичних моделей використовують різні класифікаційні ознаки.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на *теоретико-аналітичні*, що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і *прикладні*, що застосовуються у розв'язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони поділяються на *функціональні* та *структурні*, а також *проміжні* форми (структурно-

функціональні). Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Прикладом функціональної моделі може слугувати модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин.

Моделі поділяють на *дескриптивні* та *нормативні*. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб цілі економічного розвитку, можливості і засоби їх досягнення.

За характером відображення причинно-наслідкових аспектів розрізняють *моделі жорстко детерміновані* і *моделі, що враховують випадковість і невизначеність*.

За способами відображення чинника часу економіко-математичні моделі поділяються на *статичні* й *динамічні*.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Важливо виокремити клас *лінійних моделей*, що набули значного поширення завдяки зручності їх використання.

1.7. Роль прикладних економіко-математичних досліджень

Можна відокремити щонайменше чотири аспекти застосування математичних методів і моделей у вирішенні практичних проблем.

а). *Удосконалення системи економічної інформації.* Математичні методи й моделі дають змогу упорядковувати економічну інформацію, виявляти недоліки в наявній інформації та розробляти вимоги до підготовки нової інформації чи її коригування. Розроблення і застосування економіко-математичних моделей вказують шляхи вдосконалення системи економічної інформації, орієнтованої на вирішення певних завдань планування та управління.

б). *Інтенсифікація і підвищення точності економічних розрахунків.*

Формалізація економічних задач і застосування комп'ютерів значно прискорюють типові, масові розрахунки, підвищують точність і скорочують трудомісткість, дають змогу проводити багатоваріантні економічні дослідження та обґрунтування складних заходів, недосяжні за панування «ручної» технології.

в). *Поглиблення кількісного аналізу економічних проблем.*

Завдяки застосуванню економіко-математичного моделювання створюються нові можливості економічного аналізу; вивчення чинників, які впливають на економічні процеси; кількісного оцінювання наслідків змін умов розвитку об'єктів тощо.

г). *Розв'язання принципово нових економічних задач.*

За допомогою математичного моделювання вдається розв'язувати економічні задачі, які в інший спосіб розв'язати практично неможливо, наприклад, відшукування оптимального варіанта плану, автоматизація контролю за функціонуванням складних економічних об'єктів.

1.8. Деякі типи економічних задач математичного програмування

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

а) Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

б) Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

в) Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця,

елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

г) Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

д) Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

е) Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

ж) Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати у будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початок кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Теоретичні запитання

1. Дайте поняття математичної моделі.
2. Які відомі етапи математичного моделювання?
3. Яка класифікація економіко-математичних моделей відома?
4. Назвіть типи економічних задач математичного програмування.

Розділ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.

ЗАГАЛЬНА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Схема економічної системи

Надамо схематично довільну економічну систему у такому вигляді (рис.2.1):

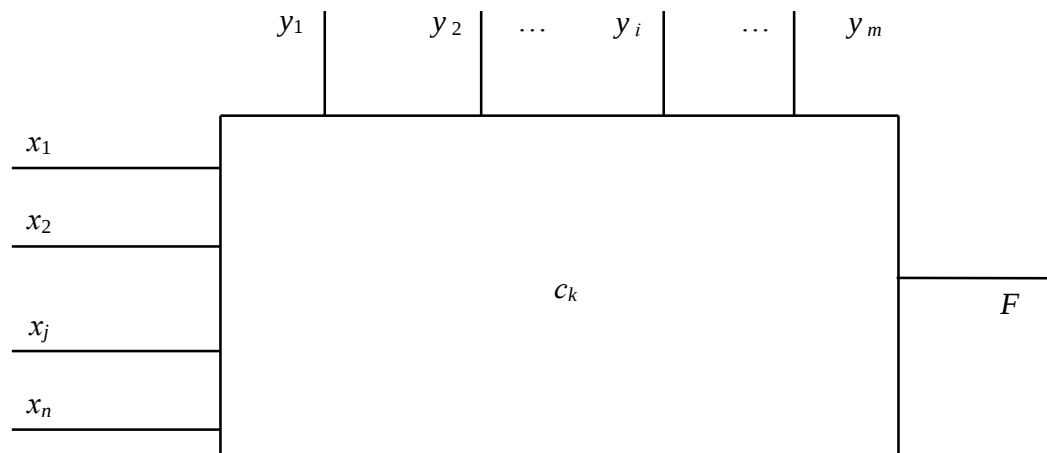


Рис. 2.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2, \dots, l$) є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як сільськогосподарське підприємство, то його параметрами є наявні ресурси (земельні угіддя, робоча сила, сільськогосподарська техніка, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності тварин, норми витрат ресурсів, ціни та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути сталими величинами, наприклад, норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів тощо, а частина — змінними, тобто залежатиме від певних умов,

як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою — кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_i ($i = 1, 2, \dots, m$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умовою дефіциту цього ресурсу — некерованою.

2.2. Постановка задачі математичного програмування

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи: $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l)$.

Функцію F називають **цільовою функцією**, або **функцією мети**. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так: *знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).*

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j} (\min) F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо. Це можна описати системою математичних рівнянь та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0;$$
$$(i = 1, 2, \dots, S).$$

2.3. Класифікація розділів математичного програмування за типом цільової функцій і обмежень оптимізаційних задач

Залежно від виду та властивостей цільової функції та функцій обмежень в моделях розрізняють розділи математичного програмування:

Лінійне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, у яких цільова функція та обмеження є лінійними функціями.

Нелінійне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких хоча б одна з функцій – чи цільова, чи в обмеженнях – нелінійна.

Опукле програмування – це клас оптимізаційних задач **нелінійного програмування** та методів їх розв’язування, у яких визначають числові значення керованих змінних, що надають мінімального значення опуклій (або максимального значення ввігнутій) функції, заданій на опуклій замкнутій множині.

Квадратичне програмування – це підвид задач опуклого програмування, для яких цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Цілочислове програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких на частину чи на всі змінні накладено умову цілочисловості.

Стохастичне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція або функції обмежень містять випадкові величини.

Динамічне програмування – це клас оптимізаційних задач, у яких використовують методи їх розв’язування за допомогою динамічного, тобто поступового і багатокрокового застосування рекурентних співвідношень.

Параметричне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція або функції, які визначають область допустимих значень, або і ті, й інші, залежать від деяких параметрів, або містять коефіцієнти, які залежать від параметрів.

Дробово-лінійне програмування – це клас оптимізаційних задач та методів їх розв’язування, у моделей, яких цільова функція подана у вигляді відношення двох лінійних функцій і функції, що визначають область обмежень задачі, також лінійні.

2.4. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Нехай F — цільова функція, лінійна:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l). \quad (2.1)$$

Необхідно знайти такі значення змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення):

$$\max (\min) F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \quad (2.2)$$

Якщо можливості вибору x_j обмежені умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо, які можна описати системою лінійних рівнянь та нерівностей виду: то маємо таку систему:

[illegible]

Тут набір символів ($\leq$, $=$, $\geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\leq$, для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу $\geq$.

Система (3) називається *системою обмежень*, або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_i мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

Залежності (2.2)—(2.4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Доцільно пункти (2.3) та (2.4) об'єднувати в одну систему обмежень:

[illegible]

Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (2.5) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ або вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє умови (2.5) називають **допустимим планом**, або **планом**. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною **стратегією економічної системи, програмою дій**. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (2.5), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів*.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є *розв'язком задачі МП* (2.2), (2.5).

2.5. Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знаку суми « Σ ». Тоді цільову функцію можна подати так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.6)$$

а систему обмежень так:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2.7)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді:

$$\max(\min) F = CX - \text{цільова функція} \quad (2.8)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0 - \text{система обмежень} \quad (2.9)$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ є векторами коефіцієнтів при}$$

ЗМІННИХ,

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} — \text{є матрицею коефіцієнтів при змінних};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор змінних; } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — вектор вільних членів;}$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Виділяють три форми запису задачі лінійного програмування: *загальну*, *стандартну (симетричну)* та *канонічну* (Таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Форма запису ЗЛП	Цільова функція $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Система обмежень
Загальна	Максимум або мінімум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$
Стандартна	Максимум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$
Канонічна	Максимум	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i;$ $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n);$ $(i = 1, 2, \dots, m).$

Зауважимо, що коли необхідно знайти мінімум функції F , можна перейти до знаходження максимуму:

$$\max F = - \min F, \min F = - \max F.$$

Для переходу від *загальної ЗЛП* до *канонічної* треба обмеження – нерівності перетворити в обмеження-рівності шляхом використання так званих допоміжних невід’ємних змінних.

обмеження в формі нерівності
$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$
$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j$

обмеження в формі рівності
$\Rightarrow a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$
$\Rightarrow a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + x_{n+2} = b_j$

2.6. Приклад побудови математичної моделі для задач складання рецептури

Для виготовлення домашнього десерту за рецептурою необхідно молоко, цукор та вершки із вмістом жиру 20%. Кількість білків, жирів, вуглеводів та ціни за 100 г цих продуктів вказано в таблиці. Господиня намагається скласти рецепт десерту, в якому в 100 г продукту було б не менш, ніж 4,5 г білка, не більш, ніж 13,5 г жирів та не більш, ніж 22,1 г вуглеводів. Скласти математичну модель такого рецепту десерту, щоб його собівартість була а) мінімальною; б) максимальною.

БЖВ/Продукти	Молоко	Цукор	Вершки	Обмеженість в БЖВ
Білки	3,32	1,12	3	4,5
Жири	1,9	1	20	13,5
Вуглеводи	4,66	88,2	3,6	22,1
Ціна продукту за 100 г	1,4 грн.	2,7 грн.	10,2 грн.	мінімальна, максимальна

Розв’язання: Будуємо математичну модель задачі.

Позначимо x_1 г кількість молока в десерті, x_2 г - кількість цукру, x_3 г - кількість вершків. Тоді білків можливо отримати виразом (показники для всіх інгредієнтів перераховано за 1 грам). Враховуючи, що на кількість білків є обмеження, складемо нерівність:

$$0,0332x_1 + 0,0112x_2 + 0,03x_3 \geq 0,045.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 100, тим самим спростимо

$$\text{нерівність } 3,32x_1 + 1,12x_2 + 3x_3 \geq 4,5.$$

Аналогічні розміркування застосовуємо для кількості жирів та отримуємо нерівність

$$1,9x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 13,5,$$

і для кількості вуглеводів

$$4,66x_1 + 88,2x_2 + 3,6x_3 \leq 22,1.$$

Оскільки x_1 , x_2 та x_3 - це показники ваги, то накладаємо на них умову невід’ємності: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Загальна вартість десерту є цільовою функцією та складає

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3$$

(ціни всіх інгредієнтів перераховано за 1 грам). Оскільки потребується скласти рецепт і з мінімальною вартістю, і з максимальною, то

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \min_{\text{та}}$$

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \max.$$

Математична модель задачі виглядає так: Знайти такий оптимальний план $X = \{x_1; x_2; x_3\}$, який задовольняє системі обмежень

$$\begin{cases} 3,32x_1 + 1,12x_2 + 3x_3 \geq 4,5; \\ 1,9x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 13,5; \\ 4,66x_1 + 88,2x_2 + 3,6x_3 \leq 22,1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

та надає мінімальне значення цільовій функції

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \min$$

або надає максимальне значення цільовій функції

$$F = 0,014x_1 + 0,027x_2 + 0,102x_3 \rightarrow \max.$$

Теоретичні запитання

1. Запишіть загальну математичну модель лінійного програмування.
2. З яких виразів може складатися система обмежень?
3. З яких виразів може складатися цільова функція?
4. Які є форми запису задач лінійного програмування?
5. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в таблиці.

Скласти математичну модель вирощування культур, щоб прибуток був максимальним.

№ п/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукровий буряк	
1	Жива праця, людино-днів	5	25	270
2	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
3	Прибуток, тис. грн.	0,7	1	

2. Записати в канонічній формі задачу ЛП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розділ 3. ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА

3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

[illegible]

в якій a_{ij} - коефіцієнти системи, b_i - вільні члени, x_j - невідомі величини ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

Означення 1. Система (3.1) називається *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, інакше - *неоднорідною*.

Означення 2. Розв'язком системи (3.1) називається n -компонентний вектор-стовбець $\overline{X} = (c_1; c_2; \dots; c_n)$, який перетворює кожне рівняння системи (1) у вірну числову тотожність.

Означення 3. Система називається сумісною, якщо є хоча б один розв'язок. У протилежному випадку система називається несумісною.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має лише один розв'язок, інакше така система називається *невизначеною*.

Означення 4. Дві системи еквівалентні, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Утворимо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (3.2)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Матриця A називається основною матрицею системи (1), $\bar{A}$ - розширеною матрицею цієї системи, $\bar{B}$ - вектор вільних членів та $\bar{X}$ - вектор невідомих системи.

У відповідності з правилом множення матриць та означенням рівності двох матриць, система (3.1) може бути записана рівнянням:

$$A \cdot \bar{X} = \bar{B}, \quad (3.4)$$

яке називається матричним записом СЛАР (3.1).

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних неоднорідних рівнянь (3.1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб

$$\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}; \quad (3.5)$$

сумісна система (3.1) є визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rang} A = n; \quad (3.6)$$

де $\text{rang} A$ - ранг матриці A системи (3.1), $\text{rang} \bar{A}$ - ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи (3.1).

3.2. Точні методи розв'язування СЛАР. Метод Жордана-Гаусса

Метод Жордана-Гаусса це одна з модифікацій метода Гаусса. За допомогою методу Жордана-Гаусса можна розв'язувати системи, у яких $n \neq m$. Щоб розв'язати систему (3.1) методом Жордана-Гаусса, розширену матрицю записуємо у таблицю 3.1:

Таблиця 3.1

A_1 або x_1	A_2 або x_2	...	A_j або x_j	...	A_q або x_q	...	A_n або x_n	B	$\sum_{j=1}^n a_{ij} + b_i$
a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1q}	...	a_{1n}	b_1	$\sum_{j=1}^n a_{1j} + b_1$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{iq}	...	a_{in}	b_i	$\sum_{j=1}^n a_{ij} + b_i$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{p1}	a_{p2}	...	a_{pj}	...	a_{pq}	...	a_{pn}	b_p	$\sum_{j=1}^n a_{pj} + b_p$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mq}	...	a_{mn}	b_m	$\sum_{j=1}^n a_{mj} + b_m$

і користуємося алгоритмом:

Шаг 1. Обираємо головний елемент серед коефіцієнтів $a_{ij} \neq 0 (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Шаг 2. Поділимо i -й рядок на головний елемент $a_{ij} \neq 0$. Отримаємо нові елементи:

$$a'_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{ij}}; \dots; a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}} = 1; \dots; a'_{iq} = \frac{a_{iq}}{a_{ij}}; \dots; a'_{in} = \frac{a_{in}}{a_{ij}}; \quad b'_i = \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

Шаг 3. Стовпчик j , у якому знаходиться головний елемент a_{ij} заповнюємо нулями.

Шаг 4. Значення елементів в інших рядках перераховуємо за формулами прямокутників:

$$\tilde{a}_{pq} = a_{pq} - \frac{a_{iq} \cdot a_{pj}}{a_{ij}} \quad (3.7)$$

$$\tilde{b}_p = b_p - \frac{b_i \cdot a_{pj}}{a_{ij}} \quad (3.8)$$

$$\sum_p^k{}' = \sum_p^k - \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \cdot a_{pj}}{a_{ij}} \quad (3.9)$$

де $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ - сума елементів i рядка; $\sum_p^k$ - контрольна сума p рядка.

Шаг 5. Обираємо новий головний елемент $a_{ks} \neq 0$ серед коефіцієнтів матриці A , при умові: $k \neq i, s \neq j$.

Ітерації згідно алгоритму (шаг 1 – шаг 5) проводимо, поки розширена матриця системи (3.1) не буде записана у вигляді:

(3.10)

діагоналі. Ми наводимо даний вигляд для наочності.

Матриця (3.10) є розширеною матрицею системи:

$$(3.11)$$

де $\tilde{a}_{ij}; \tilde{b}_i$ - елементи після r - перерахунків ($i = 1, \bar{m}; j = 1, \bar{n}$).

Система (3.11) еквівалентна системі (3.1).

то система (3.11) несумісна. Тобто система (3.1) також *несумісна*.

Якщо $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то системи (3.11) і (3.1) *сумісні*.

Розділимо невідомі $x_1, x_2, \dots, x_n$ на дві групи: змінні $x_1, x_2, \dots, x_r$, коефіцієнти при яких утворюють одиничні вектори назвемо **базисними**; змінні з вільними коефіцієнтами $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ назвемо **вільними**.

Щоб записати *загальний розв'язок системи*, необхідно з кожного рівняння (3.11) знайти базисну змінну:

[illegible]

Якщо вільним змінним $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ надати значення нуль, то отримаємо так званий *базисний розв'язок*:

$$\overline{X} = (\tilde{b}_i; \dots; \tilde{b}_r; 0; \dots; 0) \quad (3.13)$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Шаг 1: Обираємо головний елемент серед коефіцієнтів $a_{ij} \neq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). В цьому випадку це 2.

x_1	x_2	x_3	B	Сума Σ
2	5	-4	8	11
3	15	-9	5	14
5	5	-1	1	10

Шаг 2. Поділимо i -й рядок на головний елемент $a_{ij} \neq 0$. Отримаємо нові елементи:

$$a'_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{ij}}; \dots; a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}} = 1; \dots; a'_{iq} = \frac{a_{iq}}{a_{ij}}; \dots; a'_{in} = \frac{a_{in}}{a_{ij}}; \quad b'_i = \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

В нашому випадку $a_{ij} = 2$.

Шаг 3. Столпчик j , у якому знаходиться головний елемент a_{ij} заповнюємо нулями, рядок переписуємо.

Шаг 4. Коефіцієнти в інших рядках перераховуємо за формулами прямокутників.

x_1	x_2	x_3	B	Сума Σ
1	5/2	-2	4	11/2
0	15/2	-3	-7	-5/2
0	-15/2	9	-19	-35/2

Шаг 5. Обираємо новий головний елемент $a_{ks} \neq 0$ серед коефіцієнтів матриці A , при умові: $k \neq i$, $s \neq j$.

В нашому випадку це число 15/2 (другий рядок, другий стовпчик).

Шаг 6. Повторюємо пункти 2 та 3. Ділимо другий рядок на 15/2 та всі елементи другого стовпчика, занулюємо, інші елементи рахуємо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	B	Сума Σ
1	0	-1	19/3	19/3
0	1	-2/5	-14/15	-1/3
0	0	6	-26	-20

Наступний головний елемент знаходиться в третьому рядку та в третьому стовпчику. Він дорівнює 6. Ділимо третій рядок на 6, всі елементи третього стовпчика занулюємо, інші елементи рахуємо за правилом прямокутника:

x_1	x_2	x_3	B	Сума Σ
1	0	0	2	3
0	1	0	- 8/3	-5/3
0	0	1	-13/3	-10/3

Початкову систему можна записати у вигляді еквівалентної:
$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -8/3, \\ x_3 = -13/3 \end{cases}$$

Отримаємо розв'язок системи: $x_1 = 2, x_2 = -8/3, x_3 = -13/3$

або $X = (2; -8/3; -13/3)$.

Теоретичні запитання

1. Які системи називаються однорідними?
2. Сформулюйте теорему Кронекера - Капеллі?
3. В чому суть метода Жордано – Гаусса?
4. За яким принципом визначають головний елемент?
5. Які перетворення роблять з головним рядком та головним стовпчиком?

Завдання для самостійної роботи

1. Звести задану ЗЛП до стандартного виду за допомогою метода Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + x_6 = 11; \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, 6). \end{cases} \quad F = -x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 - x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 2; \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, 4). \end{cases} \quad F = 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

2. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = -2. \end{cases}$$

Розділ 4. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Умови невід’ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1=0$ та $x_2=0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв’язком даної системи (рис. 4.1).

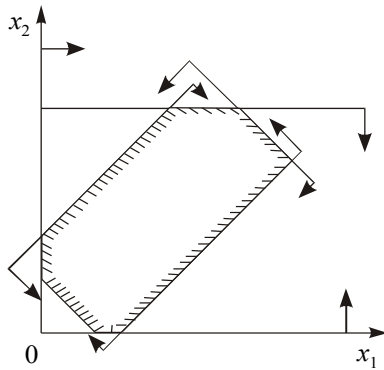


Рис. 4.1.

Сукупність цих точок (розв'язків) називають **багатокутником розв'язків**, або **областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування**. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (4.1) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами якого будуть: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворюють у тривимірному просторі спільну частину, що називається **багатогранником розв'язків**. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (4.1) кількість змінних більша, ніж три: $x_1, x_2, \dots, x_n$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n -вимірного простору з граничною гіперплощиною:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Кожному обмеженню виду (4.1) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами:

$$x_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n -вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукування координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ в n -вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра F .

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати соняшник і пшеницю на площі 20 га, відвівши під пшеницю не менше, як 5 га. Техніко — економічні показники вирощування цих культур маємо у таблиці 4.1:

Таблиця 4.1:

Показник (із розрахунку на 1 га)	Соняшник	Пшениця	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тони	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Складемо економіко-математичну модель структури вирощування соняшника і пшениці. Введемо такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву соняшника, га, x_2 — шукана площа посіву пшениці, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max F = 0,7x_1 + x_2 \text{ за умов:}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20; \\ 5x_1 + 25x_2 \leq 270; \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 80; \\ x_2 \geq 5; \\ x_1 \geq 0; \end{cases}$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рисунку.4.2.

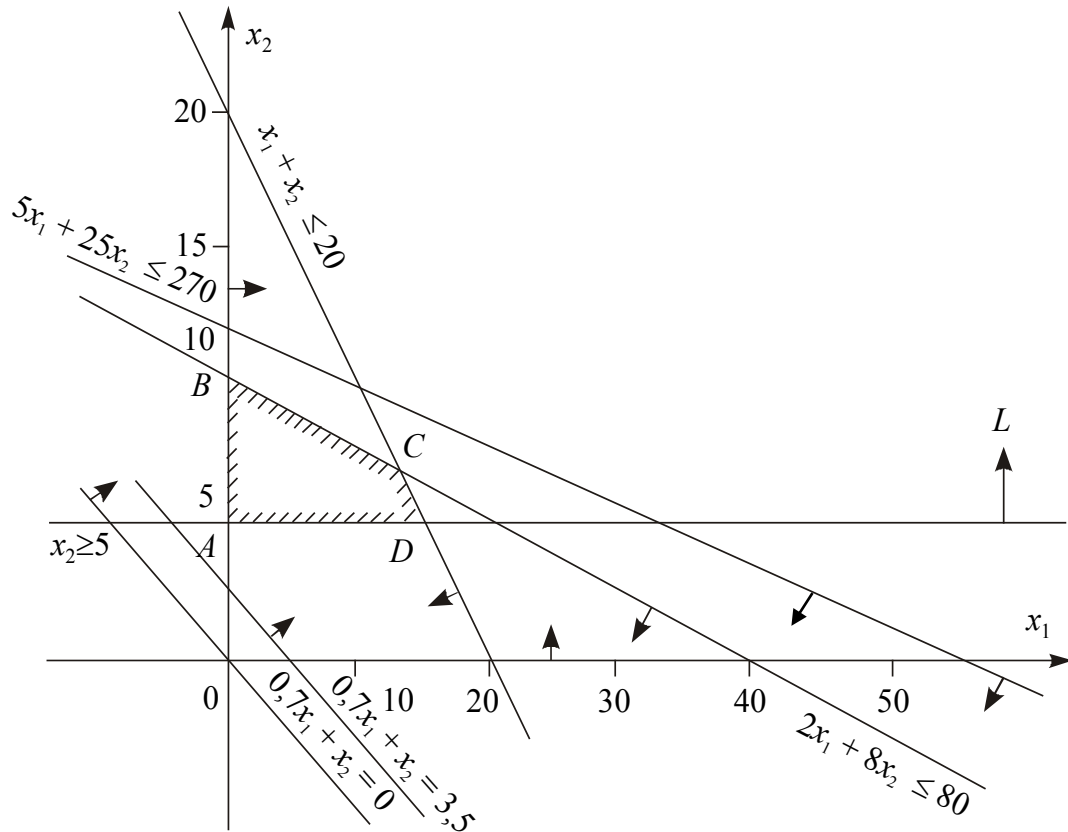


Рис. 4.2. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконаємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \leq 20$. Цей факт на рис. 2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуюмо

півплощини, які відповідають іншим нерівностям. У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі — чотирикутник $ABCD$. Цільова функція $F=0,7x_1+x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню F . Зокрема, якщо $F = 0$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $F = 3,5$, то маємо пряму $0,7x_1+x_2=3,5$.

4.2. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формуються у вигляді чотирьох теорем.

Властивість 1 (Теорема 1). Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2 (Теорема 2). Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3 (Теорема 3). Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4 (Теорема 4). Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатним x_j , є лінійно незалежними.

Наслідок 1. Оскільки вектори $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають розмірність m , то кутова точка багатокутника розв'язків має не більше, ніж m додатних компонентів $x_i > 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, \dots, A_n$.

З наведених властивостей можна зробити висновки:

якщо функціонал (функція обмежень) задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то:

- існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;
- кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

4.3. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знайти

$$\max(\min)F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (4.2)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_3; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Припустимо, що система (4.3) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений. Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (пункт 1) кожне i -те обмеження-нерівність у (4.3) визначає півплощину з граничною прямою:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Системою обмежень (4.3) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі — *багатокутник розв'язків*.

Умова невід’ємності змінних означає, що область допустимих розв’язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім’я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.

Скористаємося для графічного розв’язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в п. 2:

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і у будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (4.2) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (4.3) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набуває екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Зауваження. У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція $F(Z)$ набуває максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рисунок 4.3).
2. Максимального значення цільова функція $F(Z)$ досягає у будь-якій точці відрізка AB (рисунок 4.4). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція максимізується, а область необмежена в напрямку зростання функції $F(Z)$ (рисунок 4.5) або система обмежень задачі несумісна (рисунок 4.6).

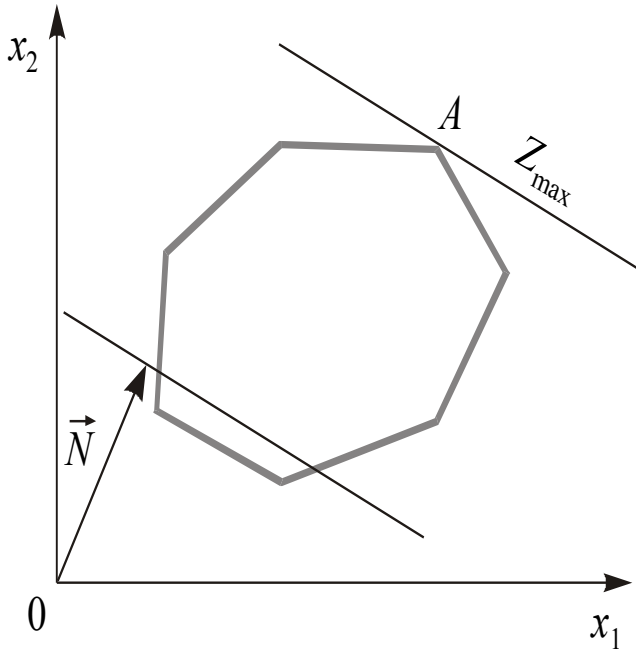


Рис. 4.3

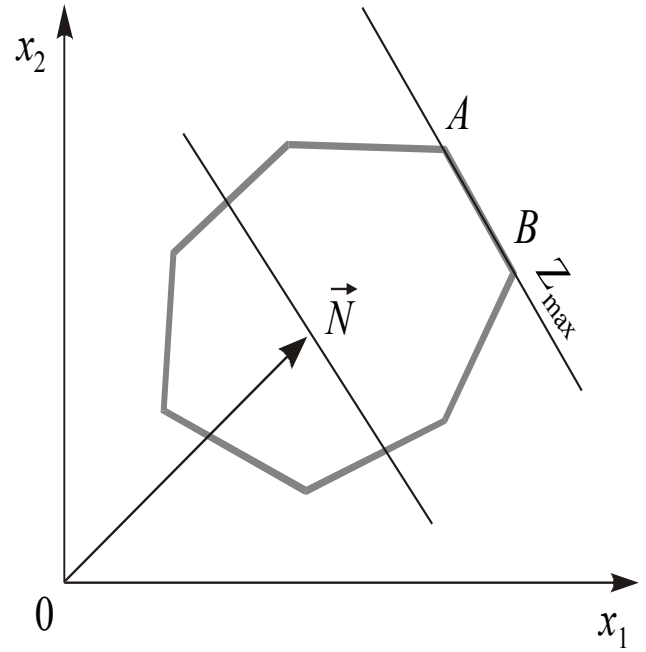


Рис. 4.4

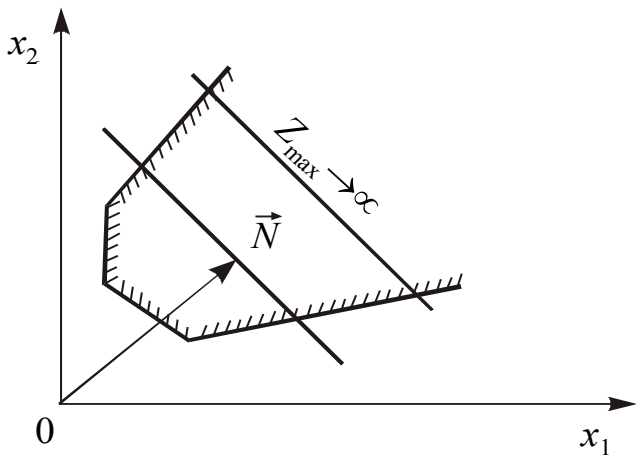


Рис. 4.5

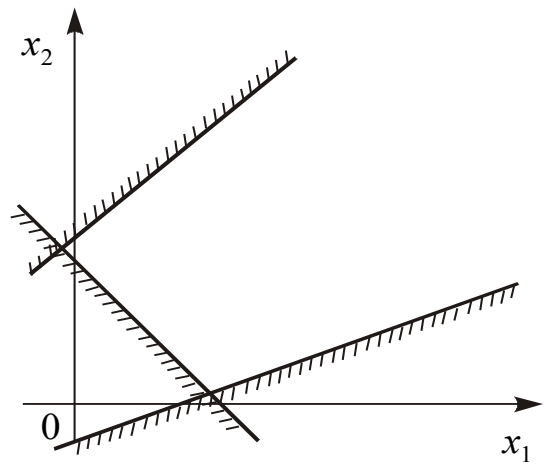


Рис. 4.6

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рисунки 4.7 та 4.8). На рисунку. 4.7 у точці B маємо максимум, на рисунку 4.8 у точці A — мінімум, на рисунку 4.9 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя, що обмежує область.

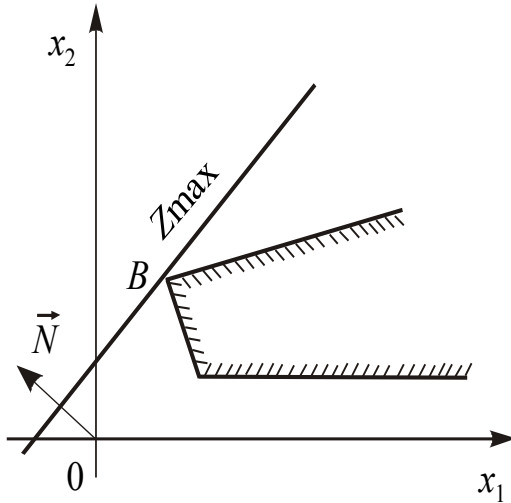


Рис. 4.7

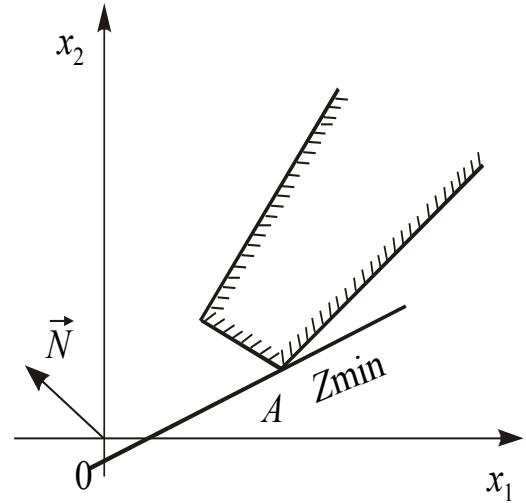


Рис. 4.8

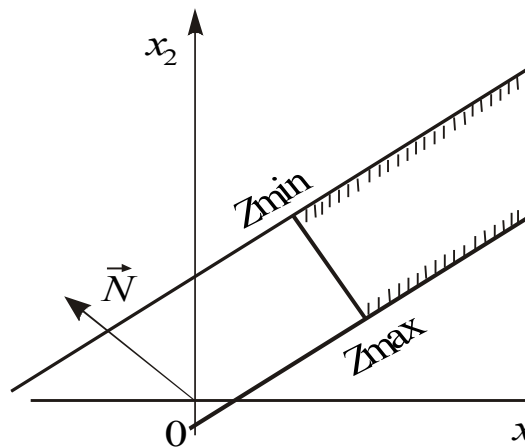


Рис. 4.9

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування n -вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних n на дві більша, ніж число обмежень m , тобто $n - m = 2$.

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можна дві з n змінних, наприклад x_1 та x_2 , вибрати як вільні, а інші m зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = n - 2$ рівнянь вигляду:

[illegible]

Оскільки всі значення $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), то мають виконуватись умови:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Розглянемо, як можна зобразити ці умови геометрично. Візьмемо, наприклад, першу з них:

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0.$$

Узявши величину x_3 рівною своєму крайньому значенню — нулю, отримаємо рівняння:

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0.$$

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3 > 0$, а по другу — $x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$.

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; ...; $x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

У такий спосіб отримують $n - 2$ прямі та дві осі координат ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0$ ($i = \overline{1, n-2}$). Частина площини в $x_1 O x_2$ належить водночас всім півплощинам, утворюючи багатокутник допустимих розв'язків.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Підставивши вирази для x_3 , x_4 , x_5 , ...; x_n з (4.4) у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2 :

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,$$

де γ_0 — вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2 , що й $F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$. Отже, процедура відшукування оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

Приклад 1. Розв'язати графічно ЗЛП

$$f = -3 + 2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max), \text{ за умовами, що } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -4; \\ x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Реалізуємо пункти 1–3. Оскільки за умовою $x_1, x_2 \geq 0$, отже область допустимих розв'язків буде знаходитися у першому квадранті. Будуємо прямі:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 7, \\ -2x_1 + 3x_2 &= -4, \\ x_2 &= 1,\end{aligned}$$

та визначаємо півплощини, для яких задовольняються відповідні обмеження (на рис. 4.10 показані стрілками): до рівності підставляємо координати будь-якої точки, що не лежить на цій прямій, якщо нерівність задовольняється, то множиною рішень є півплощина, що містить цю точку; якщо координати цієї точки не задовольняють нерівність, то вибирають протилежну півплощину. Зробимо рисунок області допустимих розв'язків, тобто геометричну інтерпретацію задачі (рис. 4.10).

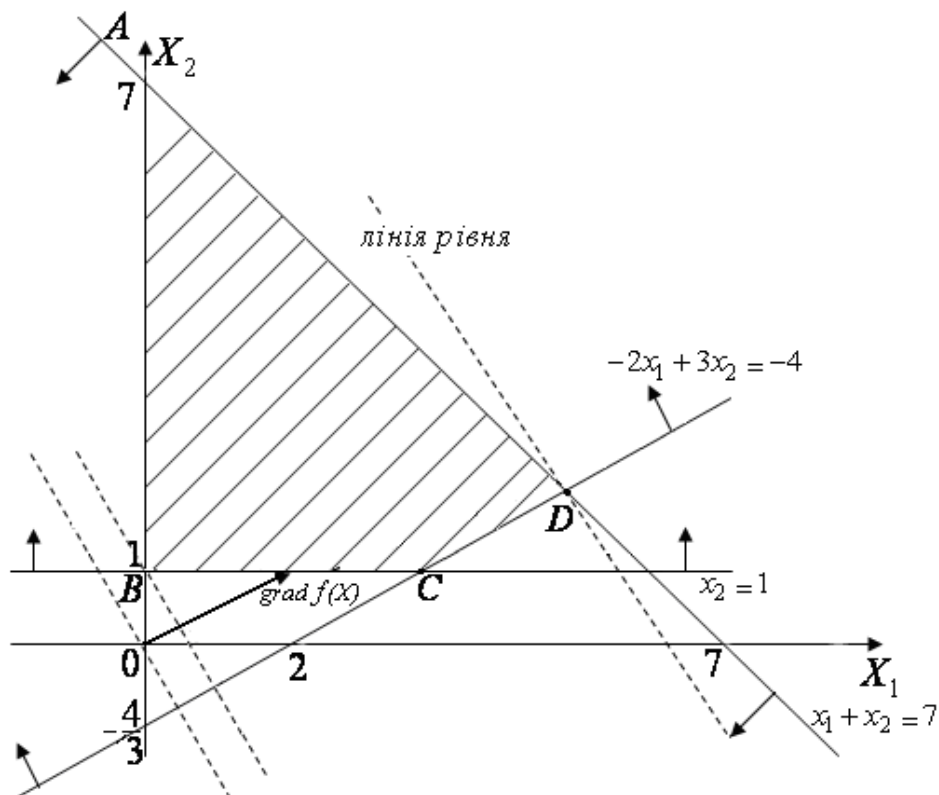


Рис. 4.10

Багатокутник $ABCD$ є областю допустимих розв'язків (ОДР).

4. Для нашої задачі $c_1 = 2, c_2 = 1$. Будуємо точку з координатами $(2;1)$ та вектор $\vec{N}$, початковою точкою якого є початок координат.

5. Лінія рівня цільової функції $2x_1 + x_2 - 3 = 0$, перпендикулярна до вектора $\vec{N} = (2;1)$.

6. Пересуваємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{N}$, знаходимо крайні точки багатокутника розв'язків B і D .

7. Знаходимо координати цих точок і обчислюємо екстремальні значення цільової функції в цих точках.

$$B(0;1): f = -3 + 1 = -2(\min), \quad D(5;2): f = -3 + 10 + 2 = 9(\max).$$

Відповідь:

$$f = -2(\min), X_{opt}(0,1),$$
$$f = 9(\max), X_{opt}(5,2).$$

З економічної точки зору підприємство повинно виробляти 5 одиниць продукції виду A і 2 одиниці продукції виду B за певний час. Прибуток від реалізації цієї продукції буде максимальним і складатиме 3 у.г.о.

Теоретичні запитання

1. Які задачі можна розв'язувати графічним методом?
2. Які основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте етапи алгоритму графічного методу.
4. Що становить область допустимих планів для задачі з двома та трьома змінними?
5. Як будується область допустимих планів для задачі з двома змінними?
6. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?
7. За яких умов задача лінійного програмування має альтернативний розв'язок?
8. За яких умов задача лінійного програмування з кількістю змінних, більше, ніж 3, може бути розв'язана графічно?

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати графічно ЗЛП: знайти оптимальний розв'язок, який надає екстремальне значення цільовій функції:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min, \max$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 6; \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70; \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ x_1 \leq 6; x_2 \geq 2. \end{cases}$$

$$F = 3,5x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \max$$

3). Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 дол. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 дол., а телереклами — 90 дол. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіореклами. Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витратитися на рекламу, за якого обсягу збут продукції фірми буде найбільшим. Розв'язати ЗЛП графічно.

4). Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та запас добрив у господарстві наведено в таблиці:

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива, кг діючої речовини /га		Запас добрив, кг
	Капуста	Томати	
Фосфорні	150	400	6000
Калійні	500	300	9000

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 ум. од., а 1 ц томатів — 20 ум. од. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів — 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують максимально можливого запасу. Розв'язати ЗЛП графічно.

5). Фірма виготовляє два види продукції А та В, використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої має не перевищувати відповідно 210 та 240 ум. од. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано таблицею:

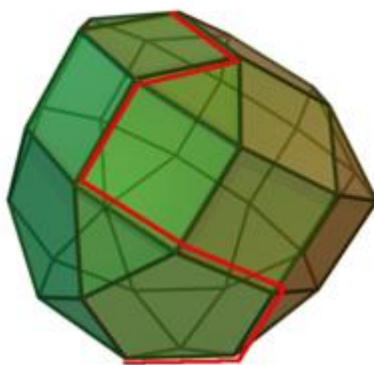
Сировина	Норма витрат сировини, ум. од., для виготовлення продукції	
	А	В
1	2	5
2	3	4

Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції В має становити не більш як 65 % загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції А та В дорівнює відповідно 10 та 40 дол. Визначити оптимальний план виробництва продукції, який максимізує дохід фірми. Розв'язати ЗЛП графічно.

Розділ 5. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Загальні поняття та історичні факти

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв'язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукування оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукування якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних можливостей.



Тому необхідне використання методу, який уможлиблював би скорочення кількості обчислень. Ця задача була поставлена у 1947 році Джорджем Данцигом, Маршаллом Вудом та їх співробітниками в департаменті військово – повітряних сил Америки. В той час ця група займалася дослідженням можливостей використання математичних та сумісних з ними методів для військових задач та задач планування. В подальший час для розвитку цих ідей у ВПС була організована дослідницька група під назвою Project SCOOP. У 1949 року Дж. Данцигом шуканий метод був запропонований— так званий симплексний метод, або симплекс-метод. Перше вдале рішення цієї задачі на електронно – обчислювальній машині було проведено о 1952 році.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала (цільової функції) при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв’язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з’ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

5.2. Початковий опорний план симплексного методу

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

[illegible]

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Не порушуючи загальності, допустимо, що система рівнянь містить перші m одиничних векторів. Отримаємо:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (5.1)$$

[illegible]

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,n). \quad (5.3)$$

Система обмежень (5.2) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m + x_{m+1} A_{m+1} + \dots + x_n A_n = A_0 \quad (5.4)$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, \dots, A_m$ — лінійно незалежні одиничні вектори m -вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в

розкладі (5.4) базисними змінними будуть $x_1, x_2, \dots, x_m$, а інші змінні — вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), а вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ — одиничні, то отримаємо один із розв'язків системи обмежень (5.2):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0), \quad (5.5)$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = A_0, \quad (5.6)$$

де $A_1, A_2, \dots, A_m$ — лінійно незалежні вектори і за властивістю 3 розв'язків задачі лінійного програмування план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

Перехід від одного опорного плану до іншого

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (5.5), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2, \dots, A_m$ є базисом m -вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (4) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у

єдиний спосіб: $A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i, j = 1, 2, \dots, n$.

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1} :

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + \dots + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1}. \quad (5.7)$$

Припустимо, що у виразі (5.7) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$. Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (5.7) і віднімемо результат з рівності (5.6). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \quad (5.8)$$

Отже, вектор $X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1}; x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots; x_m - \theta x_{m,m+1}; \theta; 0, \dots, 0) \in$ планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід'ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1 , в які входять $x_{i,m+1} \leq 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0. \quad (5.9)$$

З (5.9) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \leq \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$

Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ , що задовольняє умову:

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \text{ де мінімум знаходимо для тих } i, \text{ для яких } x_{i,m+1} > 0.$$

Опорний план не може містити більше ніж m додатних компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що

$$\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} \text{ для деякого значення } i, \text{ тоді відповідна компонента плану } X_1$$

перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (5.8):

$$(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1})A_2 + \dots + (x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1})A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0$$

$$\text{Якщо позначити } x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x'_i, \quad (i = \overline{2, m}), \quad \frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x'_{m+1},$$

то рівняння можна подати у вигляді:

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \dots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0; x'_2; x'_3; \dots; x'_m; x'_{m+1}; 0; \dots; 0).$$

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо висновувати: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана—Гаусса.

Необхідно зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (5.7) всі $x_{i,m+1} \leq 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta > 0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить $m+1$ додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

5.3. Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану

Симплексний метод уможливлює направлений перебір опорних планів, тобто перехід від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням функціонала. Отже, окремим питанням стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (5.1)—(5.3).

Допустимо, що вона має опорні плани і вони є не виродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (5.5):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = A_0 \quad (5.10)$$

та значення функціонала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m = F(X_0). \quad (5.11)$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, \dots, A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \dots + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.12)$$

Тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціонала:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj} \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.13)$$

Позначимо через C_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j , та $\Delta_j = F_j - C_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) ($j = \overline{1, n}$). Тоді справедливим є таке твердження (умова оптимальності плану задачі лінійного програмування): якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j ($j = \overline{1, n}$) у

даному базисі задовольняє умові:

$$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0 \quad (5.14)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (5.1)—(5.3).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукування мінімального значення функціонала: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j ($j = \overline{1, n}$) у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \leq 0 \quad (5.15)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, для того, щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум та недодатними для задачі на мінімум.

Умови оптимальності планів задач лінійного програмування є наслідками двох теорем. Скориставшись введеними в даному параграфі допущеннями та позначеннями, сформулюємо відповідні теореми, а також наведемо їх доведення.

Теорема 1. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна відшукати такий план X , для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (5.12) і (5.13) на $\theta > 0$ і віднімемо результати відповідно з (5.10) та (5.11). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0 \quad (5.16)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = F(X_0) - \theta(F_j - c_j) = F(X_0) - \theta F_j + \theta c_j \quad (5.17)$$

У співвідношенні (5.17) до обох частин додається величина θc_j для $j = \overline{1, n}$.

У (5.16) $x_1, x_2, \dots, x_m$ додатні, тому завжди можна знайти таке $\theta > 0$, що всі

коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, \dots, A_m, A_j$ були б невід'ємними, інакше кажучи, отримати новий план задачі виду:

$$X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; \dots; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; \dots; 0),$$

якому відповідає таке значення функціонала:

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - c_j) \quad (5.18)$$

Оскільки за умовою теореми $F_j - c_j < 0$ і $\theta > 0$, то $F(X) > F(X_0)$, що й потрібно було довести.

Якщо розглядається задача на відшукування мінімального значення цільової функції, то формулюється така теорема.

Теорема 2. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати такий план X , для якого виконуватиметься нерівність $F(X) < F(X_0)$.

5.4 Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування, за допомогою симплексного методу знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (5.1)—(5.3), опорний план якої $X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори A_j ($j = \overline{1, n}$) системи обмежень (5.2) розкласти за базисними векторами $A_1, A_2, \dots, A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Всі подальші обчислення зручно проводити в симплексній таблиці (табл. 5.1).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «Сбаз» — коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» — початковий опорний план X_0 , в цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j (j = \overline{1, n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного j -го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (5.2). У $(m+1)$ -му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j — значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають оцінковим.

Значення $F(X_0)$ знаходять підстановкою компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ — при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного j -го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл. 6 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_{\text{баз}} X_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{\text{баз}} X_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де c_i — коефіцієнти функціонала, що відповідають векторам базису.

Таблиця 5.1. Перша симплексна таблиця відшукування опорного (оптимального плану)

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	План	c_1	c_2	...	c_l	..	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_k	...	c_n	θ_i
				x_1	x_2	...	x_l	..	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_k	...	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	...	0	..	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1j}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	...	0	..	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2j}	...	a_{2k}	...	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	x_l	c_l	b_l	0	0	...	1	..	0	$a_{l,m+1}$	...	a_{lj}	...	a_{lk}	...	a_{ln}	θ_l
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	c_m	b_m	0	0	...	0	..	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mj}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$	$F(X_0)$		0	0	...	0	..	0	Δ_{m+1}	...	Δ_j	...	Δ_k	...	Δ_n	

Після заповнення таблиці. 5.1 розраховують значення оцінок плану (останній рядок):

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^m c_i a_{ij} \right) - c_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним.

Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів j , де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що

відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для k -го вектора $m \leq k \leq n$. Тоді до базису включається вектор A_k . Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають напрямним.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести, розраховують останній стовпчик таблиці — значення θ_i .

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, i = 1, 2, \dots, m, a_{ik} > 0$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = \min \theta_i, i = 1, 2, \dots, m, a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають i -ий вектор, якому відповідає θ^* .

Допустимо, що $\theta^* = \min \theta_l = \frac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в l -му рядку таблиці. Відповідний рядок симплексної таблиці називають напрямним.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці, який називають розв'язувальним (головним) елементом. За допомогою цього елемента і методу Жордана—Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k , який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k}A_1 + \dots + a_{lk}A_l + \dots + a_{mk}A_m. \quad (5.19)$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (5.19):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \dots - a_{mk}A_m) \quad (5.20)$$

Розклад вектора A_0 за початковим базисом має вигляд:

$$A_0 = \frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \dots - a_{mk}A_m) \quad (5.21)$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (5.20) у рівняння (5.21), маємо:

$$A_0 = b_1A_1 + \dots + b_l \left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \dots - a_{mk}A_m) \right] + \dots + b_mA_m = \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k} \right) A_1 + \dots + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + \dots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk} \right) A_m$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b'_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i \neq j); \\ b'_k = \frac{b_l}{a_{lk}} \quad (i = j). \end{cases} \quad (5.22)$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j}A_1 + \dots + a_{lj}A_l + \dots + a_{mj}A_m \quad (5.23)$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (5.24) у (5.23):

$$A_j = a_{1j}A_1 + \dots + a_{lj} \left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \dots - a_{mk}A_m) \right] + \dots + a_{mj}A_m =$$

$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{1k} \right) A_1 + \dots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}} A_k + \dots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{mk} \right) A_m = a'_{1j} A_1 + \dots + a'_{kj} A_k + \dots + a'_{mj} A_m.$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a'_{1j}; \dots; x_k = a'_{kj}; \dots; x_m = a'_{mj})$, де

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} & (i \neq j); \\ a'_{kj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}} & (i = j). \end{cases} \quad (5.24)$$

Формули (5.23) та (5.24) є формулами повних виключень Жордана—Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, \dots, A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної таблиці. 5.2), необхідно:

розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;

розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана—Гаусса (правило прямокутника).

Потім необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі $F_j - c_j \geq 0$, то план X_l — оптимальний, інакше переходять до відшукування наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $F_j - c_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибираючи розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок (одну ітерацію) симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціонала, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох

точках багатогранника розв'язків, а отже, така задача має нескінченну множину оптимальних планів.

Таблиця 5.2. Друга симплексна таблиця відшукування опорного (оптимального плану)

i	Бази c	$C_{\text{баз}}$	План	c_1	c_2	...	c_l	..	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_k	..	c_n	θ_i
				x_1	x_2	...	x_l	..	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_k	..	x_n	
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	...	0	..	0	$a'_{1,m+1}$	...	a'_{1j}	...	a'_{1k}	..	a'_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	...	0	..	0	$a'_{2,m+1}$	...	a'_{2j}	...	a'_{2k}	..	a'_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	...	1	..	0	$a'_{l,m+1}$	...	a'_{lj}	...	a'_{lk}	..	a'_{ln}	θ_l
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	...	0	..	1	$a'_{m,m+1}$	...	a'_{mj}	...	a'_{mk}	..	a'_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_1)$	0	0	...	0	..	0	Δ'_{m+1}	...	Δ'_j	...	Δ'_k	..	Δ'_n	

Розв'язання задачі лінійного програмування на відшукування мінімального значення функціонала відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. До базису включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходять для тих j , яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Всі інші процедури симплексного методу здійснюються аналогічно, як у задачі лінійного програмування на відшукування максимального значення функціонала.

5.4. Метод штучного базису

Вище розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m . Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (5.25)$$

[illegible]

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.27)$$

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$). Такі змінні називають штучними. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m . Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних) Допустимо, що система рівнянь (5.26) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

[illegible]

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (5.26) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (5.28) називають розширеною, або М-задачею. Розв'язок розширеної задачі збігатиметься з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (5.28) набуде вигляду (5.26) (не міститиме штучних змінних), а розв'язок розширеної задачі буде розв'язком і задачі (5.25)—(5.27).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$$\max F^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - M x_{n+1} - \dots - M x_{n+m}$$

(У разі розв'язання задачі на відшукування мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + M x_{n+1} + \dots + M x_{n+m}$).

Припускається, що величина М є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i} , значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилючає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \quad (i = \overline{1, m})$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв'язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв'язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінкові рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в $(m+2)$ -му рядку записують коефіцієнти з M , а в $(m+1)$ -му — ті, які не містять M . Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за $(m+2)$ -м рядком. Ітераційний процес по $(m+2)$ -му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за $(m+1)$ -им рядком.

Взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 3. Якщо в оптимальному плані $\hat{X}_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Отже, загалом алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п'яти етапів:

Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

5.5. Побудова симплексної таблиці

Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j . Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.

Повторення дій, починаючи з п. 3.

Далі ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik} , тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки Δ_j ($j = \overline{1, n}$) задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

5.6. Геометрична інтерпретація симплексного методу

Геометричну інтерпретацію симплексного методу можна подати двома різними способами. В одному разі ілюструється зміна базису, яка здійснюється вибором векторів, які включаються до базису та виключаються з нього. В другому, простішому та наочному випадку, процес симплексного методу інтерпретується як

послідовний рух через сусідні кутові точки багатогранника розв'язків, що пов'язано зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Дві кутові точки назовемо сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі багатогранника.

Допустимо, що розглядається задача на відшукування максимального значення лінійної функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і маємо певний багатокутник її розв'язків (рис. 5.1).

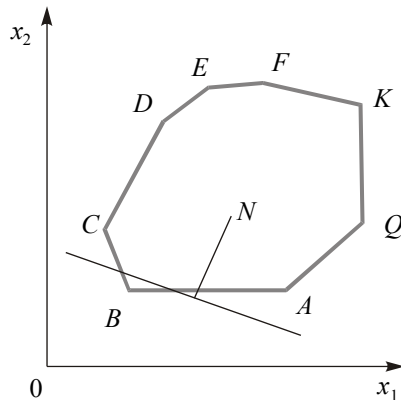


Рис. 5.1

Допустимо, що початковий опорний план відповідає кутовій точці А. Тоді наступний крок симплексного методу приведе до точки Q, ($Z(Q) > Z(A)$), а в результаті ще однієї ітерації — до точки К, де лінійна функція набуває максимального значення. Проте, якщо початковим опорним планом буде точка В, то включення вектора до базису за критерієм $\min \theta_j (Z_j - C_j)$ приводить до того, що

пряма $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ проходить через точку С і алгоритм симплексного методу приведе до точок С, D, E, F, К, тобто для отримання оптимального плану необхідно буде виконати ще чотири ітерації.

Отже, очевидно, що застосування симплексного методу не дає змоги одразу перейти від опорного плану (точки В) до оптимального (точки К). Фактично розв'язок отримують, рухаючись вздовж межі (ребер) простору розв'язків, причому не завжди такий шлях буде найкоротшим. Кількість ітерацій за реалізації симплексного алгоритму визначається вибором початкового опорного плану та кількістю кутових точок, що траплятимуться на шляху прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$.

Приклад 1.

Продукція чотирьох видів А, В, С і Д проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задано таблицею.

Верстат	Тривалість обробки, год, одиниці продукції			
	А	В	С	Д
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-год становить 10 дол. для верстата 1 і 15 дол. — для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежений: для верстата 1 він становить 450 машино-год, а для верстата 2 — 380 машино-год.

Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 дол.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

Побудова математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j -го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на час використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450$ (машино-год);

для верстата 2 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380$ (машино-год).

Цільова функція задачі визначається як загальний чистий прибуток від реалізації готової продукції і складається з різниці між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$Z = (73 - (2 \cdot 10 + 3 \cdot 15))x_1 + (70 - (3 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4 \cdot 10 + 1 \cdot 15))x_3 + (45 - (2 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_4;$$

$$Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4.$$

Отже, математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \max & (8x_1 + 10x_2 - 5x_4); \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380, \end{cases} & ; \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Розв'язування. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 & = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & + x_6 = 380, \end{cases} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, 6}. \end{aligned}$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають можливий, але не використаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max (8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6).$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6 , що

відповідають одиничним базисним векторам, називають **базисними**, а решту — **вільними змінними** задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j (j = \overline{1, 6})$ векторна форма запису системи обмежень задач матиме вигляд

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$x_0 = (0; 0; 0; 0; 450; 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_5$	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	190
$Z_j - C_j \geq 0$		0	-8	-10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j , за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - C_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$

$$Z_2 - C_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10 ;$$

$$Z_3 - C_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 ;$$

$$Z_4 - C_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5 ;$$

$$Z_5 - C_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0 ;$$

$$Z_6 - C_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 .$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z , якого вона набуває для визначеного опорного плану:

$$Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0 .$$

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на $\max$) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на $\min$), визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на $\max$ або додатна в задачі на $\min$), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ суперечать умові оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису беремо змінну x_2 , оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка серед тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10| > |-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика « x_2 » знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці бачимо, що $\min \theta = \{450/3; 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5 , а число $a_{12} = 3$ називатимемо *розв'язувальним елементом*. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	10	150	2/3	1	4/5	2/3	1/3	0	225
$\leftarrow x_6$	0	80	5/3	0	-5/3	2/3	-2/3	1	48
$Z_j - C_j \geq 0$		1500	-4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і « $C_{\text{баз}}$ », а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими далі правилами:

1. Розв'язувальний (напрямний) рядок необхідно поділити на розв'язувальний елемент і здобуті числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за *правилом прямокутника*.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент;

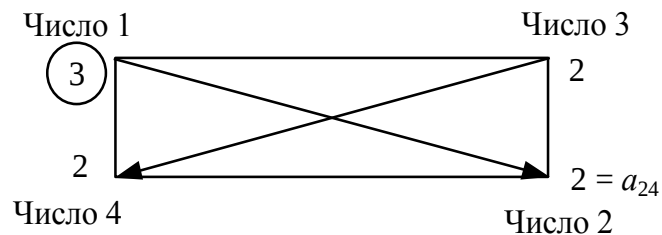
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають так:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24} , який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика « x_4 ». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик « x_4 » другого рядка другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - C_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	-2/5
x_1	8	48	1	0	-1	2/5	-2/5	3/5
$Z_j - C_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48; x_2 = 118; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (; 118; 0; 0; 0; 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564 .$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 од. продукції В, оптимальний і дає найбільший прибуток 1564 дол. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Задачу можна розв'язати симплекс-методом, узявши не три симплексні таблиці, а одну, в якій послідовно записувати всі ітерації.

Приклад 2. Розв'язати попередню задачу із додатковою умовою: продукція С має виготовлятися в кількості не менш як 9 одиниць.

Розв’язування. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380, \\ x_3 \geq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Застосовуючи для розв’язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку записуємо систему обмежень у канонічній формі, а далі — у векторній:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Зауважимо, що нерівність типу « $\geq$ » у рівняння перетворюємо введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком « $-$ ».

Векторна форма запису:

$$x_1 \vec{A}_1 + x_2 \vec{A}_2 + x_3 \vec{A}_3 + x_4 \vec{A}_4 + x_5 \vec{A}_5 + x_6 \vec{A}_6 + x_7 \vec{A}_7 = \vec{A}_0,$$

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є лише два одиничні — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один

одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом +1

штучну змінну x_8 , якій відповідатиме одиничний вектор $\bar{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} \max & (8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8) \\ & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 8}. \end{cases} \end{aligned}$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на $\min$) або $-M$ (для задачі на $\max$), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8 , а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі:

$$x_0 = (0; 0; 0; 0; 450; 380; 0; 9),$$

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
$\leftarrow x_8$	-M	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	9
$Z_j - C_j \geq 0$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
		-9M	0	0	-M	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо $Z_0 = 0 - 9M$, $Z_1 - C_1 = -8$, $Z_2 - C_2 = -10$, $Z_3 - C_3 = 0 - M$ і т. д. Як бачимо, значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M , а інша — просто число. Тому для зручності розбиваємо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок записуємо просто число, а в другий — число з коефіцієнтом M .

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у прикладі 1, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі.

Подальше розв'язування задачі наведене у вигляді таблиці:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
$\leftarrow x_5$	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	—
$Z_j - C_j \geq 0$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
$\leftarrow x_6$	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	—
$Z_j - C_j \geq 0$		1380	-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
$Z_j - C_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Відповідь. Оптимальним планом задачі є вектор

$$X^* = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0),$$

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 дол.

Теоретичні запитання

1. Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
2. В чому полягає суть алгоритму симплексного методу?
3. Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
4. Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?
5. Як вибрати розв'язувальний (головний) елемент?
6. В чому суть методу штучного базису?

Завдання для самостійної роботи

1). Господарство планує вирощувати три сільськогосподарські культури (пшеницю, картоплю та гречку) і може виділити для цього 300 га земельних угідь. Для успішного вирощування сільськогосподарські культури потребують внесення комплексного мінерального добрива, запас якого в господарстві обмежений — 120 т. Норму внесення мінерального добрива, урожайність та закупівельні ціни на сільськогосподарські культури наведено в таблиці:

Показник	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Картопля	Гречка
Урожайність, ц/га	40	200	15
Закупівельна ціна, ум. од./ц	10	5	30
Норма внесення добрива, кг/га	300	500	200

Площа земельних угідь, що відводяться під вирощування гречки, має не перевищувати 40 га. Визначити такий план розподілу посівної площі господарства, який дає найбільший дохід від вирощування сільськогосподарських культур. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом.

2). Фірма має капітал 300 000 дол., який може використовуватися для фінансування проектів 1 та 2. Реалізація проекту 2 гарантує отримання щороку прибутку в розмірі 1 дол. на кожний вкладений долар. Проект 1 гарантує прибуток у розмірі 3 дол. за кожний інвестований долар, але через два роки. У разі фінансування проекту 1 період інвестицій має бути кратним двом рокам. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом, щоб максимізувати загальний дохід, що його може отримати фірма через три роки після початку інвестицій. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом.

3). Розв'язати задачу симплекс - методом:

$$\begin{aligned} & \max (5x_1 + x_2 + x_3); \quad \min (x_1 - 3x_2 + x_3); \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3, \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2, \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 7, \end{cases} \\ & x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Розділ 6. ПОНЯТТЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ПРАВИЛА ПОБУДОВИ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ

З кожною задачею ЛП пов'язана інша лінійна задача, що називається *двоїстою*.

Поняття двоїстості задач математичного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, а також широко використовується на практиці. Двоїстість у лінійному програмуванні була розроблена академіком Л. В. Канторовичем ще в 1939 році. У 1975 році Канторович і американський математик Т. Купманс за відкриття двоїстості та її застосування в економічних дослідженнях одержали Нобелівську премію.

Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретацію. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях. У 70-х роках 20 сторіччя велася дискусія з приводу використання двоїстих оцінок в економіці. Економісти того часу недооцінювали цю важливу економічну категорію. Проблема полягала ще й у тому, що ціни не були обґрунтованими, не враховувались реальні витрати живої та уречевленої праці, попит і пропозиція на продукцію.

6.1. Постановка двоїстої задачі

Існує зв'язок не лише між умовами прямої (вихідної) і двоїстої задачі, а й між їх розв'язками. А отже, розв'язуючи ЗЛП, можна розв'язати легшу з пари двоїстих і на основі результату її розв'язання отримати розв'язок складнішої задачі.

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i (i = \overline{1, m})$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю

продукції становить $a_{ij}(j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m})$. Ціна одиниці продукції j -го виду дорівнює $c_j(j = \overline{1, n})$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (6.1)$$

[illegible]

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який дає найбільший дохід.

Тобто, вихідна задача:

Скільки і якої продукції x_j ($j = \overline{1, n}$) треба виробити, щоб при заданих вартостях c_j ($j = \overline{1, n}$) одиниці продукції і розмірах наявних ресурсів b_i ($i = \overline{1, m}$) максимізувати прибуток підприємства?

Двоїста задача:

Якою повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i та величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат?

Економічний зміст двоїстої задачі полягає ось у чому. Визначити таку оптимальну систему оцінок ресурсів y_i (їх називають двоїстими оцінками ресурсів y_i), використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх

ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i -го ресурсу, їх інколи ще називають **тіньовою ціною відповідного ресурсу**.

Двоїста до неї задача буде мати вигляд (6.3) – (6.4):

(6.3)

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

[illegible]

Задача (6.1) – (6.2) теж вважається двоїстою до (6.3) – (6.4).

6.2. Правила побудови двоїстих задач

1. Кількість обмежень прямої ЗЛП рівна кількості невідомих двоїстої ЗЛП (і навпаки).

2. Коефіцієнти цільової функції прямої ЗЛП є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі (і навпаки).

3. Матрицю коефіцієнтів системи обмежень двоїстої ЗЛП отримуємо в результаті транспонування матриці коефіцієнтів системи обмежень прямої ЗЛП (і навпаки).

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

4. Якщо пряма ЗЛП є задачею на max, то двоїста на min.

5. Всі змінні симетричних двоїстих задач невід’ємні.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У *симетричних* задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід’ємних значень.

У *несиметричних задачах* обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Пряма (вихідна) задача	Двоїста задача
Симетричні	
$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$	$F(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n},$ $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$
$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$	$F(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n},$ $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$
Несиметричні (канонічні)	
$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$	$F(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n},$ $y_i \in (-\infty; \infty).$

$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$ $x_j \geq 0.$	$F(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n},$ $y_i \in (-\infty; \infty).$
---	---

6.3. Співвідношення двоїстості.

Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Співвідношення двоїстості – це співвідношення між значеннями змінних пари двоїстих задач, вони описуються наступними теоремами.

Теорема. Для будь-яких допустимих розв'язків двоїстих задач

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ справедлива нерівність

$$Z(X) \leq F(Y) \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (6.5)$$

Теорема. (Критерій оптимальності Канторовича). Якщо

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – допустимі розв'язки взаємно двоїстих

задач, для яких виконується рівність

$$Z(X^*) = F(Y^*), \quad (6.6)$$

то X^* і Y^* – оптимальні розв'язки відповідних задач.

Теорема. (Перша теорема двоїстості). Якщо одна із взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має і друга задача, причому виконується рівність

$$\max Z(X) = Z(X^*) = \min F(Y) = F(Y^*), \quad (6.7)$$

де X^* і Y^* – оптимальні розв'язки двоїстих задач.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^* , визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається так:

$$Y^* = C_B D^{-1}, \quad (6.8)$$

де C_B – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані. При цьому порядок слідування координат цього вектора визначається порядком запису базисних змінних в останній симплексній таблиці. D^{-1} — матриця, обернена до матриці D , складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узяті з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то область допустимих розв'язків двоїстої задачі пуста.

6.4. Економічний зміст першої теореми двоїстості.

План виробництва $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ і набір цін (оцінок) ресурсів $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ є оптимальний тоді і тільки тоді, коли прибуток $Z(X)$ від реалізації продукції, який знайдено при відомих завчасно цінах $c_1, c_2, \dots, c_n$ дорівнює витратам $F(Y)$ на ресурси за внутрішніми цінами $y_1, y_2, \dots, y_m$, які визначаються тільки після розв'язання задачі.

Для всіх планів прибуток завжди менше витрат на ресурси.

Теорема. (Друга теорема двоїстості). Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, яка записана через вільні змінні її оптимального розв'язку.

Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i -те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i -й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i -й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i -те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Приклад 1.

- а) Скласти двоїсту задачу відносно даної;
- б) розв'язати пряму задачу симплекс-методом;
- в) зважаючи на взаємозв'язок основних і допоміжних змінних двоїстої задачі та, використавши розв'язок прямої задачі, вказати оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

$$Z = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

- а) Оскільки вихідна задача розглядається на максимум, то всі обмеження задачі повинні бути зі знаком $\leq$. Складемо розширену матрицю системи обмежень, доповнюючи її рядком цільової функції

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основі властивостей двоїстих задач сформулюємо двоїсту задачу до вихідної:

$$F = 14y_1 + 8y_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \geq 2, \\ 3y_1 + y_2 \geq 7, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

б) Розв'яжемо пряму задачу симплекс-методом.

Базис	C_B	В	Опорний план	2	7	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	0	14	$Z_0 = 0$	-2	3	1	0	14/3
A_4	0	8	$X_0 = (0; 0; 14; 8)$	1	1	0	1	8
	$Z_0 = 0$		Δ_j	-2	-7	0	0	
A_2	7	14/3	$Z_1 = 98/3$	-2/3	1	1/3	0	— не треба
A_4	0	10/3	$X_1 = (0; 14/3; 0; 10/3)$	5/3	0	-1/3	1	
	$Z_1 = 98/3$		Δ_j	-20/3	0	7/3	0	
A_2	7	6	$Z_2 = 46$	0	1	1/5	2/5	
A_1	2	2	$X_2 = (2; 6; 0; 0)$	1	0	-1/5	3/5	
	$Z_2 = 46$		Δ_j	0	0	1	4	

Отже, оптимальний план вихідної задачі: $X_{opt} = (2; 6; 0; 0)$,

$$\max Z(X) = Z_{\max} = 7 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 46.$$

За першою теоремою двоїстості $Y^* = C_B D^{-1}$, знайдемо Y^* , тобто Y_{opt} ,

за цією формулою: $C_B = (7 \ 2)$,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad Y^* = C_B D^{-1} = (7 \ 2) \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} = (1 \ 4).$$

Ці самі значення компонент Y_{opt} бачимо в оцінковому рядку оптимального плану.

в) За другою теоремою двоїстості встановлюємо наступний зв'язок між

Основні		Допоміжні		Задача на максимум
x_1	x_2	x_3	x_4	
$\Delta x_1 = 0$	$\Delta x_2 = 0$	$\Delta x_3 = 1$	$\Delta x_4 = 4$	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$y_3=0$	$y_4=0$	$y_1=1$	$y_2=4$	Задача на мінімум
$\Delta y_3 = 2$	$\Delta y_4 = 6$	$\Delta y_1 = 0$	$\Delta y_2 = 0$	
Допоміжні		Основні		

змінними прямої та двоїстої задачі.

Використовуючи симплекс-таблицю прямої задачі, заповнимо наступну таблицю:

Для оптимальних компонент запишемо співвідношення:

$$x_1 = |\Delta y_3| = 2; \quad x_2 = |\Delta y_4| = 6; \quad x_3 = |\Delta y_1| = 0; \quad x_4 = |\Delta y_2| = 0;$$

$$X_{opt} = (2; 6; 0; 0);$$

$$y_1 = |\Delta x_3| = 1; \quad y_2 = |\Delta x_4| = 4; \quad y_3 = |\Delta x_1| = 0; \quad y_4 = |\Delta x_2| = 0;$$

Отже, оптимальний план двоїстої задачі: $Y_{opt} = (1; 4; 0; 0)$, $F_{min} = Z_{max} = 46$.

Теорема. (Третя теорема двоїстості). Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного **дефіцитного** ресурсу збільшується на одну одиницю.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на **дефіцитні** та **недефіцитні** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i -й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є **недефіцитним**. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i -й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається **дефіцитним**. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z , якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j -ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона **нерентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона **рентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати

оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

- склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;
- склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;
- змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв'язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

Розглянемо конкретний приклад, що підтверджує зроблені висновки.

Приклад.

Деяке підприємство виробляє чотири види продукції А, В, С і Д, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, ум. од., за видами продукції				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: для продукції А — 2 ум. од., для В і Д — по 4 од., для С — 3 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільший дохід. Наведемо симплекс-таблицю, що відповідає оптимальному плану поставленої задачі.

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	-2	1/2	0	1	1/2	0	-1
x_6	0	30	-1	1	0	0	-1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	- 1/2	0	2
$Z_j - C_j \geq 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Виконаємо зазначені далі дії.

1. Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.
2. Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зробити їх економічний аналіз.
3. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.
4. Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого — зменшити на 10 од., а третього — збільшити на 20 ум. од.
5. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.
6. Розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Розв'язування. 1. Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 80, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 4}; \end{aligned}$$

де x_j — обсяг виробництва продукції j -го виду ($j = \overline{1, 4}$);

$$\begin{aligned} F &= 250y_1 + 280y_2 + 80y_3 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4, \end{cases} \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

де y_i — оцінка одиниці i -го виду ресурсу ($i = \overline{1, 3}$).

2. З наведеної симплекс-таблиці маємо:

$$X^* = (0; 0; 35; 45; 0; 30; 0), \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4; 0; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2; 0; 2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів продукції С і Д у кількості відповідно 35 та 45 од. Випуск продукції А та В не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$). Додаткові змінні x_5 , x_6 , x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший та третій ресурси — повністю ($x_5 = x_7 = 0$). За такого оптимального плану виробництва

продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільший дохід у розмірі 285 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F = 285$ ум. од.

3. Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 & (\text{ресурс 1 дефіцитний}); \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 & (\text{ресурс 2 недефіцитний}); \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 & (\text{ресурс 3 дефіцитний}). \end{cases}$$

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i -го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то i -й ресурс недефіцитний. Так,

$$y_1 = 1/2 \text{ (ресурс 1 дефіцитний);}$$

$$y_2 = 0 \text{ (ресурс 2 недефіцитний);}$$

$$y_3 = 2 \text{ (ресурс 3 дефіцитний).}$$

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція $\max Z$ збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285,5$ ум. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика « x_5 » останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці $y_1 = 1/2$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на $1/2$, змінної x_6^* — зменшиться на одиницю, а x_3^* — на $1/2$. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = (0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції Д та падіння виробництва продукції С, а обсяг використання ресурсу 2 збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде $\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34,5 + 4 \cdot 45,5 = 285,5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика « x_7 » останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0)$$

$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції Д на одну одиницю. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимо Δb_1 . Тоді, якщо $b'_1 = b_1 + \Delta b_1$, то новий оптимальний план

$$X^* = (0; 0; 35 - 1/2\Delta b_1; 45 + 1/2\Delta b_1; 0; 30 - \Delta b_1; 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq -90; \\ \Delta b_1 \leq 30; \end{cases}$$

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30 .$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$250 - 90 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 250 + 30 ,$$

$$160 \leq b_1 \leq 280 .$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$285 - 90 \cdot 1/2 \leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot 1/2 ,$$

$$240 \leq Z_{\max} \leq 300 ,$$

а оптимальний план виробництва продукції

$$(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) \leq X^* \leq (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0; \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17,5; \\ \Delta b_3 \leq 45; \end{cases}$$

$$-17,5 \leq \Delta b_3 \leq 45 ,$$

$$62,5 \leq b_3 \leq 125 .$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$250 \leq \max Z \leq 375 ;$$

$$(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) \leq X^* \leq (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4. За умовою задачі обсяги всіх трьох ресурсів змінюються відповідно $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$. Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу:

$$X^* = D^{-1} \cdot \bar{B}.$$

З останньої симплекс-таблиці можна записати обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 + 10 \\ 280 - 10 \\ 80 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто $X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)$.

Усі $x_j \geq 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається $Y^* = (1/2; 0; 2)$.

Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на $\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = +45$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285 + 45 = 330$ ум. од.

5. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 \text{ (продукція А нерентабельна);} \\ 5 \cdot 1/2 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13/2 > 4 \text{ (продукція В нерентабельна);} \\ 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 = 3 \text{ (продукція С рентабельна);} \\ 4 \cdot 1/2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 = 4 \text{ (продукція Д рентабельна).} \end{array} \right.$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну

одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках « x_1 »—« x_4 ». Їх оптимальні значення $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому продукція А і В нерентабельна, а продукція С і Д — рентабельна.

6. Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається таким: $X^* = (0; 0; 35; 45)$.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось тим, що при цьому симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів оцінкового рядка. Нові оцінки $(Z_j - C_j)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта C_1 позначимо ΔC_1 . Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка $Z_1 - C_1$:

$$(Z_1 - C_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3/2 - (2 + \Delta C_1) = 5 - \Delta C_1.$$

За умови $Z_1 - C_1 \geq 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta C_1 \geq 0$, тобто $\Delta C_1 \leq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції А за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться $X^* = (0; 0; 35; 45)$. Лише максимальний дохід зміниться на $\max \Delta Z = \Delta C_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта ΔC_2 :

$$(Z_2 - C_2) = 5/2 - \Delta C_2 \geq 0; \quad \Delta C_2 \leq 5/2.$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції В на $5/2$ ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta Z = \Delta C_2 x_2$.

Дещо складніше розраховується інтервал зміни коефіцієнтів для базисних змінних. У цьому разі зміни відбуваються також у стовпчику « $C_{\text{баз}}$ » симплекс-таблиці, а це, у свою чергу, стосується всіх ненульових оцінок $(Z_j - C_j)$. Так, для базисної змінної x_3 зміна коефіцієнта на ΔC_3 приведе до таких оцінок:

$$(Z_1 - C_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + (3 + \Delta C_3) \cdot 5 - 2 = 5 + 5\Delta C_3;$$

$$(Z_2 - C_2) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 + (3 + \Delta C_3) \cdot 3/2 - 4 = 5/2 + 3/2\Delta C_3;$$

$$(Z_5 - C_5) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot (-1) - 1/2 \cdot (3 + \Delta C_3) - 0 = 1/2 - 1/2\Delta C_3;$$

$$(Z_7 - C_7) = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (3 + \Delta C_3) - 0 = 2 + 2\Delta C_3.$$

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - C_j \geq 0$.

Тому інтервал для ΔC_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5 + 5\Delta C_3 \geq 0, \\ 5/2 + 3/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 1/2 - 1/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 2 + 2\Delta C_3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1, \\ \Delta C_3 \geq -5/3, \\ \Delta C_3 \leq 1, \\ \Delta C_3 \geq -1; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1,$$

$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції С може збільшуватися та зменшуватися на 1 ум. од. і перебувати в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається

$$X^* = (0; 0; 35; 45).$$

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта C_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5 - 2\Delta C_4 \geq 0; \\ 5/2 + 1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 1/2 + 1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 2 - \Delta C_4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2, \\ \Delta C_4 \geq -5, \\ \Delta C_4 \geq -1, \\ \Delta C_4 \leq 2; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2,$$

$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції D зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то оптимальний план виробництва продукції на підприємстві не зміниться.

$$X^* = (0; 0; 35; 45).$$

Якщо коливання ціни продукції виходять за визначені межі, то план $X^* = (0; 0; 35; 45)$ вже не буде оптимальним і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язування задачі.

Виконаний у цій задачі аналіз лінійної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і дає змогу дослідити можливі зміни цього оптимального плану в результаті коректування умов прямої задачі.

Теоретичні запитання

1. У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які — несиметричними? Чим вони відрізняються?
3. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
4. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
5. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
6. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.
7. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?

Завдання для самостійної роботи

- 1). Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$\text{а) } x = (8/7; 3/7; 0); \quad \text{б) } x = (0; 1/5; 8/5); \quad \text{в) } x = (1/3; 0; 1/3).$$

2). У наведених далі завданнях записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

$$\text{а) } Z = -30x_1 + 10x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$\text{б) } Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Розділ 7. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукування оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов'язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в цьому розділі.

7.1. Економічна і математична постановка транспортної задачі

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i -го постачальника до кожного B_j -го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву *транспортної задачі за критерієм вартості перевезень*. Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Тоді умови задачі зручно подати у вигляді такої таблиці 7.1:

Споживачі Постачальники		B_1	B_2	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

1) сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i -го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

[illegible]

2) сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j -му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

[illegible]

3) сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} \min F = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \dots\dots\dots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (7.1)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}) \quad (7.4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (7.5)$$

Транспортну задачу називають **збалансованою**, або **закритою**, якщо виконується умова (7.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають **незбалансованою**, або **відкритою**.

Домовимося **планом** транспортної задачі називати будь-який невід’ємний розв’язок системи обмежень (7.2)—(7.4), який позначають матрицею $X = x_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Значення невідомих величин x_{ij} — обсяги продукції, що мають бути перевезені від i -х постачальників до j -х споживачів, називатимемо **перевезеннями**.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x_{ij}^*$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), яка задовольняє умови задачі, і для якої цільова функція (7.1) набирає найменшого значення.

Теорема (умова існування розв’язку транспортної задачі): необхідною і достатньою умовою існування розв’язку транспортної задачі (7.1)—(7.4) є її збалансованість: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Доведення. Необхідність. Нехай задача (7.1)—(7.4) має розв’язок $X^*(x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{mn}^*)$, тоді для нього виконуються рівняння-обмеження (7.2) і (7.3). Підсумуємо відповідно ліві та праві частини систем рівнянь (7.2) і (7.3). Матимемо:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m a_i \quad (7.6)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (7.7)$$

Оскільки ліві частини рівнянь (7.6) та (7.7) збігаються, то праві також рівні одна одній, отже, виконується умова:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (7.8)$$

Достатність. Потрібно показати, що за заданої умови (7.8) існує хоча б один план задачі, і цільова функція на множині планів обмежена.

Нехай $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = W > 0$. Розглянемо величини $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Підставивши значення x_{ij} в систему обмежень задачі (7.1)—(7.4), матимемо:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{W} = \frac{a_i}{W} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{W} W = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{W} = \frac{b_j}{W} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{W} W = b_j.$$

Оскільки умови (7.2) та (7.3) виконуються, то $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) є планом наведеної транспортної задачі.

Виберемо з елементів c_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) найбільше значення і позначимо його через $\bar{c} = \max c_{ij}$. Якщо замінити в цільовій функції (7.1) всі коефіцієнти на $\bar{c}$, то, враховуючи (7.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq \bar{c} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \bar{c} \sum_{i=1}^m a_i = \bar{c} W.$$

Виберемо з елементів c_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) найменше значення і позначимо його через $\underline{c} = \min c_{ij}$. Якщо замінити в цільовій функції (7.1) всі коефіцієнти на $\underline{c}$, то, враховуючи (7.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq \underline{c} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \underline{c} \sum_{i=1}^m a_i = \underline{c} W.$$

Тобто цільова функція на множині допустимих планів транспортної задачі є обмеженою:

$$\underline{c} W \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq \bar{c} W.$$

Теорему доведено.

Якщо при перевірці збалансованості (7.5) виявилось, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту

над запасами $\left(\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i \right)$ із ресурсом обсягом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Якщо ж загальні

запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \right)$, то до

закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1}

з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} , ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)

. Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Як згадувалося вище, транспортна задача (7.1)—(7.4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв’язана симплексним методом, однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дають змогу розв’язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (7.2), (7.3) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (7.2), (7.3) задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (7.2), (7.3) складається з mn невідомих та $m + n$ рівнянь, які пов’язані між собою співвідношенням (7.8). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (7.2) та (7.3), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j ;$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i .$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m + n - 1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв’язати відносно $m + n - 1$ базисних змінних. Назвемо **опорним планом** транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є невиродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то маємо вироджений опорний план.

7.2. Опорні плани транспортної задачі. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді табл. 1, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для не виродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Назвемо **циклом** таку послідовність заповнених клітин таблиці 1, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема 1. Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Теорема 2. (Наслідок теореми 1) Будь-яка сукупність з $m + n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Теорема 3. Якщо всі запаси a_i ($i = \overline{1, m}$) і всі потреби b_j , ($j = \overline{1, n}$) є невід’ємними цілими числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Як і в звичайному симплексному методі, розв’язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати методом, який було розглянуто в лекції про

симплексний метод, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану: **методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля**. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам.

Побудову першого плану за **методом північно-західного кута** починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

7.3. Алгоритм методу північно-західного кута

1. Починають з комірки (клітини), яка розташована у розподільній таблиці у лівому верхньому куту. Завантажують її кількістю вантажу у розмірі $x_{ij} = \min(a_1; b_1)$

2. Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і далі перший стовпець, який відповідає споживачу B_1 , у розрахунках участі не бере. Після цього, рухаючись по рядку переходять до комірки (1;2), завантажують її кількістю вантажу у розмірі $x_{12} = \min[(a_1 - b_1); b_2]$. Якщо $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$ і запаси постачальника A_1 вичерпані, отже перший рядок далі участі у розрахунках не бере. Переходять до розподілу вантажу постачальника A_2 .

3. Якщо $b_1 > a_1$, то $x_{11} = a_1$, і перший рядок, який відповідає постачальнику A_1 – далі в розрахунках участі не бере. Переходять до другого постачальника A_2 , комірки (2;1). Цю комірку завантажують кількістю вантажу у розмірі $x_{22} = \min(a_2; b_1 - a_1)$ і т.д., поки не заповнюють всю розподільну таблицю.

Приклад. Скласти опорний план задачі методом північно-західного кута. В пунктах A_i є запаси деякого однорідного продукту, які мають бути доставлені споживачам B_j . Необхідно знайти такий план перевезень, при якому буде вивезена вся продукція із пунктів A_i , вимоги споживачів B_j будуть повністю виконані, а сумарні транспортні витрати будуть мінімальними. Потреби споживачів і наявність продукції (в одних і тих самих умовних одиницях), а також транспортні витрати на перевезення продукції із пункту A_i до споживача B_j наведені в таблиці:

Пункт	Споживач				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потреби	75	80	60	85	300

Розв'язання. Визначимо тип транспортної задачі:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 100 + 150 + 50 = 300, \quad \sum_{j=1}^n b_j = 75 + 80 + 60 + 85 = 300,$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

отже, модель замкнута.

Методом північно-західного кута знаходимо опорний план.

Пункт	Споживач				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6 75	7 25	3	5	100
A_2	1	2 55	5 60	6 35	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потреби	7	80	60	85	300

$$X_{\text{поч.оп.}} = \begin{pmatrix} 75 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 60 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Оскільки $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$ і число завантажених комірок дорівнює 6, то початковий опорний розв'язок є невиродженим.

Значення цільової функції на цьому розв'язку дорівнює

$$Z(X_{\text{поч.оп.}}) = 75 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 55 \cdot 2 + 60 \cdot 5 + 35 \cdot 6 + 50 \cdot 1 = 1295.$$

7.4. Інші методи побудови опорних планів

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Для попередньої задачі складемо опорний план методом мінімальної вартості:

Пункт	Споживач				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6 75	7 5	3 60	5 35	100
A_2	1 75	2 75	5	6	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потреби	75	80	60	85	300

Оскільки $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$ і число завантажених комірок дорівнює 6, то початковий опорний розв'язок є не виродженим.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Значення цільової функції на цьому розв'язку дорівнює

$$Z(X_{\text{поч. оп.}}) = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 60 + 5 \cdot 35 + 1 \cdot 75 + 2 \cdot 75 + 1 \cdot 50 = 665.$$

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях

таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

7.5. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукування оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов'язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в цьому розділі.

Сформулюємо другу теорему двоїстості для задач (7.1)—(7.4).

Введемо числа u_i та v_j , для яких виконується умова $u_i + v_j \leq c_{ij}$, які назовемо **потенціалами**.

Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$1) \ x_{ij}^* (u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n};$$

$$2) \begin{cases} u_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^* - a_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ v_j^* \left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^* - b_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

а) якщо $x_{ij}^* = 0$. Другий співмножник $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) \leq 0$, бо за умовою $u_i + v_j \leq c_{ij}$ ($i = \overline{1, 2, \dots, m}; j = \overline{1, 2, \dots, n}$),

б) якщо $x_{ij}^* \neq 0$, то за умовою транспортної задачі $x_{ij}^* > 0$, тоді $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0 \Rightarrow u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ ($i = \overline{1, 2, \dots, m}; j = \overline{1, 2, \dots, n}$).

Необхідність і достатність виконання таких умов для оптимальності планів прямої та двоїстої задач розглядалися в розділі Двоїсті задачі. Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі отримали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j , для яких виконуються умови:

$$1) u_i + v_j = c_{ij}, \quad x_{ij} > 0,$$

$$2) u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв'язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану

транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи замкнута). За необхідності слід звести задачу до замкнутого типу.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.
3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.
4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4.1. Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m+n-1$, а кількість невідомих — $(m+n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

4.2. Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

4.3. Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max \{ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \}$.

4.4. Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Кількість заповнених клітин разом з вибраною порожньою клітиною становить $m + n$, отже, з цих клітин обов'язково утвориться цикл. У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «-» та «+». У клітинках зі знаком «-» вибирають значення $\theta = \min x_{ij}$ і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «-». Якщо значенню θ відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невід'ємність опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору θ дістаємо новий опорний план, який не містить від'ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число θ додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Доведемо ациклічність нового плану. Вектор умов, який відповідає приєднаній клітині, є лінійною комбінацією векторів базису, які утворюють разом з ним цикл, бо ці вектори входять у згадану лінійну комбінацію з відмінними від нуля коефіцієнтами. Виключення з циклу одного з базисних векторів приводить до нової системи з $m + n - 1$ лінійно незалежними векторами, бо інакше введений у новий

базис вектор мав би два різних розклади через вектори попереднього базису, що неможливо. А системі лінійно незалежних векторів відповідає ациклічна сукупність клітин таблиці транспортної задачі, що й потрібно було довести.

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальною величиною x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану (тобто повернутися до пункту 3 даного алгоритму).

Зауважимо, що аналогічно з розв’язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність $u_i + v_j = c_{ij}$, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

Приклад . В пунктах A_i є запаси деякого однорідного продукту, які мають бути доставлені споживачам B_j . Необхідно знайти такий план перевезень, при якому буде вивезена вся продукція із пунктів A_i , вимоги споживачів B_j будуть повністю виконані, а сумарні транспортні витрати будуть мінімальними. Потреби споживачів і наявність продукції (в одних і тих самих умовних одиницях), а також транспортні витрати на перевезення продукції із пункту A_i до споживача B_j наведені в таблиці:

Пункт	Споживач				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потреби	75	80	60	85	300

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i -ї фабрики до j -го замовника ($i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 4}$). Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 300 \right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 80, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$\begin{aligned} Z = & 6 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 5 \cdot x_{23} + \\ & + 6 \cdot x_{24} + 3 \cdot x_{31} + 10 \cdot x_{32} + 20 \cdot x_{33} + 1 \cdot x_{34} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$\begin{aligned} Z = & 6 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 5 \cdot x_{23} + \\ & + 6 \cdot x_{24} + 3 \cdot x_{31} + 10 \cdot x_{32} + 20 \cdot x_{33} + 1 \cdot x_{34} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 80, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Розв'язання. 1. Визначимо тип транспортної задачі:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 100 + 150 + 50 = 300,$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 75 + 80 + 60 + 85 = 300,$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

отже, модель закрита. Методом північно-західного кута знаходимо опорний план

Пункт	Споживач				
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6 75	7 25 –	3 +	5	$u_1 = 0$
A_2	1	2 55 +	5 60 –	6 35	$u_2 = -5$
A_3	3	10	20	1 50	$u_3 = -10$
	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 10$	$v_4 = 11$	

$$X_{\text{поч.оп.}} = \begin{pmatrix} 75 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 60 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Оскільки $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$ і число завантажених комірок дорівнює 6, то початковий опорний розв'язок є невиродженим.

Значення цільової функції на цьому розв'язку дорівнює

$$Z(X_{\text{поч.оп.}}) = 75 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 55 \cdot 2 + 60 \cdot 5 + 35 \cdot 6 + 50 \cdot 1 = 1295.$$

Для визначення потенціалів u_i , v_j сформуємо відповідну систему лінійних рівнянь для завантажених комірок

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6, & u_1 + v_2 &= 7, \\ u_2 + v_3 &= 2, & u_2 + v_4 &= 5, \\ u_3 + v_4 &= 6, & u_3 + v_3 &= 1. \end{aligned}$$

Поклавши в останній $u_1 = 0$, знаходимо всі потенціали початкового опорного плану ТЗ: $u_2 = -5$, $u_3 = -10$, $v_1 = 6$, $v_2 = 7$, $v_3 = 10$, $v_4 = 11$.

Перевіримо умови оптимальності для вільних комірок таблиці

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 3 - (0 + 10) = -7, < 0,$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 5 - 11 = -6, < 0,$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 1 - (6 - 5) = 0,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (6 - 10) = 7,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 10 - (-10 + 7) = 13,$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 20 - (-10 + 10) = 20.$$

Умова оптимальності не виконується для комірок (1.3) і (1.4), отже одержаний початковий опорний розв'язок не є оптимальним. Тому необхідно перейти до нового опорного плану (розв'язку). Комірка, для якої здійснюємо **цикл перерахування** (1.3) тому, що її оцінка найменша (Δ_{13}). Ставимо в неї знак “+” та утворюємо цикл. Вершини циклу будемо виділяти рожевим кольором (попередня таблиця). При цьому знаки “+” та “-” чергуються. В комірках зі знаком “+” (1.3) і (2.2) додається 25 одиниць продукції, а з комірок зі знаком “-” (1.2) і (2.3) така ж кількість продукції вилучається (25 це мінімальне число з чисел 25 та 60, які стоять в комірках із знаком “-” в нашому циклі).

Новий опорний план ТЗ матиме вигляд, наведений в наступній таблиці.

Пункт	Споживач				Запас	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	6 75 –	7	3 25 +	5	100	$u_1 = 0$
A_2	1 +	2 80	5 35 –	6 35	150	$u_2 = 2$
A_3	3	10	20	1 50	50	$u_3 = -3$
Потреби	75	80	60	85	300	
	$v_1 = 6$	$v_2 = 0$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$		

$$X_1 = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 80 & 35 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad Z(X_1) = 1120.$$

Оскільки $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$ і число завантажених комірок дорівнює 6, то початковий опорний розв'язок є не виродженим.

Для визначення u_i , v_j для нового опорного плану сформуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6, & u_1 + v_3 &= 3, \\ u_2 + v_2 &= 2, & u_2 + v_3 &= 5, \\ u_2 + v_4 &= 6, & u_3 + v_4 &= 1. \end{aligned}$$

Поклавши $u_1 = 0$, знаходимо всі потенціали:

$$u_2 = 2, u_3 = -3, v_1 = 6, v_2 = 0, v_3 = 3, v_4 = 4.$$

Перевіримо виконання умови оптимальності для незаповнених комірок таблиці.

$$\Delta_{12} = 7, \Delta_{31} = 0, \Delta_{14} = 1, \Delta_{32} = 13, \Delta_{21} = -7, \Delta_{33} = 20.$$

Існує одна від'ємна оцінка $\Delta_{21} = -7$, тому опорний розв'язок не є оптимальним. Починаючи з комірки (2.1) здійснимо цикл перерахування і перейдемо до нового опорного плану (по циклу пересувається вантаж у розмірі 35 одиниць) (Дивимось у попередню таблицю).

Пункт	Споживач				Запас	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	6 40 -	7	3 60	5 +	100	$u_1 = 0$
A_2	1 35 +	2 80	5	6 35 -	150	$u_2 = -5$
A_3	3	10	20	1 50	50	$u_3 = -10$
Потреби	75	80	60	85	300	
	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 11$		

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 60 & 0 \\ 35 & 80 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad Z(X_2) = 875.$$

Потенціали нового опорного плану знаходимо з системи

$$u_1 + v_1 = 6, \quad u_1 + v_3 = 3,$$

$$u_2 + v_1 = 1, \quad u_2 + v_2 = 2,$$

$$u_2 + v_4 = 6, \quad u_3 + v_4 = 1.$$

Знаходимо всі потенціали:

$$u_1 = 0, u_2 = -5, u_3 = -10, v_1 = 6, v_2 = 7, v_3 = 3, v_4 = 11.$$

Отриманий опорний розв'язок X_2 (невироджений) знову не є оптимальним, оскільки серед оцінок є від'ємні, а саме для комірок (1.4) $\Delta_{14} = 5 - 11 = -6 < 0$.

Переходимо до нового опорного плану.

Пункт	Споживач				Запас	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	6 5	7	3 60	5 35	100	$u_1 = 0$
A_2	1 70	2 80	5	6	150	$u_2 = -5$
A_3	3	10	20	1 50	50	$u_3 = -4$
Потреби	75	80	60	85	300	
	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 5$		

Значення потенціалів наведено в останній таблиці.

$$m + n - 1 = 6;$$

$$\Delta_{12} = 0, \Delta_{23} = 7, \Delta_{24} = 6, \Delta_{31} = 1, \Delta_{32} = 7, \Delta_{33} = 21.$$

$$Z(X_3) = 665.$$

Всі оцінки Δ_{ij} вільних комірок додатні, тому одержаний опорний розв'язок є оптимальним

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix},$$

при цьому мінімальне значення цільової функції дорівнює 665 (у.г.о.).

Економічний зміст математичного результату: для отримання мінімальних витрат на перевезення у розмірі 665 (у.о.) з першого пункту A_1 треба доставити 1-ому, 3-ому, 4-ому споживачам відповідно 5, 60, 35 умовних одиниць деякого однорідного продукту; з другого пункту A_2 треба доставити 1-ому та 2-ому споживачам відповідно 70 і 80 умовних одиниць товару; з третього пункту A_3 треба доставити 4-ому споживачу 50 умовних одиниць товару.

Теоретичні запитання

1. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв'язку транспортної задачі.
4. Які властивості опорних планів транспортної задачі відомі?
5. Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?
6. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?
7. Які ви знаєте методи побудови опорного плану?
8. В чому полягає метод мінімальної вартості побудови опорного плану?
9. В чому полягає метод північно – східного кута побудови опорного плану?
10. Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?
11. Назвіть етапи розв'язування методом потенціалів.
12. Як обчислюють потенціали?
13. Яка умова оптимальності транспортної задачі?

Завдання для самостійної роботи

1). Розв'язати наведені далі транспортні задачі

$$a_i = (8; 10; 5);$$

$$b_j = (5; 5; 10);$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$a_i = (8; 7; 6);$$

$$b_j = (7; 10; 6);$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_i = (15; 10; 5; 20);$$

$$b_j = (10; 20; 15);$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

2). У незбалансованій транспортній задачі призначено плату за зберігання кожної одиниці невивезеної продукції від постачальників у розмірі відповідно 5, 4 та 3 ум. од.. Визначити оптимальний план задачі, якщо висунуто таку додаткову умову: уся продукція від другого постачальника має бути вивезена повністю для того, щоб звільнилося місце для нової продукції.

$$a_i = (20; 40; 30);$$

$$b_j = (30; 20; 20);$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розділ 8. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

8.1. Економічна і математична постановка задачі дробово–лінійного програмування

Розв'язуючи економічні задачі, часто як критерії оптимальності беруть рівень рентабельності, продуктивність праці тощо. Ці показники математично виражаються дробово-лінійними функціями. Загальну економіко-математичну модель у цьому разі записують так (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо через c_j прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції, тоді загальний прибуток можна виразити формулою: $\sum_{j=1}^n c_j x_j$; якщо d_j — витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції, то $\sum_{j=1}^n d_j x_j$ — загальні витрати на виробництво. У разі максимізації рівня рентабельності виробництва цільова функція має вигляд:

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \quad (8.1)$$

за умов виконання обмежень щодо використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (8.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (8.3)$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Очевидно, що задача (8.1)—(8.3) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, що дає змогу застосовувати для її розв’язування за певного модифікування вже відомі методи розв’язання задач лінійного програмування.

8.2. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

У разі, коли задача дробово-лінійного програмування містить лише дві змінні, для її розв'язування зручно скористатися графічним методом.

Нехай маємо таку задачу:

$$\max Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \quad (8.4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (8.5)$$

$$x_j \geq 0, (j=1, 2) \quad (8.6)$$

Спочатку, як і для звичайної задачі лінійного програмування будуємо геометричне місце точок системи нерівностей (8.5), що визначає деякий багатокутник допустимих розв'язків.

Допустимо, що $d_1x_1 + d_2x_2 > 0$, і цільова функція набуває деякого значення:

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = Z.$$

Після елементарних перетворень дістанемо:

$$(c_1 - Zd_1)x_1 + (c_2 - Zd_2)x_2 = 0$$

або

$$x_2 = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2} x_1 \quad (8.7)$$

Останнє рівняння описує пряму, що обертається навколо початку системи координат залежно від зміни значень x_1 та x_2 .

Розглянемо кутовий коефіцієнт нахилу прямої (8.7), що виражає цільову функцію:

$$k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2} \quad (8.8)$$

Отже, кутовий коефіцієнт являє собою функцію від Z . Для визначення умов зростання (спадання) функції (8) дослідимо зміну знака її похідної:

$$\begin{aligned} k'(Z) &= -\frac{(c_1 - Zd_1)'(c_2 - Zd_2) - (c_2 - Zd_2)'(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} = \\ &= -\frac{-d_1(c_2 - Zd_2) + d_2(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} = -\frac{-d_1c_2 + Zd_1d_2 + d_2c_1 - Zd_1d_2}{(c_2 - Zd_2)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Використовуючи формулу (8.9), можна встановити правила пошуку максимального (мінімального) значення цільової функції:

$$1) \quad \text{якщо} \quad k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} > 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) > 0, \quad \text{то функція (8.8) є}$$

зростаючою, і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий

коефіцієнт нахилу прямої (8.7) також збільшується. Тобто у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) > 0$, для відшукування точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку проти годинникової стрілки;

$$2) \quad \text{якщо} \quad k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} < 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) < 0, \quad \text{то функція (8.8) є}$$

спадною і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (8.7) буде зменшуватись. Тому у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) < 0$, для відшукування точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

При розв'язуванні задачі дробово-лінійного програмування графічним методом можливі такі випадки:

багатокутник розв'язків задачі обмежений і максимальне та мінімальне значення досягаються у його кутових точках;

багатокутник розв'язків задачі необмежений, однак існують кутові точки, в яких досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції;

багатокутник розв'язків задачі необмежений і досягається лише один із екстремумів;

багатокутник розв'язків задачі необмежений, точки екстремумів визначити неможливо.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$\max(\min) Z = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2}$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо на площині область допустимих розв'язків задачі. Маємо трикутник ABC (Рисунок 8.1).

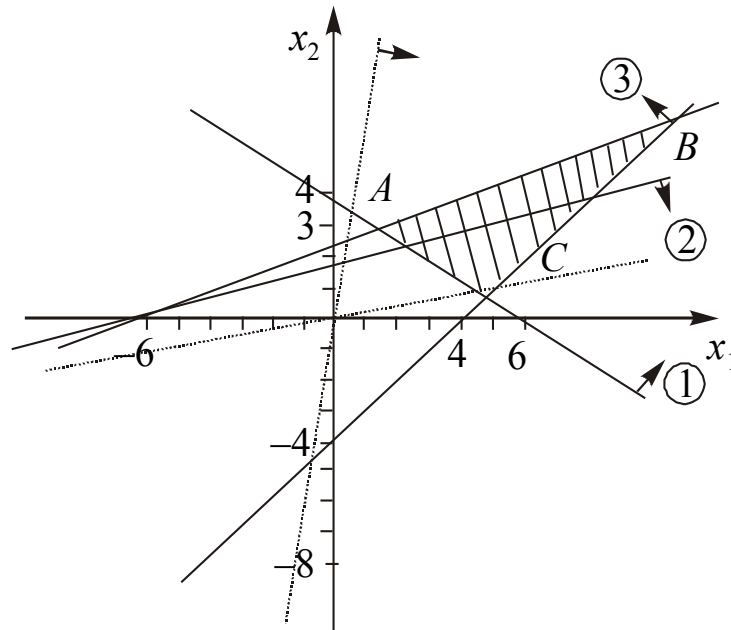


Рис. 8.1

Цільова функція задачі являє собою пряму, що обертається навколо початку системи координат (на рис. 1 позначена пунктиром). Отже, залежно від напрямку обертання точками максимуму та мінімуму будуть A і C .

Скористаємося правилами визначення максимального та мінімального значень цільової функції. Перевіримо умову

$$(d_1c_2 - d_2c_1) = (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5) = -9 < 0,$$

тобто для будь-якого значення Z функція $k'(Z)$ є спадною, отже, зі зростанням Z кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію,

зменшуватиметься, а тому відповідну пряму потрібно обертати навколо початку координат за годинниковою стрілкою.

Виконуючи зазначений порядок дій, маємо: C — точка максимуму, а точка A є точкою мінімуму цієї задачі.

8.3. Розв'язування дробово-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування

Нехай потрібно розв'язати задачу (8.1)—(8.3).

Позначимо

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = y_0$$

і введемо заміну змінних $y_j = y_0 x_j$ ($j = \overline{1, n}$). Тоді цільова функція (8.1) матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j y_0 = \sum_{j=1}^n c_j y_j .$$

Отримали цільову функцію, що виражена лінійною залежністю.

Оскільки $y_j = y_0 x_j$ ($j = \overline{1, n}$), то звідси маємо: $x_j = \frac{y_j}{y_0}$. Підставимо виражені через нові змінні значення x_j в систему обмежень (8.2):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}).\end{aligned}$$

Крім того, з початкової умови

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = y_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n d_j x_j}{1} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j x_j y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1.$$

Умова (8.3) стосовно невід'ємності змінних набуває вигляду:

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 \geq 0.$$

Виконані перетворення приводять до такої моделі задачі:

$$\begin{aligned}\max Z &= \sum_{j=1}^n c_j y_j \\ &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1. \end{cases} \\ &y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 \geq 0.\end{aligned}$$

Отримали звичайну задачу лінійного програмування, яку можна розв'язувати симплексним методом.

Допустимо, що оптимальний розв'язок останньої задачі існує і позначається:

$$Y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

Оптимальні значення початкової задачі (8.1)—(8.3) визначають за формулою:

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Приклад 2. Сільськогосподарське акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю, яке розміщене у Лісостепу України, бажає оптимізувати структуру виробництва. Критерієм оптимальності вибрали максимізацію рівня рентабельності як відношення прибутку до собівартості. У таблиці маємо дані про види діяльності, якими керівництво товариства передбачає займатися.

Показник	Напрямок виробництва							
	озима пшениця	цукрові буряки	корови (продуктивність, кг)				кормові культур и	ресурс
			5000	4500	4000	3500		
Урожайність, т/га	4	35	—	—	—	—	6	—
Собівартість, грн/т	600	250	600	700	800	900	200	—
Ціна, грн/т	800	300	1000	1000	1000	1000	—	—
Вихід кормів, т кор. од./га	4,8	2,0	—	—	—	—	6	—
Затрати трудових ресурсів, людино- днів/га (гол.)	4	25	6	6	6	6	3	26 000
Затрати механізованої праці, людино-днів/га (гол.)	2	8	3	3	3	3	2	11 000
Частка корів	—	—	0,1	0,2	0,3	0,4	—	—
Потреба у кормах, т кор. од./гол.	—	—	5	4,7	4,4	4,1	—	—

Акціонерне товариство має 2500 га землі. Для виготовлення кормів передбачається використовувати 20 % урожаю озимої пшениці та 30 % — цукрових буряків.

Знайти оптимальну структуру виробництва.

Розв'язання. Введемо позначення:

x_1 — площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — площа посіву цукрових буряків, га;

x_3 — площа посіву кормових культур, га;

x_4 — кількість корів продуктивністю 5000 кг/рік;

x_5 — кількість корів продуктивністю 4500 кг/рік;

x_6 — кількість корів продуктивністю 4000 кг/рік;

x_7 — кількість корів продуктивністю 3500 кг/рік.

Запишемо критерій оптимальності:

$$\max Z = \frac{0,8 \cdot 800x_1 + 0,7 \cdot 1750x_2 + 2000x_4 + 1350x_5 + 800x_6 + 350x_7}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7}$$

за умов дотримання таких обмежень:

1. Обмеження щодо використання ресурсів:

а) використання землі:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2500 ;$$

б) використання живої праці:

$$4x_1 + 25x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 \leq 26000 ;$$

в) використання механізованої праці:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \leq 11000 .$$

2. Обмеження стосовно дотримання сівозмін:

а) посівна площа кормових культур має бути більшою або дорівнювати площі під озимою пшеницею:

$$x_3 \geq x_1;$$

б) посівна площа озимої пшениці має бути більша або дорівнювати площі під цукровими буряками:

$$x_1 \geq x_2.$$

3. Структура корів за продуктивністю:

а) балансове рівняння щодо поголів'я корів:

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8,$$

де x_8 — загальне поголів'я корів;

б) частка корів продуктивністю 5000 кг/рік:

$$x_4 \leq 0,1x_8;$$

в) частка корів продуктивністю 4500 кг/рік:

$$x_5 \leq 0,2x_8;$$

г) частка корів продуктивністю 4000 кг/рік:

$$x_6 \leq 0,3x_8;$$

д) частка корів продуктивністю 3500 кг/рік:

$$x_7 \leq 0,4x_8.$$

4. Забезпеченість корів кормами:

$$4,8 \cdot 0,2x_1 + 2 \cdot 0,3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 4,7x_5 - 4,4x_6 - 4,1x_7 \geq 0.$$

Невід'ємність змінних:

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,8}).$$

Щоб знайти розв'язок за цією моделлю, необхідно зробити відповідну заміну змінних. Нехай:

$$\frac{1}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7} = y_0$$

i $y_j = y_0 x_j$.

Тоді маємо таку лінійну економіко-математичну модель:

$$\max f = 640y_1 + 1225y_2 + 2000y_4 + 1350y_5 + 800y_6 + 350y_7$$

за умов:

$$1. y_1 + y_2 + y_3 - 2500y_0 \leq 0 ;$$

$$4y_1 + 25y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 6y_5 + 6y_6 + 6y_7 - 26000y_0 \leq 0 ;$$

$$2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 3y_7 - 11000y_0 \leq 0 .$$

$$2. y_3 - y_1 \geq 0;$$

$$y_1 - y_2 \geq 0.$$

$$3. y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8 = 0;$$

$$y_4 - 0,1y_8 \leq 0;$$

$$y_5 - 0,2y_8 \leq 0;$$

$$y_6 - 0,3y_8 \leq 0;$$

$$y_7 - 0,4y_8 \leq 0.$$

$$4. 4,8 \cdot 0,2y_1 + 2 \cdot 0,3y_2 + 6y_3 - 5y_4 - 4,7y_5 - 4,4y_6 - 4,1y_7 \geq 0 .$$

$$5. 2400y_1 + 8750y_2 + 1200y_3 + 3000y_4 + 3150y_5 + 3200y_6 + 3150y_7 = 1 .$$

$$6. y_j \geq 0 \quad (j = \overline{0,8}).$$

Розв'язавши задачу симплексним методом, отримаємо такий оптимальний

план: $Y^* = (y_j^*, j = \overline{0,8})$. Враховуючи, що $x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}$, $j = \overline{1,8}$ оптимальним планом

початкової задачі буде:

$$X^* (x_1^* = 1250; x_3^* = 1250; x_4^* = 198; x_5^* = 395; x_6^* = 593; x_7^* = 791),$$

причому значення цільової функції (рівень рентабельності виробництва) становить $Z = 0,23$, тобто 23 %.

Теоретичні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається дробово-лінійною?
2. Як можна дослідити цільову функцію дробово-лінійної задачі, щоб знайти графічно її екстремальні значення?
3. Як можна розв'язувати дробово-лінійну задачу, коли вона має тільки дві змінні?
4. Як розв'язується дробово-лінійна задача, коли вона має три і більше невідомих?

Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть графічно задачі дробово-лінійного програмування:

$$а) Z = \frac{7x_1 + 2x_2}{x_1 + 2x_2} \text{ за умов: } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 8; \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$б) Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{x_1 - x_2} \text{ за умов: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 2; \\ -6x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 9; \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 121 с.
2. Буреннікова О. В. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / Н. В. Буреннікова, О. В. Зелінська, І. М. Ушкаленко, Ю. Ю. Буренніков. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 121 с.
3. Козак Ю.Г. Математичне моделювання для економістів: бакалавр – магістр – доктор філософії (PhD): Навч. посібник / За ред. Ю. Г. Козак, В. М. Мацкул. – К.: Центр учбової літератури, 2017. – 252 с.
4. Григорків В.С. Моделювання економіки: підручник / В.С. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. – 360 с.
5. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. – 440 с.
6. Волонтир Л.О. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 404 с.
7. Ю.М. Бардачов Практикум з вищої математики. Ч. 2. / Бардачов Ю.М., Крючковський В.В., Цибуленко О.В., Матвієнко А.М., Моїсеєнко С.В., Чуйко Н.М., Белоус Л.Я. - Херсон: "ОЛДІ-плюс", 2014. - 416 с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Офіційний сайт праць міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/83574/00-TitlePages.pdf?sequence=1>

Навчальне електронне видання

Вигоднер Інна Валентинівна

Моїсеєнко Світлана Вікторівна

**ЕКОНОМІКО – МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ:
ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ
Навчальний посібник**

ISBN 978-617-8187-26-2 (електронне видання)



Підписано до видання 20.09.2024 р. Формат 60х84/8.

Гарнітура Times.

Ум. друк. арк. 17,32. Обл.-вид. арк. 18,62.

Замовлення №3109.

Видано з готового оригінал-макету у
Книжковому видавництві ФОП Вишемирський В.С.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи:

Серія ХС №48 від 14.04.2005 р.

Видано Управлінням у справах преси та інформації
73000, Україна, м. Херсон, вул. Соборна, 2.

Тел. +38(050)133-10-13

e-mail: printvvs@gmail.com