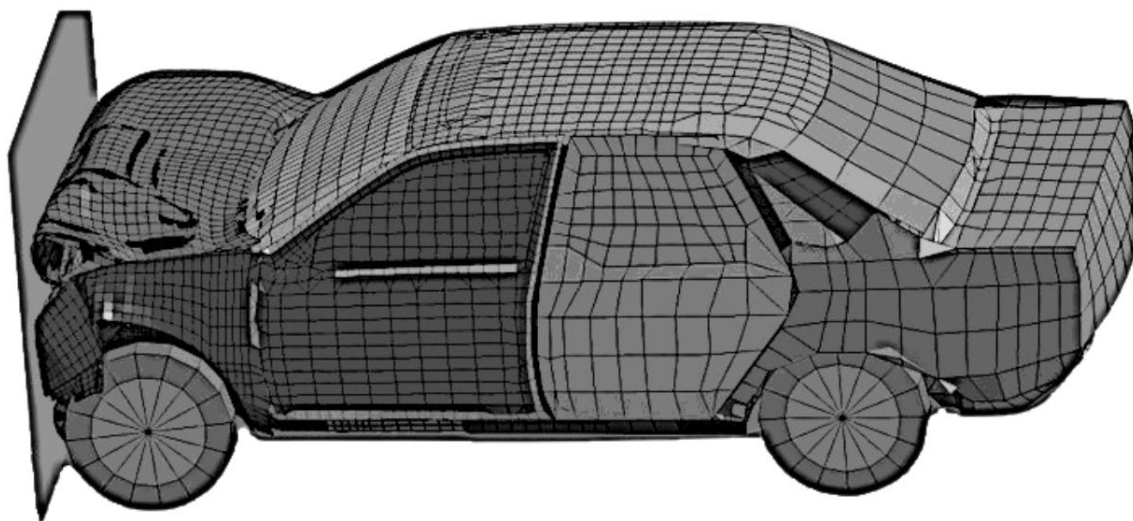


**Сергій Русанов
Олег Ключев
Владислав Проценко**

ХНТУ



**МАТЕМАТИЧНІ ТА
КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ
РОЗРАХУНКІВ
КУРС ЛЕКЦІЙ**

**Навчально-методичний посібник для
спеціальності «Автомобільний транспорт»**



Сергій РУСАНОВ
Олег КЛЮЄВ
Владислав ПРОЦЕНКО

**МАТЕМАТИЧНІ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКІВ.
КУРС ЛЕКЦІЙ**
**Навчально-методичний посібник для спеціальності «Автомобільний
транспорт»**

Хмельницький – Херсон 2025

Русанов С. А., Ключев О. І., Проценко В. О.

Р 88 Математичні та комп'ютерні засоби розрахунків. Курс лекцій : навчально-методичний посібник для спеціальності «Автомобільний транспорт» / С. А. Русанов, О. І. Ключев, В. О. Проценко — Херсон : Книжкове вид-во ФОП Вишемирський В.С., 2025. – 105 с.

ISBN 978-617-8187-55-2 (електронне видання)

Курс лекцій призначений для студентів технічних ЗВО, зокрема для спеціальності І8 (274) – Автомобільний транспорт.

Основний акцент зроблено на теорії технічних систем, методах математичного моделювання, зокрема моделюванні на макро- та мікрорівнях з прикладами застосування цих методів для автомобільних систем. Висвітлюються методи оцінки напружено-деформованого стану, моделі гідро- та газодинаміки, рівняння теплообміну на феноменологічному рівні. Висвітлюються також чисельні методи, які забезпечують практичну реалізацію складних математичних моделей.

Надаються відомості з комп'ютерних методів розрахунків, а саме з розрахунків у сучасних програмних середовищах і системах, що забезпечують повний цикл моделювання. До таких систем належать інтегровані середовища *CAD/CAE/CAM*, а також системи комп'ютерної математики, які надають інструменти для аналітичного й чисельного аналізу математичних моделей.

Рецензенти:

Смирнов І. В. – д.т.н., проф., проф. кафедри зварювального виробництва Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Носов П. С. – к.т.н., доцент, зав. каф. суднових комп'ютерних систем та мереж Херсонської державної морської академії.

Затверджено на засіданні кафедри транспортних систем і технічного сервісу, протокол № 11 від 18 червня 2025 року.

Затверджено на засіданні Вченої ради факультету інженерії та транспорту Херсонського національного технічного університету, протокол № 7 від 19 червня 2025 року.

Затверджено на засіданні Вченої ради Херсонського національного технічного університету, протокол № 1 від 28 серпня 2025 року.

УДК 004.896

ВСТУП

У сучасних умовах фахівець у багатьох технічних галузях, в тому числі в автомобільній галузі, має володіти не лише прикладними знаннями з конструкції, ремонту та експлуатації, а й глибоко розуміти принципи, на яких ґрунтується математичне й комп'ютерне моделювання технічних систем. Ці принципи закладені в саму суть сучасної технічної діяльності — вони формують наукове підґрунтя конструювання, ремонту та експлуатації техніки. Ці методи дозволяють прогнозувати поведінку систем у критичних режимах, визначати раціональні стратегії технічного обслуговування. Експлуатація сучасного автомобіля, особливо оснащеного складними електронними й мехатронними системами, неможлива без урахування алгоритмів керування, які ґрунтуються на результатах імітаційного та аналітичного моделювання. Будь-який конструктивний елемент автомобіля розробляється на основі аналізу напружено-деформованого стану, теплових процесів, динамічних навантажень — і всі ці явища описуються математичними моделями, що реалізуються через чисельні та комп'ютерні методи.

Цей курс лекцій має на меті у відповідності з програмою курсу надати базові та прикладні знання з математичних та комп'ютерних методів розрахунків, та охоплює низку питань, що об'єднані в єдину структуру

Основний акцент зроблено на теорії технічних систем, методах математичного моделювання, зокрема моделюванні на макро- та мікрорівнях з прикладами застосування цих методів для автомобільних систем. Висвітлюються методи оцінки напружено-деформованого стану, моделі гідро- та газодинаміки, рівняння теплообміну на феноменологічному рівні.

Висвітлюються також чисельні методи, які забезпечують практичну реалізацію складних математичних моделей. Серед них особливе місце займають методи інтерполяції та апроксимації, широко застосовувані в CAD-системах для побудови геометричних моделей; методи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, методи чисельного інтегрування та рішення диференціальних рівнянь, у тому числі в частинних похідних — з використанням методу скінченних різниць і методу скінченних елементів.

Не менш важливою є обізнаність у комп'ютерних методах розрахунків, а саме — у сучасних програмних середовищах і системах, що забезпечують повний цикл проєктування. До таких систем належать САПР, інтегровані середовища CAD/CAE/CAM, а також системи комп'ютерної математики, які надають інструменти для аналітичного й чисельного аналізу математичних моделей. Сукупність цих засобів дозволяє створювати високоточні моделі, виконувати оптимізацію конструкцій і технологічних процесів, скорочуючи витрати часу і ресурсів на всіх етапах моделювання.

Таким чином, розуміння математичних основ, знання сучасних чисельних методів і навички роботи з комп'ютерними інженерними системами є сьогодні обов'язковими для кожного фахівця, що працює в галузі автомобільної техніки. Запропонований курс лекцій покликаний сформувати ці знання і забезпечити практичну основу для їхнього подальшого застосування.

РОЗДІЛ I. МАТЕМАТИЧНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ ТА СИСТЕМ

ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ПОНЯТТЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

1.1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Процес *моделювання* полягає у створенні спрощеного уявлення про досліджуваний об'єкт і подальшому проведенні аналізу на цій моделі з метою отримання необхідної інформації про оригінальний об'єкт. *Модель* — це абстрактне або матеріальне представлення системи, що дозволяє вивчати її характеристики та поведінку в зручній формі. Така модель повинна зберігати суттєві властивості об'єкта і водночас бути зручною для проведення досліджень, економлячи ресурси, час та зусилля.

Залежно від характеру моделі, виділяють два основних типи моделювання: предметне та абстрактне. У разі *предметного моделювання* створюють фізичну модель, яка відображає головні властивості досліджуваного об'єкта. При цьому модель може мати іншу фізичну природу, наприклад, електричну схему для моделювання механічної або гідравлічної системи. Якщо ж модель має ту саму фізичну природу, що й об'єкт, тоді йдеться про *фізичне моделювання*.

Раніше фізичні моделі активно застосовувалися для випробувань складних технічних пристроїв. Виготовлялися макети чи дослідні зразки, які піддавалися тестуванню, з метою перевірки характеристик, визначення параметрів та відповідності технічним вимогам. Якщо результати виявлялися незадовільними, розробку доводилося повторювати з самого початку. Такий підхід вимагав значних фінансових і часових витрат.

На відміну від предметного, *абстрактне моделювання* використовує нематеріальні представлення, зокрема рівняння, діаграми, графи чи схеми. Одним із найбільш універсальних способів абстрактного представлення є *математичне моделювання*. Воно широко застосовується у науці та інженерії для опису та аналізу поведінки систем.

Математичне моделювання передбачає використання математичних виразів та об'єктів для опису функціонування технічної системи, оцінки її ефективності, пошуку оптимальних рішень. Завдяки цьому методу часто вдається уникнути необхідності створення фізичних прототипів, що дозволяє скоротити кількість випробувань і зменшити витрати при проєктуванні.

Математична модель — це система математичних понять і взаємозв'язків, що відображає ключові фізичні властивості технічного об'єкта. До математичних об'єктів можуть належати змінні, числа, множини, матриці, вектори тощо. Процес побудови моделі і її використання для аналізу та оптимізації технічних рішень називають *математичним моделюванням*. У практиці проєктування цей процес часто називають *обчислювальним експериментом*, який реалізують за допомогою комп'ютерної техніки.

Для реалізації обчислювального експерименту необхідно створити *алгоритм* — *послідовність операцій, яка визначає, як саме буде виконуватися обчислення*. Алгоритми, розроблені для потреб автоматизованого проєктування, визначають порядок дій, які забезпечують отримання проєктного рішення. Вони можуть бути представлені графічно у вигляді блок-схем, а також у вигляді текстових описів. Якщо алгоритм реалізується у формі, що зрозуміла комп'ютеру, він стає *програмною моделлю*, а відповідний процес — *програмним моделюванням*.

Завдяки використанню математичного моделювання можна *формалізувати процес проєктування*, що відкриває можливість для його автоматизації. Однією з ключових складових сучасних *систем автоматизованого проєктування* (САПР) є *математичне забезпечення*, яке включає моделі, алгоритми й методи, що забезпечують проєктні процедури.

Історично розвиток САПР пройшов кілька фаз. Початково комп'ютери використовувалися лише як інструменти для прискорення ручних обчислень. Згодом почалося використання моделей, які відображають поведінку об'єктів у процесі їх функціонування. Це дозволило значно підвищити точність аналізу, проводити оптимізацію рішень і уніфікувати підходи до проєктування. Вдалося створити методики формалізації моделей, які комп'ютер може будувати автоматично. Проте повністю автоматизувати процес проєктування неможливо — рішення, пов'язані з творчим пошуком, інтуїцією та досвідом інженера, залишаються поза межами формалізації.

Якість кінцевого виробу багато в чому залежить від рішень, прийнятих на етапі *функціонального проєктування*, коли визначаються ключові параметри майбутнього об'єкта. Помилки на цьому етапі можуть призвести до суттєвих витрат на етапі випробувань та доопрацювання. Відомо, що 50 – 70% дефектів продукції обумовлені проєктними помилками, 20 – 30% — технологічними, а лише 5 – 15% — помилками персоналу. Тому особливо важливо виявити й усунути слабкі місця вже на стадії розробки.

При моделюванні об'єктів зі змінною структурою або при синтезі нових конфігурацій виникає потреба часто змінювати математичну модель. Тому сучасне автоматизоване проєктування значну увагу приділяє методам побудови гнучких і адаптивних моделей.

На різних етапах проєктування застосовуються різні за складністю математичні моделі. Початкові моделі можуть бути доволі простими, однак у міру деталізації проєкту зростає і складність моделей. Це можуть бути системи диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, системи алгебраїчних рівнянь, логічні структури тощо. Чим складніша модель, тим більше часу і ресурсів потрібно для її аналізу. До того ж, великі системи рівнянь можуть мати низьку числову стабільність, що ускладнює досягнення точного результату.

Оскільки більшість інженерних задач мають оптимізаційний характер, розрахунки доводиться повторювати багаторазово. Завдання ускладнюються також великою кількістю параметрів і суперечливими критеріями ефективності. На завершальних етапах часто застосовують *ймовірнісні*

моделі, щоб оцінити роботу системи в умовах, наближених до реальної експлуатації.

1.2. ПОНЯТТЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ.

Процес створення нового технічного об'єкта є багатоступеневим і складним, де етап проектування відіграє ключову роль у реалізації ідеї та досягненні високих технічних характеристик майбутньої системи. Під технічним об'єктом розуміють *технічну систему*, тобто машину, механізм, інженерний комплекс, технологічний процес або будь-яку складову частину цих систем, яка виділяється в результаті структурної декомпозиції під час проектування.

Сучасні принципи проектування ґрунтуються на *системному підході*. У цьому підході технічний об'єкт розглядається як система, що складається з взаємопов'язаних елементів, які функціонують узгоджено з метою досягнення спільної цілі та взаємодіють із зовнішнім середовищем. Такий підхід дає змогу враховувати всі чинники, що впливають на роботу системи, і створювати об'єкти з високими експлуатаційними показниками.

Життєвий цикл технічного об'єкта — це сукупність взаємопов'язаних етапів, які охоплюють весь шлях об'єкта: від формування початкових вимог до завершення його експлуатації. Основними стадіями цього циклу є: проектування, виготовлення, впровадження та експлуатація. Кожна стадія включає певні етапи, процедури та операції. Важливо відзначити наявність *прямих і зворотних зв'язків* між стадіями. Наприклад, якість виконаного проекту визначає майбутню надійність і ефективність системи, а досвід експлуатації надає цінну інформацію для вдосконалення нових розробок.

Концепція технічного об'єкта — це сукупність вимог, які визначають його призначення і описують принципи функціонування системи.

Процес проектування також піддається *декомпозиції*, яка передбачає поділ системи на складові блоки залежно від ступеня абстракції, властивостей, структури об'єкта або організаційної схеми розподілу завдань між підрозділами. Такий підхід дозволяє замінити складну проектну задачу набором простіших підзадач, що вирішуються окремо з урахуванням взаємозв'язків. Кожна підзадача розв'язується з позиції *локальної оптимізації*, однак критерії оптимальності формуються так, щоб усі часткові рішення були спрямовані на досягнення загальної мети.

Ідея системності проявляється не лише у виявленні взаємодіючих компонентів системи, але й у погодженості їх цілей. Крім того, сам технічний об'єкт може бути частиною *надсистеми* — складнішого утворення, що включає інші об'єкти зовнішнього середовища, з якими він взаємодіє.

1.2.1. СТРУКТУРА Й ПАРАМЕТРИ ОБ'ЄКТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Структура — сукупність частин об'єкта та стійких зв'язків між ними, які забезпечують його цілісність і тотожність собі, тобто збереження

основних властивостей при різних зовнішніх та внутрішніх змінах. Таким чином, наприклад, *структура технічного об'єкта* — це впорядкована сукупність його складових елементів та зв'язків між ними. У межах системного підходу технічний об'єкт розглядається як система, що складається з взаємодіючих компонентів, упорядкованих у певну структуру.

Структура визначається як з якісної, так і з кількісної точки зору. *Якісний склад* елементів визначається їх фізичними властивостями, а *кількісний* — параметрами, тобто числовими характеристиками цих властивостей.

Робочі характеристики технічного об'єкта залежать від:

- його внутрішніх фізичних властивостей (тобто структури й параметрів елементів),
- а також від впливів зовнішнього середовища, які, у свою чергу, мають власні фізичні характеристики.

Параметр — це величина, що описує ту чи іншу властивість або режим функціонування об'єкта. Об'єктом у цьому контексті може виступати як окремий елемент системи, так і система в цілому.

Параметри можуть бути:

- *внутрішніми* — ті, що належать елементам технічної системи;
- *зовнішніми* — ті, що характеризують умови зовнішнього середовища;
- *вихідними* — ті, що відображають сумарні властивості або ефективність функціонування всієї системи.

До *вихідних параметрів* належать: продуктивність, швидкість роботи, вантажопідйомність, габарити, маса, надійність, ефективність перехідних процесів, матеріалоемність, енергоемність тощо.

Якщо структура технічного об'єкта вже задана, то його вихідні параметри залежать виключно від:

- параметрів складових елементів (*внутрішніх параметрів*),
- параметрів зовнішнього середовища (*зовнішніх параметрів*).

Наприклад, у випадку автомобіля:

- двигун і трансмісія — це елементи (їхні параметри — потужність, передаточні числа — є *внутрішніми*);
- властивості дороги (ухили, коефіцієнти зчеплення) й повітряного середовища (густина, вологість, швидкість та напрям вітру) — це *зовнішні параметри*;
- потужність, витрата пального чи швидкість — це *вихідні параметри* всієї технічної системи.

Треба зазначити, що під час переходу до іншого ієрархічного рівня проектування, внутрішні параметри можуть набути статусу вихідних, і навпаки. Це відображає взаємозв'язок між рівнями проєктної ієрархії та підтримує узгодженість параметрів у рамках системного підходу.

1.2.2. АВТОМАТИЗОВАНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Сучасна технологія *автоматизованого моделювання* ґрунтується на інтеграції комп'ютерних засобів проєктування, математичних моделей та інструментів візуалізації, що забезпечує точне й ефективне створення, аналіз і оптимізацію технічних систем. Однією з ключових платформ для реалізації такого підходу є *системи автоматизованого проєктування (САПР)*.

САПР дозволяють не лише створювати тривимірні моделі об'єктів, а й проводити їх багатофакторний аналіз — наприклад, міцнісний, термічний чи динамічний розрахунок. Завдяки цьому вдається ще на етапі проєктування передбачити поведінку системи в реальних умовах і уникнути помилок, які могли б з'явитися вже у фізичному прототипі.

Застосування САПР значно скорочує час розробки, підвищує точність моделей та забезпечує гнучкість при внесенні змін до конструкції. Технологія автоматизованого моделювання є невід'ємною складовою цифрового інжинірингу та відповідає вимогам сучасного високотехнологічного виробництва.

Основні компоненти технології передбачають реалізацію процедур *аналізу* та *синтезу*, які перебувають у взаємозв'язаній єдності.

Аналіз технічного об'єкта — це вивчення його фізичних характеристик, описаних за допомогою вихідних параметрів. У межах аналізу не створюються нові об'єкти, а досліджуються вже існуючі, зокрема з точки зору їх функціонування. Це здійснюється шляхом обчислювальних експериментів на основі побудованих *математичних моделей* відповідних технічних систем.

Синтез технічного об'єкта — це процес створення нових рішень, які здатні забезпечити виконання заданих функцій об'єкта відповідно до технічних вимог. Інакше кажучи, *синтез* — це формування принципово нових конструкцій або структур систем, які відповідають певним умовам функціонування.

Якщо під час синтезу здійснюється пошук найкращого з можливих варіантів за певними критеріями, то цей процес називається *оптимізацією*.

Виділяють два основні типи оптимізації:

- *параметрична оптимізація* — пошук оптимальних значень числових характеристик (параметрів) об'єкта;
- *структурна оптимізація* — визначення найефективнішої структури системи (тобто конфігурації елементів і зв'язків між ними).

Процес проєктування технічних систем має *декомпозиційний* та *ієрархічний* характер, що передбачає розв'язання широкого спектра завдань із різними цілями, моделями та підходами на кожному рівні чи стадії.

Однією з класифікацій технічних об'єктів у цьому контексті є поділ на:

- *дискретні об'єкти* — об'єкти, які описуються змінними, що приймають скінченні або лічильні множини значень. Відповідно, їх математичні моделі також є *дискретними*;

- *безперервні об'єкти* — об'єкти, у яких змінні мають континуальні множини значень (наприклад, довжина, температура, тиск у неперервному діапазоні). Їх математичні моделі є *безперервними*.

Таким чином, вибір методів *моделювання, аналізу та синтезу* значною мірою визначається природою технічного об'єкта — чи є він *дискретним*, чи *безперервним*, і які саме параметри необхідно оптимізувати.

ТЕМА 2. СПОСОБИ ПОБУДУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ. ВИМОГИ ДО МОДЕЛЕЙ

2.1. ВИХІДНІ ДАНІ ДО ЗАДАЧІ ПРОЄКТУВАННЯ

Технічне завдання на проєктування зазвичай подається у вигляді опису цілей та основних задач, пов'язаних зі створенням певного технічного об'єкта. Як зазначалося раніше, ці задачі мають *оптимізаційний характер*, тобто передбачають пошук найкращого рішення серед можливих варіантів.

Для реалізації проєктування конкретного об'єкта необхідно мати його *математичну модель*, а також чітке уявлення про те, що саме означає «найкраще» у контексті завдання. Це і є суть *постановки задачі проєктування*.

Результатом виконання всього процесу є *проектне рішення* — це опис структури об'єкта, значення його *вихідних параметрів* та *внутрішніх параметрів* (характеристик елементів об'єкта), які отримані з урахуванням впливу визначених *зовнішніх параметрів* (умов середовища).

У загальному вигляді, *задача проєктування* формулюється як математична задача: потрібно визначити структуру та внутрішні параметри об'єкта так, щоб деяка скалярна функція досягла екстремального значення (максимуму або мінімуму) за наявних зовнішніх обмежень. Таку функцію називають *цільовою функцією* або *функцією якості*. Вона є кількісною мірою ефективності або якості технічного об'єкта.

Оскільки ефективність функціонування об'єкта визначається його *вихідними параметрами*, саме вони виступають у ролі *критеріїв оптимальності*. Якщо об'єкт описується не одним, а кількома вихідними параметрами, задача набуває форми *багатокритеріальної оптимізації*.

Процес формулювання задачі проєктування зазвичай не має суворо формального вигляду й охоплює такі етапи:

- вибір *критеріїв оптимальності* та побудова *цільової функції*;
- визначення *керованих параметрів* (тобто таких, що підлягають оптимізації);
- встановлення *обмежень* на значення параметрів;
- нормування значень як *керованих*, так і *вихідних параметрів*.

2.1.1. КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Під час проєктування технічних об'єктів застосовуються різні типи математичних моделей, вибір яких визначається ступенем декомпозиції системи, стадією та етапом проєктного процесу. На ранніх стадіях, коли йдеться про концептуальне проєктування або техніко-економічне обґрунтування, використовують спрощені моделі — логіко-структурні, функціональні або інформаційні. Вони дозволяють отримати загальне уявлення про функціонування системи без глибокої деталізації.

При переході до наступних етапів — технічного та робочого проектування — виникає потреба в більш точних і деталізованих моделях. Тут застосовуються фізико-математичні, диференціальні, стохастичні або імітаційні моделі, що дозволяють враховувати динаміку, параметричну чутливість та фізичні характеристики окремих елементів.

При зміні ієрархічного рівня проектування змінюється і підхід до моделювання. На нижчих рівнях система розглядається з високим ступенем деталізації — моделі точно описують поведінку окремих компонентів. Проте при переході на вищий рівень ієрархії окремі елементи або підсистеми об'єднуються в єдину узагальнену структуру. У цьому випадку спрощують опис — використовують агреговані або інтегральні моделі, які дозволяють аналізувати загальні властивості системи без заглиблення в деталі кожного елементу. Такий підхід забезпечує керованість складними технічними системами та узгодженість рішень на різних рівнях проектування.

Таким чином, на нижчих рівнях застосовуються складніші математичні моделі, тоді як на вищих — спрощені, які можуть бути побудовані на основі *апроксимації* моделей нижчого рівня.

Рівняння математичної моделі встановлюють зв'язки між *фізичними величинами*, які визначають стан системи й не обмежуються лише вхідними, внутрішніми або зовнішніми параметрами. Залежно від типу системи, такими величинами можуть бути: швидкість і сила — для механіки; витрати і тиск — для гідравліки й пневматики; температура і тепловий потік — для теплових систем; струм і напруга — для електротехнічних систем.

Фазові змінні (або *фазові координати*) — це параметри, що описують стан технічного об'єкта в процесі його функціонування. Сукупність фазових змінних утворює *вектор стану*, який визначає точку у *фазовому просторі* — багатовимірному просторі, розмірність якого дорівнює кількості незалежних фазових координат.

У рівняннях моделі зазвичай використовують не всі фазові змінні, а лише необхідний їх мінімум, достатній для однозначного опису стану об'єкта. Такі змінні називають *базисними координатами*. Знаючи їх, можна обчислити всі інші фазові змінні системи.

До математичних моделей висуваються такі основні вимоги: *адекватність* (відповідність реальній поведінці об'єкта), *економічність* (мінімізація ресурсів для побудови й використання моделі) та *універсальність* (можливість застосування в різних умовах). Оскільки ці критерії часто суперечать один одному, для кожного конкретного об'єкта зазвичай створюється *унікальна математична модель*.

Залежно від рівня абстракції, застосованого для опису фізичних характеристик технічної системи, виділяють три основні ієрархічні рівні: *верхній* (метарівень), *середній* (макрорівень) і *нижній* (мікрорівень).

Метарівень охоплює початкові стадії проєктного процесу, зокрема формування технічної ідеї, прогнозування, пошук оптимальних рішень, створення концептуальних підходів і формування технічної пропозиції. На цьому етапі математичне моделювання базується на таких методах, як

морфологічний аналіз, теорія графів, математична логіка, теорія автоматичного регулювання, теорія масового обслуговування та теорія кінцевих автоматів.

Макрорівень передбачає розгляд об'єкта як динамічної системи із зосередженими параметрами. На цьому рівні застосовуються математичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, які описують динаміку об'єкта або його складових частин. Такі моделі використовують для визначення технічних параметрів об'єкта та його функціональних компонентів.

Мікрорівень передбачає опис об'єкта як суцільного середовища з параметрами, що змінюються у просторі та часі. На цьому рівні використовують диференціальні рівняння в частинних похідних, що дозволяє описати фізичні процеси всередині об'єкта з високою точністю. Мікрорівень зазвичай охоплює проєктування базових елементів — структурних складових системи, які не підлягають подальшому функціональному поділу (наприклад, рами, панелі, вали, корпусні деталі, фрикційні диски тощо). Проєктування таких елементів ґрунтується на аналізі складного напруженого стану. Базовий елемент розглядається як система, що включає множину однорідних за фізичною природою функціональних підсистем, які взаємодіють між собою та піддаються впливу зовнішнього середовища, включаючи інші елементи системи.

На кожному з ієрархічних рівнів застосовуються різноманітні типи математичних моделей:

- *детерміновані та стохастичні (імовірнісні),*
- *теоретичні й експериментальні,*
- *факторні,*
- *лінійні й нелінійні,*
- *динамічні та статичні,*
- *безперервні й дискретні,*
- *функціональні й структурні.*

За способом подання моделі класифікуються на такі форми:

- *інваріантна модель* — описується системою рівнянь (алгебраїчних або диференціальних), не прив'язаних до конкретного методу розв'язання;
- *алгоритмічна модель* — передбачає побудову послідовного обчислювального алгоритму на основі обраного чисельного методу розв'язання моделі;
- *аналітична модель* — формулює явні залежності між вхідними та вихідними параметрами. Вона ґрунтується на фізичних законах або отримується шляхом інтегрування диференціальних рівнянь. До цієї категорії також відносяться *регресійні моделі*, побудовані на основі обробки експериментальних даних;
- *графічна (схемна) модель* — подається у вигляді різного типу схем: *графів, еквівалентних схем, функціональних і кінематичних структур, алгоритмічних блок-схем, циклограм, діаграм* тощо. Важливою умовою для

ефективного використання таких моделей є наявність правил однозначного відображення графічних елементів у відповідні компоненти інваріантних моделей.

Серед *алгоритмічних моделей* особливе місце займають *імітаційні моделі*, призначені для відтворення фізичних або інформаційних процесів, що відбуваються в технічному об'єкті під впливом різноманітних факторів зовнішнього середовища. Такі моделі широко застосовуються для дослідження поведінки систем без необхідності фізичного експерименту.

Класифікація математичних моделей на *функціональні* та *структурні* зумовлена специфікою властивостей об'єкта, які вони відображають.

На відміну від функціональних, *структурні моделі* зосереджені виключно на побудові взаємозв'язків між елементами технічного об'єкта, не враховуючи особливості його функціонування. Їх основне призначення — розв'язання задач *структурного синтезу*. Параметри таких моделей описують ознаки конструктивних або функціональних елементів, що формують технічну систему. Ці параметри мають назву *морфологічних змінних*, які визначають відмінності між варіантами структури. Структурні моделі часто подаються у вигляді *таблиць*, *матриць* або *графів*. Особливо ефективними є *деревоподібні графи*, що дозволяють узагальнювати попередній досвід і враховувати існуючі аналоги, зокрема з патентної документації, а також гіпотетичні рішення. Такі моделі особливо актуальні на *метарівні*, де здійснюється вибір технічної концепції.

Безпосередньо *процеси функціонування* об'єкта описують *функціональні моделі*. Вони будуються у формі *систем рівнянь*, які враховують як структурні, так і функціональні характеристики системи. Ці моделі застосовуються на всіх рівнях ієрархії та на різних етапах проектування: від концептуального до конструкторського і технологічного. Безпосередньо:

- на метарівні функціональні моделі використовуються для *прогнозування* й оцінювання майбутніх сценаріїв;
- на макрорівні — для *вибору структури* та *оптимізації параметрів* системи;
- на мікрорівні — для *моделювання базових елементів* і *розрахунку несучих конструкцій* з метою досягнення оптимальних характеристик.

Залежно від методу побудови, функціональні моделі поділяють на *теоретичні* й *експериментальні*:

- *теоретичні моделі* формуються на основі відомих фізичних законів, що описують процеси в середині об'єкта;
- *експериментальні моделі* базуються на спостереженнях за поведінкою об'єкта, який розглядається як "*чорний ящик*". У цьому випадку об'єкт вивчається без попереднього аналізу внутрішніх механізмів, а тільки на основі реакції на зовнішні дії. Експерименти можуть бути:
 - *фізичними* — проводяться з використанням реального об'єкта або його фізичної моделі;

○ *обчислювальними* — здійснюються на основі теоретичної математичної моделі.

Під час побудови теоретичних моделей технічних об'єктів широко використовуються два основні підходи — *фізичний* і *формальний*, кожен з яких має своє призначення, рівень абстракції та сферу застосування.

Фізичний підхід базується на глибокому аналізі реальних властивостей об'єкта або явища. У цьому випадку модель створюється з урахуванням фізичної природи процесів — наприклад, механічних, теплових, електричних чи гідравлічних. Такий підхід дозволяє будувати моделі, які відображають справжні причинно-наслідкові зв'язки в системі. Фізичні моделі, як правило, мають форму систем рівнянь (часто — диференціальних), що описують поведінку об'єкта на основі законів фізики. Цей метод дає змогу отримати точні, кількісно обґрунтовані результати, проте вимагає достовірних даних про параметри системи та її середовище.

Формальний підхід, на відміну від фізичного, не вимагає обов'язкового врахування природи процесів. Він орієнтується на опис логічної структури, функціональних взаємозв'язків або інформаційних потоків у системі. У межах цього підходу використовують абстрактні математичні конструкції: граfi, матриці, логічні схеми, булеві функції тощо. Формальні моделі є особливо корисними на ранніх стадіях проєктування, коли важливо зрозуміти загальну структуру та логіку функціонування об'єкта без детального фізичного аналізу. Крім того, вони зручні для автоматизованого аналізу, алгоритмізації та впровадження в програмне забезпечення. Особливе значення в цьому контексті має *варіаційний принцип Гамільтона (принцип найменшої дії)*, що лежить в основі побудови *формальних математичних моделей*. Для динамічних систем із зосередженими параметрами цей принцип приводить до *рівнянь Лагранжа другого роду*, які широко використовуються в механіці, електродинаміці, системному аналізі тощо.

До формальних моделей належать *експериментальні математичні моделі* і мають обмежений характер. Їх особливістю є те, що вони не враховують повного комплексу фізичних властивостей елементів технічної системи. Натомість вони встановлюють *емпіричний зв'язок* між окремими параметрами, що виявляється в ході експерименту. Такі параметри, які змінюються в процесі дослідження, називають *факторами*.

Адекватність експериментальних моделей обмежується *факторним простором*, тобто діапазоном значень змінних, в межах якого проводився експеримент. Це означає, що отримані моделі не можна безпосередньо поширювати на весь спектр можливих умов функціонування системи. Вони описують поведінку об'єкта лише в *локальній області факторного простору*.

На відміну від експериментальних, *фізичні закони* мають загальний характер і відображають фундаментальні закономірності функціонування як усієї системи, так і її окремих компонентів. Тому експериментальні моделі не можуть розглядатися як рівнозначні фізичним законам.

Водночас методи, що застосовуються для побудови експериментальних моделей — зокрема, *метод статистичних випробувань, регресійний аналіз,*

кореляційний аналіз, методи планування експерименту тощо — відіграють важливу роль у перевірці наукових гіпотез, оптимізації параметрів та дослідженні складних об'єктів.

Окремою класифікацією функціональних математичних моделей є розділення на *лінійні* та *нелінійні*.

Лінійні моделі містять лише лінійні функції відносно фазових змінних (координат стану) та їх похідних. Вони зручні для аналітичного розв'язання і часто використовуються як апроксимації для спрощеного аналізу складних систем.

Нелінійні моделі включають нелінійні залежності фазових змінних або їх похідних. Оскільки більшість реальних технічних об'єктів мають нелінійні характеристики, саме такі моделі є більш точним відображенням фізичних процесів, хоча і потребують складніших чисельних методів аналізу.

Детерміновані моделі переважають у більшості проєктних процедур. Вони описують системи, в яких кожному конкретному зовнішньому впливу однозначно відповідає певна реакція системи. Це протилежність *імовірнісним моделям*, які враховують стохастичні впливи та невизначеність.

У рамках *обчислювального експерименту* з використанням детермінованих моделей широко застосовуються так звані *тестові впливи* — стандартні форми вхідного сигналу, що дозволяють оцінити динамічні властивості системи. До них належать:

- *східчасті сигнали,*
- *імпульсні впливи,*
- *гармонійні коливання,*
- *експоненціальні та кусочно-лінійні функції.*

Ці впливи застосовуються з метою стандартизованої перевірки реакції технічного об'єкта та подальшого аналізу його характеристик при проєктуванні.

2.1.2. ОБ'ЄКТИ МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ

Як було зазначено раніше, на *макрорівні* відбувається моделювання складних технічних систем. У цьому контексті *об'єкт проєктування* розглядається як комплекс взаємозалежних елементів, що взаємодіють між собою. На відміну від *мікрорівня*, де досліджуються окремі складові технічного об'єкта на кшталт шестерень, маховиків, і т.д., моделі макрорівня охоплюють цілісні системи з неоднорідною структурою, складеною з елементів нижчого ієрархічного рівня.

Для моделювання на мікрорівні застосовуються рівняння з *частинними похідними*, які описують зміну параметрів у просторі та часі. Завдяки цьому вдається досягти високої точності в зображенні фізичних процесів усередині об'єкта. Універсальність таких моделей дозволяє їх використовувати в різних галузях — від теплопровідності до механіки суцільних середовищ. Однак їх складність зумовлює потребу у значних обчислювальних потужностях, навіть якщо йдеться лише про аналіз одного компонента.

Якщо кожен складову макрорівневої системи розглядати як *суцільне середовище* або *динамічну систему з розподіленими параметрами*, повноцінний аналіз структури й параметрів системи стає практично неможливим. У зв'язку з цим у проектуванні доцільно використовувати *спрощені моделі*, які отримують шляхом *апроксимації* розподілених моделей, заснованої на припущеннях щодо фізичних і структурних характеристик об'єкта.

Результатом такого підходу є *динамічна система із зосередженими параметрами* — модель, у якій система дискретизується в просторі на окремі *дискретні елементи* з фіксованими усередненими параметрами, що замінюють безперервне середовище.

Кожен *дискретний елемент* — це умовно виділена частина системи, яка в загальному випадку характеризується *інерційними, пружними або дисипативними властивостями*. Розрізняють:

- *простий елемент* — має лише одну з перелічених властивостей;
- *складний елемент* — поєднує дві або більше фізичних характеристик.

Отже, при моделюванні на макрорівні об'єкти проектування розглядаються як системи, що складаються з множини взаємодіючих дискретних компонентів. Основною метою проектування є визначення оптимальної структури та параметрів такої системи з урахуванням умов зовнішнього середовища та заданих технічних вимог.

2.1.2.1. МАКРОРІВНЕВІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ

Формування *математичної моделі* технічного об'єкта зазвичай починається зі створення відповідної динамічної структури. Під *динамічною моделлю* розуміють умовне графічне зображення, яке відображає основні фізичні характеристики об'єкта та його взаємодію із зовнішніми факторами. У процесі побудови такої моделі враховують лише ті фізичні властивості й зовнішні впливи, які можуть суттєво вплинути на достовірність результатів моделювання. Це дозволяє зберігати баланс між складністю математичного опису та точністю моделі, уникаючи зайвого перевантаження інформацією. Водночас модель повинна залишатися адекватною, тобто здатною точно передавати реальну поведінку системи в заданих умовах.

У рамках мікрорівневих моделей часто відсутня потреба у складних динамічних конструкціях. На цьому рівні модель зазвичай обмежується геометричним описом області, через яку об'єкт взаємодіє з навколишнім середовищем. У деяких випадках достатньо словесного пояснення, яке спрощує подання і не вимагає детального графічного оформлення. Розробка повноцінної динамічної моделі стає необхідною переважно тоді, коли потрібно сформулювати алгоритмічну модель для подальшого комп'ютерного аналізу.

На відміну від мікрорівня, на макрорівні побудова динамічної моделі вважається обов'язковим етапом моделювання. Це пояснюється тим, що

технічні об'єкти на цьому рівні мають складну структуру і розглядаються як системи з набором взаємопов'язаних *дискретних елементів*. Рівень складності моделі визначається ступенем узагальнення та точністю, з якою необхідно відтворити фізичні характеристики системи.

Для виокремлення дискретних елементів із *суцільного середовища* на макрорівні застосовуються різноманітні методи, зокрема:

- метод *сіток* (наприклад, сіткова дискретизація),
- метод *функціонально завершених елементів*,
- метод *зосереджених мас*.

Методи моделювання, що передбачають побудову сіткових структур, здебільшого поділяють на два основних підходи — *метод скінченних різниць* і *метод скінченних елементів*. Ці методи широко застосовуються для створення алгоритмічних моделей на мікрорівні, особливо при алгебраїзації диференціальних рівнянь у частинних похідних. Утім, подібні методи можуть бути адаптовані й для макрорівня, коли необхідно виконати узагальнення або апроксимацію мікромоделей для складніших систем.

Інший підхід — *метод функціонально завершених елементів* — базується на виокремленні в межах технічного об'єкта типових конструктивних компонентів, кожен з яких виконує конкретне завдання. Наприклад, у гідромеханічній системі такими елементами можуть бути насос, зворотний клапан, дросель і т.д.. Завдяки використанню бібліотеки математичних описів таких елементів і знанню загальної конфігурації системи, можна сформувати цілісну модель об'єкта без потреби моделювати всю систему з нуля.

Метод зосереджених мас є найбільш поширеним методом для побудови динамічних моделей. Його доцільно застосовувати в тих випадках, коли система характеризується дискретним спектром власних частот, що часто спостерігається у складних технічних об'єктах з нерівномірним розподілом маси. Наприклад, у конструкції автомобіля основна маса сконцентрована в таких елементах, як маховик двигуна, важкі зубчасті колеса трансмісії, барабан стоянкового гальма та масивні колеса. У той же час сполучні вузли — вали, муфти, карданні передачі — мають меншу масу та габарити, але проявляють значні пружні властивості. Це дозволяє ефективно описувати динамічні процеси системи, розділяючи її на зосереджені інерційні та пружні компоненти.

Метод зосереджених мас передбачає абстрактне представлення окремих частин об'єкта у вигляді *матеріальних субстанцій*, яким надаються визначені фізичні характеристики. Основними компонентами цієї моделі є:

- *зосереджені маси*, що відображають інерційні властивості відповідних частин системи,
- *ідеалізовані елементи без маси*, які моделюють пружні та дисипативні взаємодії між зосередженими масами.

Із самої назви методу зрозуміло, що його суть полягає в моделюванні систем, де *інерційні властивості визначаються масою елементів*.

Зосереджені маси — це елементи, що мають Інша назва — *інерційні елементи*. Кількість таких мас у динамічній моделі відповідає *числу ступенів вільності системи*.

Після відокремлення зосереджених мас необхідно встановити зв'язки між ними. Зосереджені маси взаємодіють через такі види елементів:

- *пружні,*
- *дисипативні,*
- *фрикційні,*
- *трансформаторні.*

Пружні елементи імітують пружні властивості системи. Вони здатні накопичувати *потенційну енергію*, що повертається в систему при зворотному русі.

Дисипативні елементи моделюють процеси втрати енергії, зокрема через внутрішнє тертя. Ці втрати залежать від відносної швидкості між масами або між масою й зовнішнім середовищем (наприклад, у випадку руху рідини в трубопроводі). Їхня роль полягає в *розсіюванні енергії* в системі.

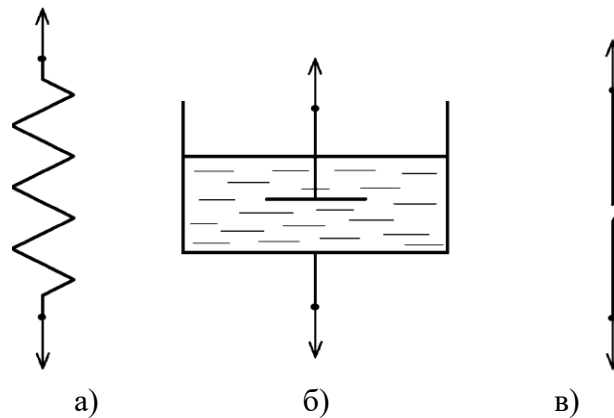


Рис. 2.1. Умовні позначення пружного (а), дисипативного (б) та фрікційного (в) елементів.

Фрикційні елементи відображають механізми тертя, що притаманні конкретним конструктивним вузлам технічного об'єкта.

Що стосується *трансформаторних елементів*, то їх робота зазвичай пов'язана з передачею або зміною величин у системі. У складних випадках, де відбувається *перетворення одного виду енергії в інший*, необхідно створювати більш точні математичні моделі. Але часто розглядаються ситуації, де внутрішні процеси трансформатора спрощують, враховуючи лише *пропорційний зв'язок* між вхідними та вихідними фазовими змінними без зміни виду енергії.

Стан кожної зосередженої маси в системі описується за допомогою *фазових координат поточного типу*. До них належать *геометричні координати* та *перші похідні за часом*, які дозволяють визначити як положення маси у фазовому просторі, так і швидкість її переміщення.

Змінні типу потенціалу використовуються для опису взаємодії між окремими елементами динамічної моделі технічного об'єкта.

У якості *фазових координат типу потоку* обирають *узагальнені координати*. Їх кількість відповідає числу ступенів вільності системи. В загальному випадку не всі введені змінні типу потоку є незалежними. Натомість *змінні типу потенціалу* завжди є *залежними* і визначаються через поточні змінні.

Вибір напрямків фазових координат потоку виконується таким чином, щоб вони відповідали додатньому напрямку передавання енергії від зовнішніх джерел через систему. При цьому враховуються також *обмеження* (або *зв'язки*), які накладає зовнішнє середовище на можливість переміщення окремих мас. Всі ці напрямки мають бути чітко візуалізовані в структурі динамічної моделі.

Зв'язки — це обмеження на зміну геометричних координат і швидкостей руху зосереджених мас у системі. Їх поділяють за різними ознаками:

- *геометричні (позиційні) та кінематичні,*
- *утримуючі та неутримуючі (віртуальні),*
- *стаціонарні та нестаціонарні,*
- *голономні та неголономні.*

Рівняння зв'язків використовують для формалізації цих обмежень. Кожне таке рівняння зменшує кількість незалежних координат, фактично усуваючи одну ступінь вільності в системі.

У разі, якщо під час моделювання обирають лише *незалежні фазові координати*, які враховують лише допустимі переміщення зосереджених мас (визначені позиційними утримуючими зв'язками), потреба у складанні рівнянь зв'язків зникає. За такої умови складний рух твердого тіла можна представити у вигляді *сукупності поступальних та обертальних переміщень*.

У випадках, коли система містить *віртуальні або неголономні зв'язки*, рівняння, що описують ці зв'язки, включаються безпосередньо до математичної моделі.

Для ідентифікації окремих елементів у динамічних моделях зазвичай використовують *графічні позначення*, подібні до тих, що застосовуються в кінематичних і функціональних схемах.

2.1.2.2. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА МАКРОРІВНІ

Вихідне математичне представлення процесів, що відбуваються в об'єктах на *макрорівні*, подається у вигляді *систем звичайних диференціальних та алгебраїчних рівнянь*. Оскільки аналітичні розв'язки таких систем у задачах прикладного характеру (через їх високу розмірність та складність) практично недосяжні, на практиці переважно застосовують *алгоритмічні моделі*.

Далі подано узагальнений підхід до побудови таких моделей на макрорівні, який є універсальним і застосовним до більшості технічних систем.

В основі формування математичних моделей об'єктів на макрорівні лежать *компонентні* та *топологічні рівняння*.

Компонентними рівняннями називають математичні вирази, які описують властивості окремих елементів (компонентів) системи. Вони становлять *математичну модель елемента* (ММЕ).

Топологічні рівняння відображають структурні взаємозв'язки між елементами у межах модельованої системи.

У сукупності компонентні й топологічні рівняння утворюють *вихідну математичну модель системи* (ММС).

Варто зазначити, що хоча ці рівняння для різних фізичних систем (електричних, механічних, гідравлічних, теплових тощо) описують різні фізичні властивості, вони можуть мати *однакову формальну структуру*. Це дозволяє говорити про *формальні аналогії* між компонентними й топологічними рівняннями в різних галузях техніки.

Наявність таких аналогій має важливе практичне значення: більшість алгоритмів побудови й аналізу моделей, реалізованих у системах автоматизованого проектування (САПР), є *інваріантними* щодо предметної області. Це дає змогу використовувати єдиний математичний апарат для моделювання технічних систем, що складаються з фізично різнорідних підсистем, зберігаючи цілісність і уніфікованість підходу.

Найчастіше компонентні рівняння мають вигляд

$$F_k\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}, \mathbf{U}, t\right) = 0, \quad (2.1)$$

топологічні рівняння

$$F_T(\mathbf{U}) = 0 \quad (2.2)$$

де $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ вектор фазових змінних, t — час.

Фазові змінні умовно поділяють на два типи: *типу потенціалу* (наприклад, напруга) та *типу потоку* (наприклад, струм). Зв'язок між змінними різного типу, що належать одному й тому самому компоненту системи, описується *компонентним рівнянням*. Водночас топологічні рівняння відображають взаємозв'язки між фазовими змінними одного типу, але в межах різних компонентів системи.

Математичні моделі можуть бути подані як у формі рівнянь, так і у вигляді графічних зображень — за умови існування взаємно однозначної відповідності між ними. Одним із поширених способів графічного представлення є еквівалентна схема. Далі буде наведено приклади як компонентних, так і топологічних рівнянь для різноманітних типів систем.

2.1.2.3. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: МЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ

У механічних системах фазовими змінними є сили та швидкості. Існують дві можливі електромеханічні аналогії, однак у подальшому розглядається варіант, де швидкість відноситься до фазових змінних типу потенціалу, а сила — до фазових змінних типу потоку. Через умовний характер таких аналогій можна використовувати і протилежний підхід.

Компонентне рівняння, яке описує інерційні властивості тіл, базується на другому законі Ньютона і має вигляд:

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (2.3)$$

де F — сила; m — маса; v — поступальна швидкість.

Також компонентне рівняння описує пружні властивості тіл, що випливає з закону Гука. В одномірному випадку це:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.4)$$

де σ — механічна напружка; E — модуль пружності; $\varepsilon = \Delta l / l$ — відносна деформація; Δl — зміна довжини l пружного тіла під впливом G . З огляду на те, що $G = F / S$, де F — сила, S — площа поперечного перерізу тіла, і диференціюючи (2.4), маємо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{SE}{l} \frac{d(\Delta l)}{dt},$$

або

$$\frac{dF}{dt} = cv, \quad (2.5)$$

де $c = SE / l$ — жорсткість, $v = d(\Delta l) / dt$ — швидкість.

Дисипативні характеристики механічних систем твердих тіл описуються співвідношеннями, які виражають залежність між силою тертя та швидкістю відносного руху тіл. У таких рівняннях не враховуються похідні ні від сили, ні від швидкості.

До топологічних рівнянь у механіці належать два фундаментальні закони. Перший — це закон рівноваги сил, що базується на принципі Даламбера: алгебраїчна сума всіх сил, включаючи силу інерції, що діють на тіло, дорівнює нулю. Другий — це закон швидкостей, який передбачає, що сумарна величина відносної, переносної та абсолютної швидкості в системі повинна дорівнювати нулю.

У механічних системах обертального типу використовуються ті ж математичні принципи, що й у поступальних, але з адаптацією: лінійні

швидкості замінюються кутовими, сили — моментами сил, маса — моментом інерції, а жорсткість — крутильною жорсткістю.

Важливо враховувати ключову відмінність між електричними та механічними системами: електричні, як правило, моделюються в одному вимірі, тоді як механічні процеси потребують просторового — дво- або тривимірного опису. У зв'язку з цим для тривимірного моделювання механічних систем необхідно застосовувати векторні фазові змінні, що містять шість компонентів, які відповідають шістьом ступеням свободи — трьом поступальним і трьом обертальним.

Попри це, структурні аналогії залишаються чинними, якщо розглядати проекції сил і швидкостей на координатні осі. При створенні графічних моделей таких систем зазвичай використовують шість еквівалентних схем — по три для кожного типу руху: поступального та обертального.

2.1.2.4. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: ГІДРАВЛІЧНІ СИСТЕМИ

У гідравлічних системах фазовими змінними вважаються тиск і витрата. Подібно до вже розглянутих випадків, компонентні рівняння характеризують здатність рідини до накопичення або розсіювання енергії.

Поведінку рідини на окремій ділянці трубопроводу довжиною Δl можна описати за допомогою відповідних компонентних рівнянь, використовуючи форму рівняння Нав'є-Стокса, застосовну для ламінарного потоку рідини:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu u,$$

де ρ — густина рідини; u — швидкість; p — тиск; μ — коефіцієнт лінеаризованого в'язкого тертя. Враховуючи, що, $u = Q/S$ де Q — об'ємна витрата; S — площа поперечного перерізу трубопроводу, та, замінюючи просторову похідну відношенням кінцевих різностей, маємо:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{S \Delta p}{\Delta l \rho} - \frac{2\mu Q}{\rho},$$

або

$$\Delta p = L_{\Gamma} \frac{\partial Q}{\partial t} + R_{\Gamma} Q, \quad (2.6)$$

де Δp — падіння тиску на розглянутій ділянці трубопроводу; $L_{\Gamma} = \Delta l \rho / S$ — гідравлічна індуктивність, що відображає інерційні властивості рідини; $R_{\Gamma} = 2\mu \Delta l / S$ — гідравлічний опір, що відображає в'язке тертя.

Стискуваність рідини моделюється компонентним рівнянням, сформульованим на основі закону Гука:

$$\Delta p = \frac{E \Delta l}{l} \quad (2.7)$$

Диференціюючи (2.7) і, враховуючі те, що об'ємна витрата Q зв'язана зі швидкістю $u = \partial(\Delta l) / \partial t$ співвідношенням $Q = uS$, одержуємо:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = C_r Q,$$

де $C_r = E / Sl$ — гідравлічна ємність.

2.1.2.5. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: АНАЛІЗ ПЛАВНОСТІ ХОДУ АВТОМОБІЛЯ

Побудуємо, використовуючи метод зосереджених мас, динамічну модель для аналізу плавності ходу автомобіля.

Через нерівності дорожнього покриття автомобіль під час руху зазнає коливань кузова, а також вібрації його механізмів і деталей. Щоб забезпечити комфорт водієві і пасажиром, зберегти вантаж у цілості та підтримати коректну роботу систем автомобіля, застосовують систему віброзахисту — підвіску. Ця система складається з пружних елементів і амортизаторів. Енергія поштовхів і ударів, що виникають через нерівності дороги, накопичується у вигляді потенційної енергії деформації пружних складових підвіски, що забезпечує м'які коливальні рухи кузова. Амортизатори, в свою чергу, поглинають і розсіюють цю енергію, суттєво знижуючи амплітуди резонансних коливань. Пружні та дисипативні властивості мають також пневматичні шини коліс. В результаті підресорена маса кузова та невідресорені маси коліс і мостів формують багатомасову коливальну систему.

Адекватна модель віброзахисту автомобіля, що враховує його фізичні характеристики, дозволяє дослідити коливальні процеси та обрати оптимальні параметри пружних і амортизуючих елементів підвіски.

Кузов автомобіля можна розглядати як тверде тіло з шістьма ступенями свободи: три поступальні переміщення по осях, що проходять через центр мас кузова, і три обертальні рухи навколо цих осей. Коливальні переміщення коліс залежать від конструкції підвіски — розрізняють залежну і незалежну підвіску.

Залежна підвіска — коли колеса жорстко закріплені на несучому мосту, їх рухи взаємопов'язані. У такій системі міст з колесами може рухатися вертикально і обертатися навколо поздовжньої осі автомобіля. Інші напрямки рухів можливі, але зазвичай їх не враховують через незначність. У

цьому випадку міст і колеса розглядаються як тверде тіло з двома ступенями волі.

При незалежній підвісці враховують переважно вертикальні переміщення коліс, оскільки кожне колесо рухається автономно.

У багатьох випадках при моделюванні залежної підвіски замість розгляду одного твердого тіла, яке виконує як поступальні, так і обертальні рухи, застосовують спрощену модель. Вона складається з двох незалежних твердих тіл, кожне з яких рухається лише вертикально, що схоже на модель із незалежною підвіскою коліс.

Динамічна модель коливальної системи автомобіля, яка враховує фізичні властивості системи віброзахисту, представлена на рисунку 2.2, а. Модель має десять ступенів свободи. У більшості практичних випадків моделювання обмежують трьома рухами кузова: поступальним уздовж осі z та двома обертальними рухами навколо осей x і y . Таким чином, модель автомобіля зводиться до коливальної системи з сімома ступенями свободи.

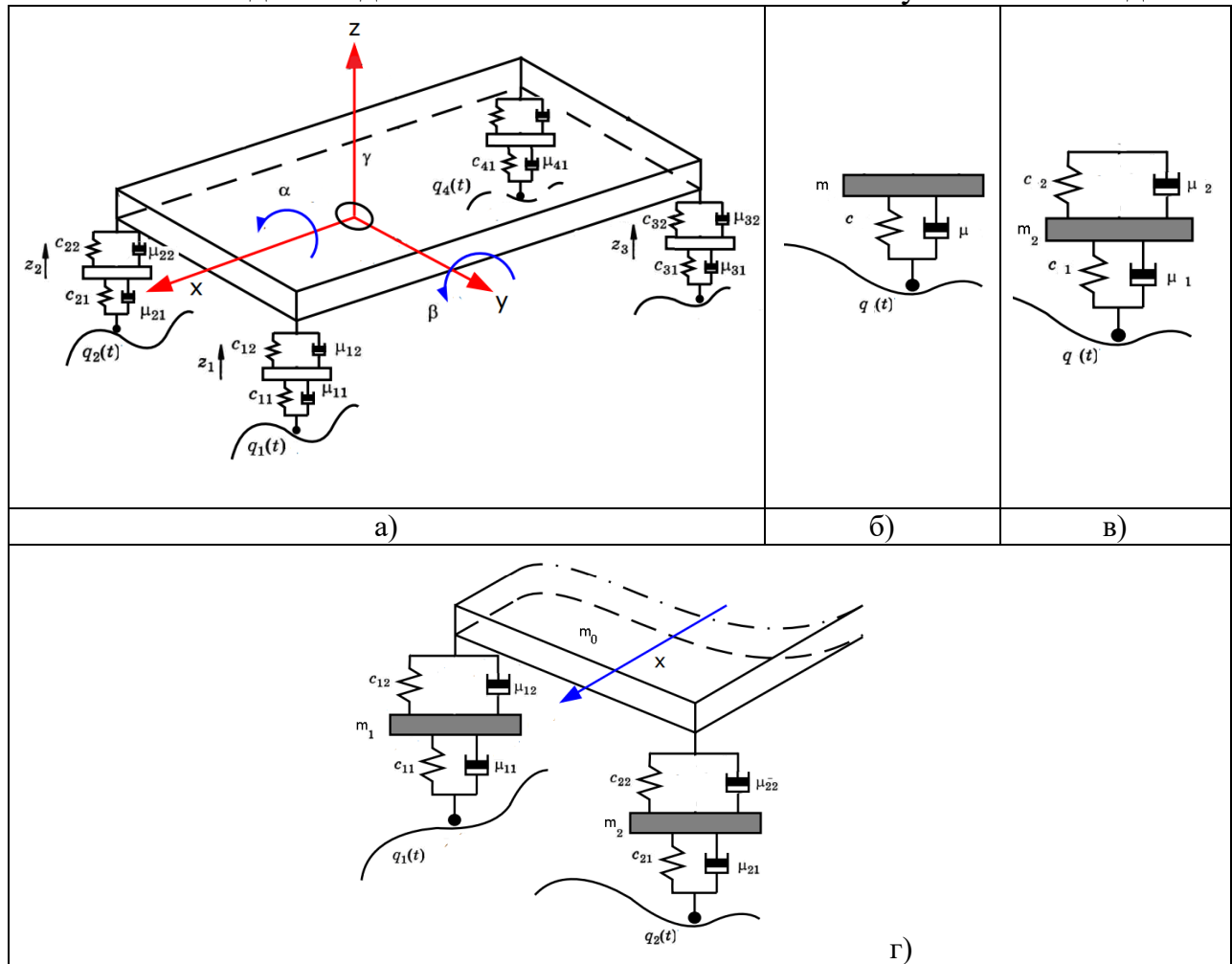


Рис. 2.2. Динамічні моделі для аналізу плавності ходу автомобіля

Зовнішні впливи на цю систему виникають через нерівності мікро- та макропрофілю дороги. Вони мають випадковий характер і описуються випадковими функціями.

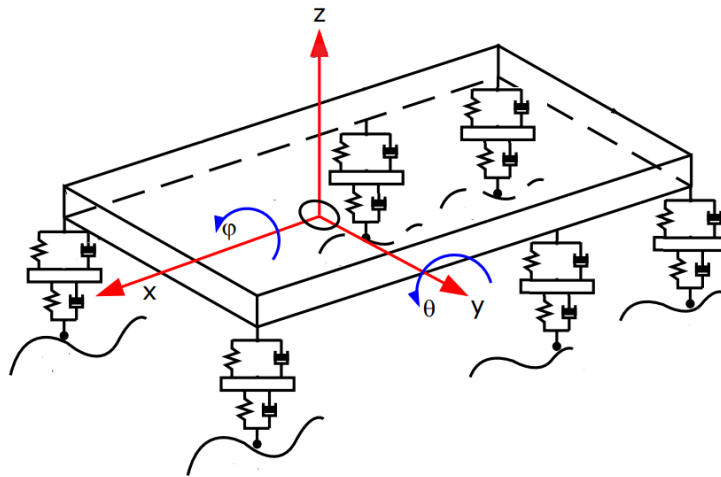


Рис. 2.3. Макромодель аналізу ходу вантажного автомобіля

Аналогічна модель аналізу плавності ходу вантажного автомобіля вказана на рис. 2.3.

Розглянуті динамічні моделі є досить складними, що, звичайно, ускладнює їх застосування на етапах проєктування через значні витрати часу. З цієї причини на початкових етапах проєктування застосовують спрощені варіанти динамічних моделей, які дозволяють швидко оцінити основні характеристики системи без надмірної складності.

Для попереднього підбору параметрів підвіски застосовують *одномасову динамічну модель*, у якій масою коліс і мостів можна знехтувати (див. рис. 2.2, б). При цьому враховують, що параметри коливань передньої та задньої частин кузова практично не пов'язані між собою, тому приймають припущення про їхню незалежність. Маса m у цій моделі — це та частина маси кузова, що припадає на колеса конкретного мосту.

Таким чином, динамічна модель складається з інерційного, пружного та дисипативного елементів, які впливають на нерівності мікропрофілю дороги $q(t)$. Параметром пружного елемента є коефіцієнт жорсткості c , що враховує пружні властивості підвіски і пневматичної шини, а дисипативного — коефіцієнт опору μ , який відображає втрати енергії в гідравлічному амортизаторі та при деформації шини.

Одномасова динамічна модель не враховує власних коливань коліс, частота яких зазвичай у 6–10 разів перевищує частоту коливань кузова. Внаслідок цього високочастотні вібрації від коліс можуть передаватися на кузовні елементи, а також на прилади й механізми, розміщені всередині автомобіля. Під час проєктування підвіски необхідно підібрати оптимальне співвідношення між жорсткістю та демпфуванням елементів підвіски й шин для забезпечення комфортної та безпечної експлуатації.

Таким чином виникає потреба у застосуванні *двомасової динамічної моделі* (див. рис. 2.2, в), що враховує масу частини кузова, яка припадає на колеса даного мосту (m_2), масу коліс і мосту (m_1), коефіцієнти жорсткості пружних елементів підвіски (c_2) і шини (c_1), а також коефіцієнти опору дисипативних елементів підвіски (μ_2) і шини (μ_1). З урахуванням накладених

обмежень, що не дозволяють зосередженим масам m_2 та m_1 переміщатися в іншому напрямку, окрім вертикального вздовж осей z_2 і z_1 відповідно, система має два ступені свободи.

Щоб глибше проаналізувати вплив параметрів підвіски на поведінку кузова, необхідно враховувати взаємодію між різними типами коливань. Окрім цього, слід оцінити, як коливаються прилади й механізми, встановлені в різних частинах кузова. У таких випадках доцільно використовувати *динамічну модель плоских коливань* (рис. 2.2, г). В цій моделі розглядаються не лише вертикальні коливання кузова вздовж осі z_0 , а й кутові поздовжні коливання β навколо осі y . Коливальна система має чотири ступені свободи, а її стан описується фазовими координатами z_0 , β , z_1 , z_2 . Аналогічна модель застосовується для вивчення поперечних коливань кузова.

В якості прикладу аналізу на макрорівні можна також навести методи аналізу ДТП за алгоритмом CRASH-3, що моделює зіткнення як системи точкових мас, при цьому демпфуючі, пружні та фрикційні елементи задаються як результат обробки реальних краш-тестів виробників (рис. 2.4).



Рис. 2.4. Моделювання ДТП в системі PC-Crash.

Отже, залежно від ступеня деталізації опису фізичних властивостей технічного об'єкта формуються різні динамічні моделі.

2.1.3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ НА МІКРОРІВНІ

На *мікрорівні* математичне моделювання базується на використанні диференціальних рівнянь з частинними похідними або інтегральних рівнянь, що описують просторово-часові розподіли фізичних величин. Інакше кажучи, в таких випадках застосовують моделі з розподіленими параметрами. У таких моделях у ролі незалежних змінних можуть виступати просторові координати x_1, x_2, x_3 й час t .

Характерними прикладами можуть слугувати *феноменологічні* рівняння разом із заданими крайовими умовами. В якості прикладів наведемо - *рівняння теплопровідності*:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q,$$

де c — питома теплоємність, ρ — густина, T — температура, t — час, λ — коефіцієнт теплопровідності, q — кількість теплоти, виділюваної в одиницю часу в одиниці об'єму;

- *рівняння дифузії*:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C),$$

де C — концентрація, D — коефіцієнт дифузії.

Аналогічно, до рівнянь на мікрорівні відносять рівняння *гідро- та газодинаміки*, задачі *напружено-деформованого стану*, *електродинаміки*.

Крайові умови включають *початкові умови*, які описують розподіл залежних змінних у просторі на початковий момент часу, а також *граничні умови*, що визначають значення цих змінних на межах досліджуваної області в залежності від часу.

Основні з мікрорівневих задач розглянемо далі.

ТЕМА 3. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ПО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОМУ СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ

3.1. РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Зазвичай за основу беруть варіаційний принцип Лагранжа (або принцип потенційної енергії), згідно з яким система перебуває у рівновазі, коли її потенційна енергія досягає мінімального значення. Потенційна енергія Π визначається як різниця енергії U деформації тіла й роботи A масових і прикладених поверхневих сил.

У свою чергу, у статичному стані

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (3.1)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}]$ — вектор-рядок відносних деформацій, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T$ — вектор-стовпець напруг. Кожний елемент σ_{ij} характеризує напругу, спрямовану уздовж осі x_j й прикладену до площаді, перпендикулярній x_i осі.

Деформації ε_{ij} можна виразити через переміщення за допомогою рівнянь Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

де u_i — переміщення уздовж осі x_i , або в матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

де $\mathbf{S}$ — оператор диференціювання:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Деформації й напруги зв'язані в рамках закону Гука між собою за допомогою матриці $\mathbf{D}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Матриця $\mathbf{D}$ характеризує пружні властивості середовища, і має вигляд:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix},$$

де E та μ — модуль пружності й коефіцієнт Пуассона відповідно.

Підставляючи, одержуємо

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} dV. \quad (3.4)$$

Рішенням задачі повинне бути поле переміщень $\mathbf{u}$. Поле переміщень можна представити, наприклад, у вигляді розкладання в ряд $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_0 + \sum q_i \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r})$ за деякими функціями $\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r})$. Тоді, рахуючи цей вираз як залежність від набору вагових коефіцієнтів $\mathbf{q}$ відповідно до принципу мінімуму потенційної енергії в стані рівноваги маємо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

або, диференціюючи (3.4), знаходимо

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{B}, \quad (3.6)$$

де $\mathbf{B} = \partial A / \partial \mathbf{q}$ — вектор навантажень.

Таке формулювання є вхідним для реалізації в методі скінченних елементів (див. тему 7).

Для розрахунку міцності може проводитися також аналіз вихідного рівняння пружності (*рівняння Ламе*), що має наступний вигляд:

$$(\lambda + G)\text{grad div } \mathbf{u}(\mathbf{r}) + G\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

— диференціальний оператор (Лапласа), що застосовується до всіх елементів вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{g}$ — вектор масових і прикладених сил, віднесених до скінченного елемента.

Великі деформації за границею пружності можна описати за моделями *пластичності*. Але ж в цьому разі вони будуть значно нелінійними. В якості прикладу можна також навести методи аналізу ДТП на мікрорівні за методом скінченних елементів, що є більш точною альтернативою алгоритму CRASH-3, який розглядався вище (рис. 3.1).

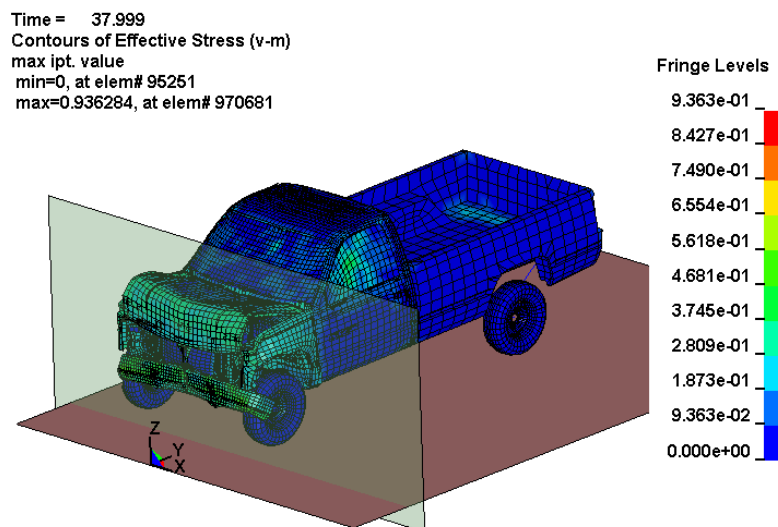


Рис. 3.1. Моделювання ДТП на мікрорівні методом скінченних елементів.

ТЕМА 4. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ГІДРО- ТА ГАЗОДИНАМІКИ

4.1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РУХУ РЕАЛЬНИХ РІДИН ТА ГАЗІВ

Розрахунок поля швидкостей рідини або газу можливо провести на основі вирішення диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса спільно з рівнянням нерозривності. Найпростіше ці рівняння записуються для сталої течії нестисливих середовищ. Такими звичайно приймаються більшість ньютонівських рідин, зокрема вода, а також, з деяким наближенням, багато газів, наприклад повітря. Для плоскої задачі сталої течії нестисливого ньютонівського середовища в ортогональній системі координат x, y, z ці рівняння приймають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z,\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.2)$$

Система (4.1) — рівняння руху Нав'є-Стокса, (4.2) — рівняння нерозривності.

У цих рівняннях u, v — компоненти вектора швидкості $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, p — тиск середовища, ρ — густина, $\nu = \eta/\rho$ — кінематична в'язкість, F_x, F_y — компоненти вектора об'ємних сил (наприклад сили тяжіння, відцентрових та ін.)

У рівняннях (4.1) ліві частини є питомими силами інерції, діючими на елементарний об'єм, в правих частинах послідовно йдуть сили, спричинені перепадом тиску, сили в'язкого тертя, та об'ємні сили. Іноді систему (4.1) — (4.2) скорочено записують у векторному вигляді:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \nu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)] + \mathbf{F}, \\ \nabla\mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

Точні рішення системи (4.1) спільно з рівнянням нерозривності (4.2) можливі тільки у виняткових випадках, наприклад, коли можна знехтувати силами інерції. У випадку якщо силами інерції нехтувати не можна для

визначення поля швидкостей та тиску використовують наближені (чисельні) методи розрахунку, реалізовані в багатьох САПР.

4.2. ВІДОМОСТІ ПРО УТВОРЕННЯ ТА ЗРИВ ВИХОРИВ ТА ВИНИКНЕННЯ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Гідродинаміка в'язких рідин часто відіграє ключову роль у перебігу основних технологічних процесів. Особливості руху таких середовищ потребують обов'язкового врахування для коректного проектування обладнання. Насамперед це стосується переходу ламінарного потоку в турбулентний, що супроводжується різкою зміною залежності витрати від перепаду тиску. При нестационарному русі рідини можуть виникати вихори, і ці явища піддаються моделюванню в сучасних системах автоматизованого проектування, таких як MOLDFLOW, FEMLAB (COMSOL Multiphysics), NASTRAN, ANSYS, FLOW3D та інші. Водночас варто зважати на те, що моделі, які описують початкові етапи виникнення турбулентності, не дозволяють точно оцінити основні характеристики потоку в цілому. Для цього призначені спеціальні модулі, що базуються на усереднених рівняннях Нав'є-Стокса, доповнених рівняннями напівемпіричних турбулентних моделей.

4.3. СТІЙКІСТЬ РУХУ РІДИНИ ТА ГАЗУ

Відомо, що для будь-якої задачі, пов'язаної з рухом в'язкої рідини за певних умов, у теорії має існувати точне розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса разом із рівнянням неперервності. Такі рішення формально існують для будь-яких значень числа Рейнольдса. Проте не кожне з математично точних розв'язань цих рівнянь здатне реалізуватися в реальних фізичних умовах. Справжні стаціонарні потоки повинні не лише відповідати рівнянням гідродинаміки, а й демонструвати *стійкість*, тобто з часом придушувати малі збурення. Якщо ж навіть незначні флуктуації, що неминуче виникають у потоці, мають тенденцію до зростання, такий потік вважається *нестійким*, і це призводить до розвитку *турбулентності*.

Математичне вивчення стійкості потоку щодо малих збурень відбувається за такою схемою: до стаціонарного розв'язання (наприклад, поля швидкостей) додається нестационарне мале збурення, і аналізується, чи задовольняє сумарний рух гідродинамічним рівнянням. Якщо знайдуться частоти, при яких такі збурення з часом наростатимуть, тоді потік вважається нестійким до цих коливань.

Проте аналітичне дослідження подібної стійкості є надзвичайно складним. До цього часу теоретично не вирішено питання стійкості стаціонарного обтікання тіл з кінцевими геометричними розмірами. Безперечно, що при дуже малих значеннях числа Рейнольдса рух буде стабільним. Експерименти показують, що при зростанні Re настає певне критичне значення — $Re_{кр}$ після якого потік стає нестійким і переходить у

турбулентний режим. При $Re > Re_{кр}$ стаціонарне обтікання тіл вже не спостерігається. Це критичне значення є індивідуальним для кожного типу потоку й може змінюватися в межах від кількох десятків до кількох тисяч. Наприклад, для поперечного обтікання циліндра нестационарні коливання з'являються вже при $Re = ud / \nu \approx 30$, де d — діаметр циліндра.

4.4. ТУРБУЛЕНТНА ОБЛАСТЬ ТА ЯВИЩЕ ВІДРИВУ

Турбулентний потік за своєю природою є вихровим. Проте у випадку значних значень числа Рейнольдса (Re) структура завихрення в об'ємі рідини набуває характерних рис. Зокрема, під час *стаціонарного турбулентного обтікання* тіл загальний об'єм рідини умовно поділяється на дві чітко відокремлені зони. В одній із них відбувається вихровий рух, тоді як в іншій зона завихрення відсутня, і рух наближається до *потенційного*. Це означає, що вихори не розподіляються рівномірно в усьому потоці, а зосереджені лише в певній його частині.

Наявність чітко окресленої області з вихровим рухом пояснюється тим, що турбулентність у певних випадках можна інтерпретувати як рух ідеальної (нестисливої та безв'язкої) рідини, описуваний *рівняннями Ейлера*. За межами цієї вихрової зони турбулентні коливання швидкості поступово згасають — тим швидше, чим дрібніший їх масштаб. У результаті, на великій відстані від джерела збурення в потоці залишаються лише *великомасштабні пульсації*, які затухають на відстані, співмірній з поперечними розмірами зони турбулентності — ці розміри й визначають *характерний масштаб турбулентності*. Якщо точка в потоці розташована далі від цієї області, ніж визначений масштаб, потік у цій зоні вже наближається до *ламінарного*.

Область, у якій відбувається турбулентний вихровий рух, називають *турбулентною зоною* або *зоною турбулентного потоку*.

Ця зона обов'язково обмежується якоюсь частиною поверхні тіла, яке омивається рідиною. Місце, де відбувається відділення турбулентного потоку від поверхні тіла, називається *лінією відриву*. Від цієї лінії простягається *поверхня поділу*, яка відмежовує турбулентну зону від решти потоку. Сам процес утворення турбулентної області в результаті відриву потоку від поверхні прийнято називати *явищем відриву*.

Геометрія турбулентної області залежить не стільки від умов поблизу поверхні, як від загального характеру руху рідини в основній її масі.

Приклад формування зони турбулентності та процесу відриву потоку при обтіканні автомобіля подано на рис. 4.1.

Сьогодні існує багато моделей турбулентності. Наведемо рівняння найуживанішої моделі — так званої *k-ε моделі турбулентності*. Ця модель має додаткові рівняння для *кінетичної енергії вихорів* та *швидкості дисипації енергії вихорів*. Для таких моделей також записуються рівняння нерозривності (4.3) та руху (4.4) (проводиться підсумовування за повторюваними індексами), але ж записані вони для осереднених полів швидкостей та тиску:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p^* + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_\varepsilon \tau_{ij}) + f_i, \quad (4.4)$$

де

$$p^* = p + \frac{2}{3} \rho k, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \nu_\varepsilon = \nu + \nu_t,$$

ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості повітря, м²/с, ν_t — турбулентна в'язкість, м²/с, k — питома кінетична енергія турбулентності, м²/с², u_i — осереднені компоненти вектора швидкості в декартовій системі координат, м/с, p — осереднений тиск, Па, f_i — вектор масових сил, м/с².

Додаткові рівняння k - ε моделі турбулентності мають вигляд, як вже зазначалося, рівнянь для питомої кінетичної енергії турбулентності та швидкості дисипації турбулентної енергії (4.5-4.7):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k u_j - \nu_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = H_k; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon u_j - \nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = H_\varepsilon; \quad (4.6)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k}{\varepsilon}, \quad (4.7)$$

де ε — швидкість дисипації турбулентної енергії, м²/с³,

$$H_k = G - \varepsilon, \quad H_\varepsilon = C_{\varepsilon 1}^* \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad G = \nu_t \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad C_{\varepsilon 1}^* = C_{\varepsilon 1} - \eta \frac{1 - \eta/\eta_0}{1 + \beta \eta^3}, \quad \eta = \sqrt{\frac{G}{C_\mu \varepsilon}},$$

$$\nu_k = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}, \quad \nu_\varepsilon = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}.$$

Емпіричні константи в наведених рівняннях дорівнюють:

$$C_\mu = 0,0845, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,68, \quad \sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0,72, \quad \eta_0 = 4,38, \quad \beta = 0,015.$$

Треба зазначити, що k - ε модель турбулентності дає задовільний збіг з експериментальними даними для областей з розвиненою турбулентністю, а саме, коли виконується $\nu_t \gg \nu$. Біля стінки кузова автомобіля, де ця оцінка порушується, визначення параметрів турбулентності проводиться у вигляді пристінних функцій.

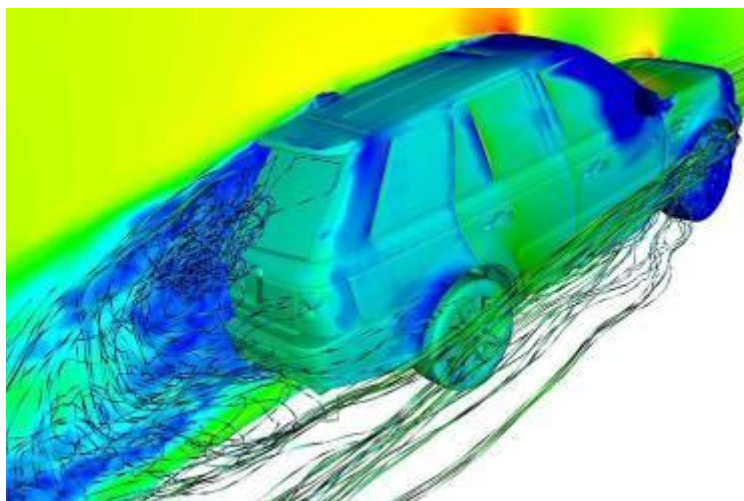


Рис. 4.1. Явище відриву та турбулентна аеродинаміка автомобілю за чисельними розрахунками в САПР.

ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМІНУ

5.1. ТЕПЛООБМІН В НЕРУХОМИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Для ефективного сучасного проєктування технічних систем необхідно мати повне уявлення про всі параметри їхнього функціонування, зокрема — про теплові навантаження, які виникають під час роботи обладнання. Ці дані дають змогу приймати обґрунтовані технічні рішення щодо вибору конструктивних матеріалів і технологій.

Завдяки стрімкому розвитку комп'ютерної техніки стало можливим з високою точністю моделювати теплові процеси без значних витрат ресурсів. Такі моделі будуються на основі чисельного розв'язання *рівнянь теплопровідності* — також відомих як *рівняння енергії*, що широко вивчаються в курсах фізики.

Основним математичним виразом для опису теплових потоків у суцільному середовищі є *рівняння Фур'є*

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k} \right), \quad (5.1)$$

де λ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $\mathbf{q}$ — вектор густини теплового потоку, Вт; t — температура в точці середовища.

Даний закон дозволяє вивести рівняння теплопровідності для нерухомого середовища. Це рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{c_p \rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right] \right) + \frac{q_v}{c_p \rho} = 0, \quad (5.2)$$

де c_p — теплоємність середовища, Дж/(кг·К), ρ - густина середовища кг/м³, q_v — потужність внутрішніх джерел теплоти в тілі Вт/м³. Дане диференціальне рівняння дає можливість розрахувати температуру в точках нерухомого середовища. Воно повинне бути доповнене граничними умовами теплообміну. Нас цікавитимуть наступні основні граничні умови:

1) граничні умови першого роду — задається розподіл температури на поверхні середовища

$$t = t_n; \quad (5.3)$$

2) граничні умови другого роду — задається значення теплового потоку на поверхні середовища:

$$q=q_n; \quad (5.4)$$

3) граничні умови третього роду — задаються температура навколишнього середовища та закон теплообміну між тілом та навколишнім середовищем. Звичайно для цього використовується закон Ньютона-Ріхмана:

$$q=\alpha(t-t_{o.c.}), \quad (5.5)$$

де α — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Рівняння теплопровідності для постійних λ може бути записане у вигляді:

$$\frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho} = 0, \quad (5.6)$$

або, в коротшому записі:

$$a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho} = 0, \quad (5.7)$$

де $a = \lambda / c_p \rho$ — коефіцієнт температуропровідності, м²/с.

5.2. ТЕПЛООБМІН В РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩАХ (КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН)

У більшості випадків повноцінне моделювання стану газу або рідини неможливо обмежити лише використанням *рівнянь Нав'є-Стокса* та *рівняння нерозривності*, оскільки в середовищі часто мають місце інтенсивні теплові процеси. Щоб врахувати ці явища, до математичної моделі додають *рівняння енергії*, яке описує тепловий баланс у середовищі.

Рівняння енергії зазвичай записується у вигляді рівняння температурного поля в просторі й часі. Подібно до рівнянь механіки рідини, воно є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Його розв'язання, як правило, здійснюється за допомогою чисельних методів, аналогічних тим, що застосовуються для рівнянь гідродинаміки.

Отже, для комплексного аналізу стану рідкого або газового середовища необхідно одночасно обчислити поле температур, розподіл тиску та швидкості. Це досягається шляхом спільного розв'язання системи рівнянь, що включає *рівняння Нав'є-Стокса*, *рівняння нерозривності* та *рівняння енергії*. Ці рівняння формують замкнену систему для опису всіх основних характеристик потоку:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right) + F_x; \\
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right) + F_y; \\
u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right) + F_z;
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;
\tag{5.9}$$

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{c_p \rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right] \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}.
\tag{5.10}$$

Тут (5.8) — рівняння руху Нав'є-Стокса, (5.9) — рівняння нерозривності, (5.10) — рівняння енергії (температуропровідності).

У цих рівняннях u , v , w — компоненти вектора швидкості $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, p — тиск середовища, ρ — густина, η — динамічна в'язкість, F_x , F_y , F_z — компоненти вектора об'ємних сил (наприклад сили тяжіння, відцентрових сил тощо), t — температура в точці середовища, c_p — теплоємність середовища, λ — коефіцієнт теплопровідності, q_v — потужність внутрішніх джерел теплоти в тілі.

У рівняннях (5.8) ліві частини є питомими силами інерції, діючими на елементарний об'єм, в правих частинах послідовно йдуть сили, які спричиняються перепадом тиску, сили в'язкого тертя, та об'ємні сили, при цьому параметри середовища, такі як η і ρ можуть в загальному випадку залежати від тиску p , температури t й бути нерівномірно розподіленими за об'ємом середовища. У рівнянні енергії (5.10) ліва частина є *конвективним потоком тепла* в середовищі, в правій частині представлений баланс тепла за рахунок теплопровідності, при цьому параметри середовища, такі як c_p та λ також, в загальному випадку, можуть залежати від тиску p , температури t та бути нерівномірно розподіленими за об'ємом середовища.

Розглянута система істотно спрощується, якщо розглядати двовимірний випадок, та вважати, що $\lambda = \text{const}$, $c_p = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ та $\rho = \text{const}$. У цьому випадку одержимо таку систему:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x; \\
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y;
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (5.12)$$

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (5.13)$$

У скороченому векторному вигляді система має вигляд:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot [-p \mathbf{I} + \eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{F}; \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (5.15)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla t = \nabla (\lambda \nabla t) + \mathbf{q}. \quad (5.16)$$

В якості прикладу на рис. 5.1 представлено розрахунки трасування температур при прогрівання чотирициліндрового двигуна внутрішнього згоряння.

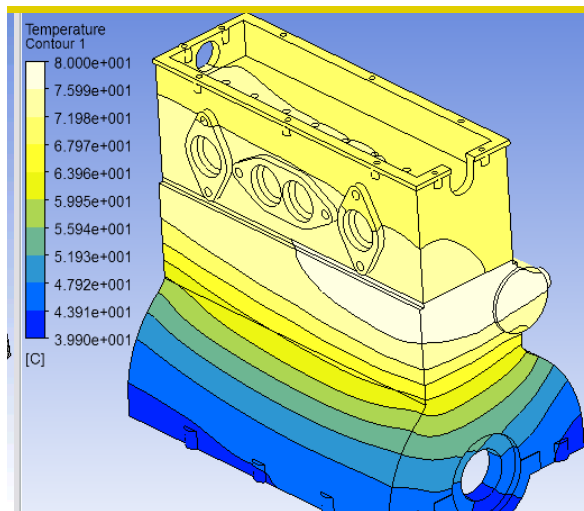


Рис. 5.1. Розподіл температур при прогрівання чотирициліндрового двигуна внутрішнього згоряння за чисельними розрахунками в САПР.

ТЕМА 6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

6.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Обчислювальні методи — це підходи до розв’язання математичних задач шляхом отримання результату у числовій формі. У таких задачах як початкові дані, так і підсумкові результати подаються у вигляді чисел або їх наборів.

До основних напрямів, на яких ґрунтуються обчислювальні методи, належать:

- методи *інтерполяції, апроксимації та згладжування* даних;
- чисельні способи розв’язання *лінійних рівнянь і систем*;
- методи для обчислення розв’язків систем *нелінійних рівнянь*;
- процедури *чисельного диференціювання*;
- процедури *чисельного інтегрування*;
- чисельні алгоритми для вирішення *звичайних диференціальних рівнянь*;
- розв’язання *диференціальних рівнянь у частинних похідних*;
- обчислення *інтегро-диференціальних рівнянь*.

Розробкою та вивченням цих методів займається окрема математична дисципліна — *обчислювальна математика*.

6.2. ОБЧИСЛЕННЯ Й ПОХИБКИ

У процесі чисельного розв’язання задач важливо враховувати похибку отриманих результатів. Вона зазвичай має три основні складові:

1. *непереборна похибка*, яка зумовлена неточністю початкових даних;
2. *похибка, пов’язана з методом обчислень*;
3. *обчислювальна похибка*, яка виникає внаслідок числових округлень під час розрахунків.

У вихідних даних похибки з’являються через неточність вимірювальних приладів або неможливість представити значення у вигляді точного числа (наприклад, обмеженість десяткових дробів). Часто використовують не конкретні значення, а діапазони, в яких ці значення можуть знаходитися. Такі діапазони називаються *інтервалами невизначеності*. Навіть при точному обчисленні результат теж матиме певну невизначеність через похибки вхідних даних — це і є невідворотна похибка.

Точність розрахунків — це ступінь близькості результату обчислень до справжнього чи очікуваного значення. Вона характеризує, наскільки добре обчислене значення відповідає реальному значенню чи еталону. У різних контекстах точність може означати різні речі, наприклад, близькість результатів один до одного (*відтворюваність*) або близькість до

справжнього значення (*правильність*). Абсолютна точність у фізичних вимірюваннях недосяжна. Наприклад, вказане значення тиску 3457,45565576 Па не може вважатися достовірним до останньої цифри, оскільки реальні вимірювання не забезпечують такої точності. У разі, коли не вказано меж похибки, вважається, що точність не перевищує половини найменшого розряду, наприклад $10,65 \pm 0,005$.

В обчисленнях похибки виникають при використанні чисельних методів, оскільки ці методи забезпечують не точний, а лише приблизний результат із визначеним, хоча й контрольованим, відхиленням. Це пояснюється тим, що чисельні розрахунки завжди ґрунтуються на виконанні скінченної кількості обчислювальних операцій. Навіть якщо інші джерела похибок відсутні, при машинних розрахунках неминуче виникають похибки округлення.

Щоб знизити похибку обчислень, слід дотримуватись наступних рекомендацій:

1. використовувати алгоритми з високою чисельною стійкістю, які менш чутливі до похибок округлення;
2. проводити аналіз похибок на кожному етапі обчислень, щоб виявляти і мінімізувати джерела неточностей;
3. використовувати подвійний розряд точності (double precision) там, де це можливо, особливо при роботі з малими або великими числами;
4. уникати надлишкового віднімання близьких за значенням чисел — це призводить до втрати значущих цифр;
5. оптимально вибирати розмір кроку при розв'язанні задач із кроковими методами, наприклад при інтегруванні чи диференціюванні;
6. використовувати методи адаптивного уточнення сітки для задач, що потребують високої точності в окремих ділянках області розрахунку;
7. здійснювати перевірку результатів за допомогою контрольних прикладів або аналітичних рішень, якщо вони доступні;
8. виконувати “подвійний прорахунок” (розрахунок із подвоєною кількістю вузлів або поділом області) для оцінки погрішності.

Похибки слід враховувати вже на етапі побудови математичної моделі. Вони можуть бути представлені у вигляді *абсолютних* або *відносних* похибок.

Абсолютна похибка — це різниця між отриманим (виміряним або обчисленим) значенням і його справжнім (точним) значенням.

$$\Delta x = |a - x|, \quad (6.1)$$

де a — дійсне значення величини;
 x — вимірюване, або обчислене її значення.

Відносна похибка — це відношення абсолютної погрішності до дійсного значення величини:

$$\delta = \frac{\Delta x}{a}. \quad (6.2)$$

Відносна похибка пов'язана з тим, наскільки точно визначене значення, тобто з кількістю значущих цифр у числі. Вона показує, яку частину від істинного значення становить похибка, і використовується для оцінки точності результату в порівнянні з його величиною. Чим менша відносна похибка, тим більша достовірність числового значення.

число значущих цифр	відносна похибка, %
1	5-50
2	0.5-5
3	0.05-0.5
4	0.005-0.05

Отже, можна стверджувати, що для технічних розрахунків зазвичай достатньо чотирьох значущих цифр, де четверта виступає як контрольна або запасна. При цьому остаточні результати доцільно подавати у вигляді трьох значущих цифр — цього рівня точності цілком вистачає для більшості інженерних задач.

При обчисленні алгебраїчної суми похибка наближених значень визначається як сума абсолютних похибок кожного з доданків. Якщо ж мова йде про множення або ділення, то загальна відносна похибка дорівнює сумі *відносних похибок* усіх множників або, відповідно, діленого і дільника.

У більш загальному випадку, коли розглядається функція, яка залежить від кількох змінних, *квадратична абсолютна похибка* та *квадратична відносна похибка* цієї функції можуть бути визначені як:

$$\Delta y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2; \quad \delta y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2. \quad (6.3)$$

Розглянемо наступний приклад. Ребро кубічної ємності має розмір $2,34 \pm 0,01$ м. Знайти абсолютну й відносну похибку у визначенні об'єму ємності.

Розрахункове значення об'єму

$$V = a^3 = 2,34^3 = 12,81 \text{ м}^3$$

Абсолютна похибка у визначенні об'єму дорівнює

$$\Delta V^2 = \left(\frac{dV}{da} \right)^2 \cdot \Delta a^2 = 9a^4 \cdot \Delta a^2 = 9 \cdot 2,34^4 \cdot 0,01^2 = 0,0270;$$

$$\Delta V = 0,16 \text{ м}^3, \quad V = 12,81 \pm 0,16 \text{ м}^3.$$

Відносна помилка у визначенні об'єму

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0,16}{12,81} \approx 0,012.$$

Аналогічно її можна розрахувати як

$$\delta V^2 = \left(\frac{d \ln V}{da} \right)^2 \cdot \Delta a^2 = \frac{9}{a^2} \cdot \Delta a^2 = \frac{9}{2,34^2} 0,0001 = 0,00016;$$
$$\delta V \approx 0,013.$$

Якщо необхідно обчислити значення полінома ступеню m

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

при значенні $x=x_0$, то прямий розрахунок не ефективний. Для цього найкраще використовувати за *схему Горнера*:

$$P(x_0) = (((a_m x_0 + a_{m-1}) x_0 + \dots + a_2) x_0 + a_1) x_0 + a_0.$$

У більшості випадків технічні обчислення виконуються з точністю не більше чотирьох значущих цифр, тому результати слід округлювати відповідно до прийнятого рівня точності. При використанні комп'ютерних систем округлення чисел зазвичай виконується автоматично, залежно від обраного формату виведення даних.

6.3. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗКУ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАДАЧ

У процесі розв'язання задачі можна виокремити кілька послідовних етапів, які утворюють логічний ланцюг дій — від постановки проблеми до отримання результату.

1. Загальна постановка задачі.

Загальна постановка задачі полягає у формулюванні змістовної частини проблеми: визначаються *вхідні дані* та *очікувані результати*. Цей етап надзвичайно важливий, адже чіткість формулювання визначає ефективність подальших кроків.

2. Математична постановка задачі.

На цьому етапі створюється *математична модель задачі* — визначаються змінні, які описують ситуацію, та встановлюються математичні зв'язки між ними. Важливо досягти балансу: *надто проста модель* дає неточні результати, *занадто складна* — може виявитись нерозв'язною або обчислювально затратною. Помилка на цьому етапі унеможливає правильний розв'язок у майбутньому.

3. Вибір методу розв'язання.

Математичний метод розв'язання підбирається з урахуванням особливостей задачі та ресурсів обчислювальної техніки. На вибір впливають як знання користувача, так і технічні обмеження, наприклад, обсяг оперативної пам'яті чи швидкодія комп'ютера. Якщо ресурсів недостатньо, доводиться адаптувати модель або шукати інший метод.

4. Розробка та відлагодження програми.

Цей етап передбачає написання програмного коду відповідно до обраного методу. *Відлагодження* (налагодження) особливо складних програм може бути тривалим, тому доцільно використовувати інструменти для пошуку помилок.

5. Тестування програми.

Тестування полягає у перевірці правильності роботи програми шляхом розв'язання задач із відомими результатами або використанням непрямих ознак правильності (наприклад, логічних співвідношень між вхідними та вихідними даними).

6. Отримання та представлення результатів.

На завершальному етапі важливо забезпечити *зрозумілий і зручний вивід результатів*. Для покращення сприйняття доцільно використовувати графічні засоби візуалізації.

Залежно від характеру задачі, деякі з цих етапів можуть бути відсутні. Наприклад, якщо потрібно просто обчислити значення функції при різних аргументах, тоді сама формула функції вже містить у собі і математичну постановку, і метод розв'язання

6.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ Й ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ

Якщо функція не задається аналітично, а відома лише у вигляді таблиці, де аргумент змінюється з певним кроком, то у таких випадках для знаходження значень функції між відомими точками використовують *інтерполяцію*, а для обчислення значень за межами вхідного набору даних — *екстраполяцію*.



Рис. 6.1. Геометрична ілюстрація інтерполяції та екстраполяції.

Таким чином, *інтерполяція* — це метод знаходження наближених значень функції всередині інтервалу, обмеженого табличними даними. Якщо ж значення аргументу виходить за межі таблиці, застосовується

екстраполяція — метод прогнозування значень функції поза межами наявного діапазону.

Точки, у яких функція задана *таблично*, називаються *вузлами інтерполяції*. На основі цих вузлів здійснюється побудова інтерполяційної формули, яка дозволяє оцінити значення функції у проміжних точках.

Інтерполяційні методи, зокрема, *сплайн-інтерпляція*, є основою сучасних *CAD-систем* (див. розділ II).

6.4.1. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОЛІНОМОМ ЛАГРАНЖА

Інтерполяція та екстраполяція найчастіше виконуються за допомогою деякого полінома, який побудований на основі відомих табличних значень функції. Одним із найпоширеніших методів є використання *полінома Лагранжа*, формула якого має наступний вигляд:

$$y = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i \neq j, \quad (6.4)$$

де n — порядок полінома.

Поліном Лагранжа можна використовувати для інтерполяції як на *рівновіддалених*, так і на *нерівновіддалених* вузлах. У випадку лінійної інтерполяції, тобто при використанні лише двох вузлів, інтерполяційний вираз набуває такого вигляду:

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (6.5)$$

З формули (6.4) ми можемо отримати вираз для квадратичної інтерполяції поліномом Лагранжа

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (6.6)$$

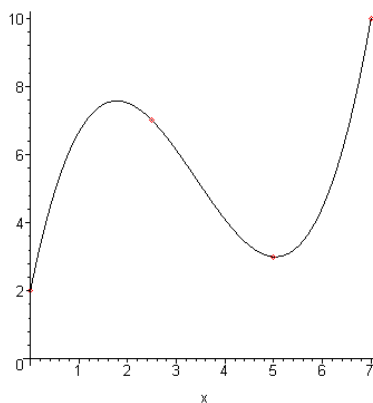


Рис. 6.2. Приклад інтерполяції поліномом Лагранжа

6.4.2. БАЗИСНІ ФОРМИ

Представлення елемента деякого лінійного простору у вигляді лінійної комбінації базисних елементів (суми базисних елементів із числовими коефіцієнтами), наприклад

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

називається *розкладанням* цього елемента *по базису*. В базисній формі можна представити також інтерполяційні поліноми, тоді в якості базисних елементів будуть використовуватися базисні функції, що залежать від деякого параметру або від незалежної координати. Тоді, наприклад, базисна форма полінома Лагранжа буде

$$y = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x),$$

де

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i \neq j,$$

— базисні функції.

6.4.3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОЛІНОМАМИ НЬЮТОНА

До альтернативних методів інтерполяції належать *формули Ньютона*, які ґрунтуються на використанні кінцевих різниць. Ці формули особливо ефективні у випадках рівномірно розташованих вузлів. Для побудови інтерполяційного многочлена Ньютона використовуються прямі або зворотні кінцеві різниці, що організовуються у вигляді таблиці:

x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_0+h	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_0+2h	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_0+3h	y_3	Δy_3			
x_0+4h	y_4				

У разі рівномірного розташування вузлів і коли аргумент знаходиться біля початку таблиці, доцільно використовувати *першу інтерполяційну формулу Ньютона*. Її застосовують для інтерполяції у напрямку зростання даних або для екстраполяції в зворотному напрямку, тобто за межами початкових значень:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}). \quad (6.7)$$

Інший вид практичного використання першої формули Ньютона:

$$q = \frac{x-x_0}{h};$$

$$p_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Лінійна інтерполяція за формулою Ньютона

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Квадратична інтерполяція

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Коли значення аргументів знаходяться ближче до кінця таблиці, для обчислення функції застосовують *другу формулу Ньютона*, розроблену для рівновіддалених вузлів. Цей підхід використовується як у випадках інтерполяції назад, так і при екстраполяції в напрямку вперед.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_{n-1})(x-x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_{n-1})\dots(x-x_1). \quad (6.8)$$

Інший вид практичного використання другої формули Ньютона:

$$q = \frac{x-x_n}{h};$$

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \dots$$

$$\dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Розділені різниці — це величини, які використовуються для розрахунків за формулою Ньютона при нерівновіддалених вузлах інтерполяції.

Розділені різниці першого порядку визначаються так:

$$[x_0; x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad [x_1; x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad \dots; \quad [x_{n-1}; x_n] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Розділені різниці другого порядку мають вигляд:

$$[x_0; x_1; x_2] = \frac{[x_1; x_2] - [x_0; x_1]}{x_2 - x_0}; \quad \dots; \quad [x_{n-2}; x_{n-1}; x_n] = \frac{[x_{n-1}; x_n] - [x_{n-2}; x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$$

Інтерполяція вперед і екстраполяція назад для нерівновіддалених вузлів, що реалізується за допомогою першої інтерполяційної формули Ньютона, записується тоді у наступній формі

$$P_n(x) = [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0; x_1; \dots; x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Інтерполяцію *поліномами Ньютона* можна так само як і інтерполяцію поліномами Лагранжа представити у базисному вигляді:

$$\sum_{j=0}^n c_j N_j(x),$$

де $N_j(x)$ — базисні функції.

Базисні функції представляються у вигляді:

$$N_i(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad N_0(x) = 1.$$

Коефіцієнти розкладення мають вигляд:

$$c_j = f_i - \sum_{j=0}^n c_j N_j(x),$$

$$c_0 = f_0.$$

Для двох точок коефіцієнти перепишуться у вигляді:

$$N_1 = t - t_0,$$

$$c_1 = f_1 - \frac{c_0}{t - t_0},$$

$$N_2 = (t - t_0)(t - t_1).$$

6.4.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ

Сплайн (від англ. spline — гнучка рейка) — це функція, графік якої утворений із кількох поліноміальних відрізків. Ці відрізки з'єднані таким чином, що похідні отриманої функції до порядку, який на одиницю менший за степінь полінома, є неперервними на всьому проміжку, що розглядається.

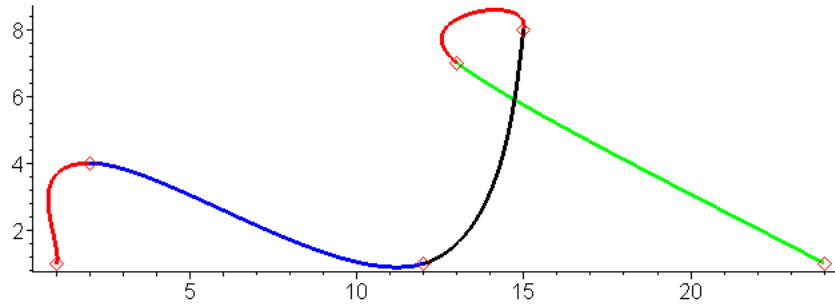


Рис. 6.3. Приклад інтерполяції сплайном

Найпростішою є інтерполяція лінійним сплайном. *Лінійний сплайн* — це сплайн, складений з поліномів першого ступеня, тобто з відрізків прямих ліній. Точність інтерполяції лінійними сплайнами невисока, також слід зазначити, що вони не забезпечують безперервності навіть перших похідних. Однак у деяких випадках кусочно-лінійна апроксимація функції може виявитися переважніше, чим апроксимація більш високого порядку. Інтерполяцію лінійним сплайном також можна представити у базисній формі

$$u(x) = \sum u_i \varphi_{1i}(x) + u_{i+1} \varphi_{2i}(x),$$

де

$$\begin{aligned}\varphi_{1i}(x) &= (L_{i+1} - x)/\Delta x_i, \\ \varphi_{2i}(x) &= (x - L_i)/\Delta x_i,\end{aligned}$$

L_i — координати ділянок розбиття.

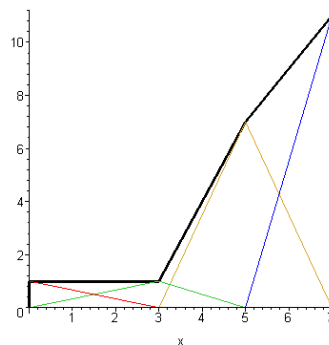


Рис. 6.4. Приклад інтерполяції лінійним сплайном

Дуже поширеною є інтерполяція кубічним сплайном. Розглянемо набір точок на площині, координати яких задані як $[a; f(a)]$, $[b; f(b)]$, $[c; f(c)]$ і $[d; f(d)]$. Нехай нами підібрано многочлен ступеня, крива якого проходить через точки $[a; f(a)]$, $[b; f(b)]$.

Знайдемо многочлен третього ступеня

$$y = A_0 + A_1(x - b) + A_2(x - b)^2 + A_3(x - b)^3,$$

крива якого проходить через наступні точки $[b; f(b)]$ і $[c; f(c)]$.

Для цього нам необхідно знайти значення констант A_0 , A_1 , A_2 і A_3 , а значення $f(b)$ і $f(c)$ розглядати як обмеження. Необхідно також поставити вимогу, щоб крива в точці $x = b$ мала б такий же нахил і таке ж значення другої похідної, що й у раніше знайденого многочлена. Звідси маємо чотири рівняння, яким повинні задовольняти невідомі A_0 , A_1 , A_2 і A_3 :

$$\begin{aligned} f(b) &= A_0; f(c) = A_0 + A_1(c - b) + A_2(c - b)^2 + A_3(c - b)^3; \\ f'(b) &= A_1; f''(b) = 2A_2. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$\begin{cases} A_0 = f(b); \\ A_1 = f'(b); \\ A_2 = \frac{1}{2} f''(b); \\ A_3 = \frac{f(c) - A_0 - A_1(c - b) - A_2(c - b)^2}{(c - b)^3}. \end{cases}$$

Така *інтерполяція* між значеннями b та c дозволяє побудувати криву третього ступеня, що проходить через ці точки. Завершивши цей етап, переходять до побудови наступного відрізка кривої, що з'єднує точки $f(c)$ і $f(d)$. Щоб це зробити, необхідно визначити тангенс кута нахилу та значення другої похідної многочлена в точці $x = c$.

$$\begin{cases} f'(c) = A_1 + 2A_2(c - b) + 3A_3(c - b)^2; \\ f''(c) = 2A_2 + 6A_3(c - b). \end{cases}$$

Розглянемо приклад.

	a	b	c	d
x	37	42	55	69
y	324	584	1642	5835

Нехай на відрізку $[a,b]$ ми проводимо інтерполяцією прямою лінією. Тоді в точці b тангенс кута її нахилу рівний

$$\frac{584 - 324}{42 - 37} = 52,$$

а друга похідна дорівнює нулю. Підберемо многочлен третього ступеня на відрізку $[b,c]$.

Отримуємо

$$A_0 = f(b) = 584;$$

$$A_1 = f'(b) = 52;$$

$$A_2 = 0;$$

$$A_3 = \frac{1642 - 584 - 52(55 - 42) - 0 \cdot 169}{(55 - 42)^3} = 0,1738734.$$

Щоб визначити наступний відрізок кривої, обчислюємо першу та другу похідні $f'(55)$, $f''(55)$. Наступний відрізок кривої буде

$$A_0 = 1642;$$

$$A_1 = 140,15381;$$

$$A_2 = 0,5 \cdot 13,562125 = 6,781063;$$

$$A_3 = \frac{5835 - 1642 - 140,15381 \cdot 14 - 6,781063 \cdot 186}{2604} = 0,32862915.$$

Отриманий сплайн показано на рис. 6.5.

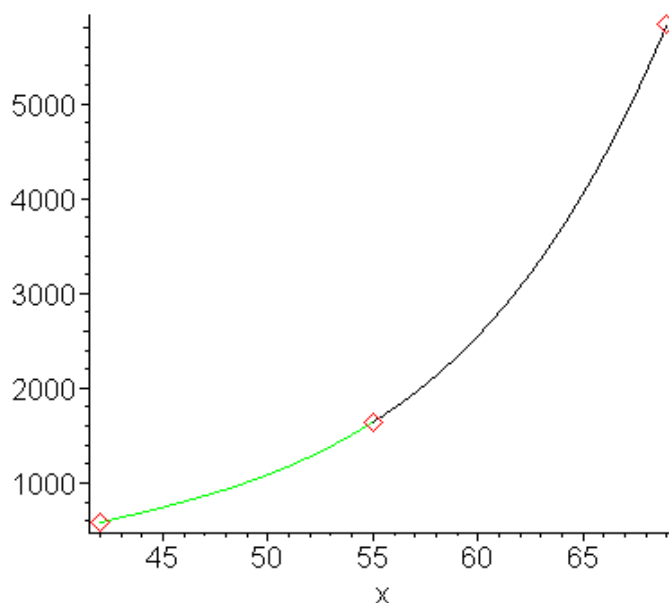


Рис. 6.5. Сплайн-інтерполяція

6.5. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЗГЛАДЖУВАННЯ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

6.5.1. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЗГЛАДЖУВАННЯ

Апроксимація (лат. approximate — наближати) — це процес заміни складних математичних об'єктів простішими, які мають схожі властивості або значення. Наприклад, криві лінії можуть бути наближені ламаними, а неперервні функції — многочленами. Якщо потрібно знайти функцію, яка проходить поблизу великої кількості заданих точок, така задача називається *згладжуванням*. Якщо ж потрібно підібрати функцію, яка наближає іншу за певною нормою, то це вже класична задача апроксимації. Проте в сучасній практиці згладжування часто також розглядають як один із різновидів апроксимації.

6.5.2. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Метод найменших квадратів (МНК) є одним із найпоширеніших підходів до згладжування даних (у випадку апроксимації застосовується його *інтегральна форма*). Цей метод широко використовується для обробки експериментальних даних, а також у побудові та дослідженні моделей у фізиці, біології, техніці, економіці та соціальних науках.

Суть методу полягає у визначенні параметрів функції заданої форми, яка найкращим чином описує залежність змінної y від змінної x .

Припустимо, що необхідно встановити функціональний зв'язок між двома емпіричними величинами x та y , значення яких наведені у наступній таблиці:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Точки $(x_i; y_i)$ координатної площини прийнято називати *експериментальними*.

Оцінюючи розміщення експериментальних точок на координатній площині, можна сформулювати припущення щодо характеру залежності між досліджуваними величинами та визначити відповідну форму функції $y = f(x)$.

В найпростішому випадку, що зображений на рис. 6.5, ми спробуємо апроксимувати дані за допомогою лінійної залежності між x і y , яку можна описати формулою:

$$y = kx + b. \quad (6.9)$$

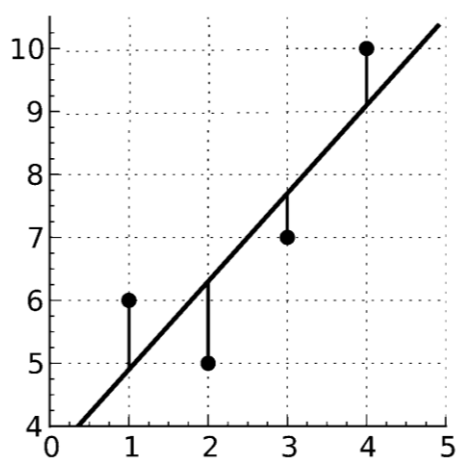


Рис. 6.6. Апроксимація лінійною залежністю.

Рівняння прямої представимо у вигляді

$$y - (kx + b) = 0.$$

Підставляючи замість x и y значення координат цих точок $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ у вираз $y - (kx + b)$, одержуємо:

$$y_1 - (kx_1 + b) = \delta_1, y_2 - (kx_2 + b) = \delta_2, \dots, y_n - (kx_n + b) = \delta_n,$$

де $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — називають *похибками* (відхиленнями, нев'язками).

Очевидно, що чим менші ці похибки за абсолютним значенням, тим точніше пряма, задана рівнянням $y = kx + b$, відображає залежність між змінними.

Суть методу найменших квадратів полягає у підборі таких коефіцієнтів k і b апроксимуючої функції, які мінімізують суму квадратів відхилень (похибок):

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b))^2 \rightarrow \min \quad (6.10)$$

Зазначимо, що необхідність підсумовувати саме квадрати похибок виникає остільки, оскільки при додаванні самих похибок додатні й від'ємні значення можуть взаємно компенсуватись, що спотворює реальну оцінку точності апроксимації δ_i .

У зв'язку з тим, що у вказаній рівності x_i і y_i — задані числа, а k і b — невідомі, то суму S можна розглянути як функцію двох змінних k і b : $S = S(k, b)$. Поставлена задача буде вирішена, якщо ми знайдемо екстремум цієї функції, і цей екстремум буде мінімумом.

Запишемо необхідну умову існування екстремума функції двох змінних:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b))(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b)) x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b))(-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b)).$$

Прирівнюючи часткові похідні до нуля, одержуємо лінійну систему двох рівнянь із двома невідомими k і b :

$$\begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b)) x_i = 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (kx_i + b)) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

У результаті перетворення першого рівняння системи отримаємо:

$$- \sum_{i=1}^n y_i x_i + k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Перетворюючи друге рівняння системи, отримаємо

$$- \sum_{i=1}^n y_i + k \sum_{i=1}^n x_i + bn = 0.$$

Збираючи результати, отримуємо систему:

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ k \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (6.12)$$

Ця система називається *нормальною системою*.

Із (6.12) визначаємо значення k і b , та підставляємо їх у рівняння прямої. Той факт, що функція $S = S(k, b)$ в знайдений точці (k, b) є точкою мінімуму, визначається за допомогою часткових похідних другого порядку, зокрема — аналізом знаку визначника матриці Гессе.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = -2 \sum_{i=1}^n (-x_i) x_i = 2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (-1) = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k \partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (-x_i) = 2 \sum_{i=1}^n x_i.$$

Обчислимо $\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial k^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial k \partial b} \right)^2$.

$$\Delta = 4n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

Очевидно, $\Delta > 0$, і, таким чином, у знайденій точці (k, b) функція $S = S(k, b)$ має екстремум; а так як $\partial^2 S / \partial k^2 > 0$, то, згідно з достатньою умовою екстремума функції двох змінних, у точці (k, b) функція має мінімум.

Отримана функція $y = kx + b$ називається *лінійною регресією*, а коефіцієнти k і b — *коефіцієнтами регресії*.

Зв'язок між експериментальними даними може наближено мати квадратичний характер (як показано на рис. 6.7). У такому разі завдання зводиться до визначення коефіцієнтів a_2, a_1, a_0 для складання рівняння виду $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

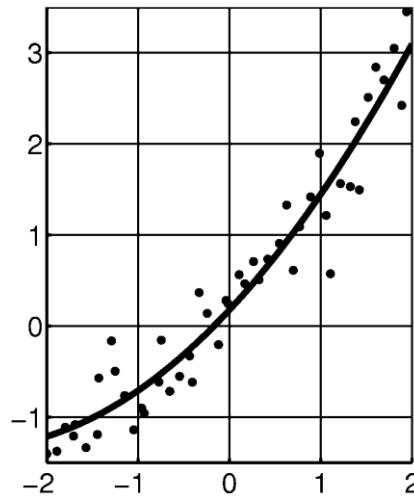


Рис. 6.7. Апроксимація квадратичною залежністю.

Проводячи аналогічні розрахунки, легко показати, що для визначення коефіцієнтів a_2, a_1, a_0 слід розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (6.13)$$

На практиці в якості наближуючи функцій, крім $y = kx + b$ й $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, залежно від характеру точкового графіка часто використовуються такі функції:

$$y = ax^m, y = ae^{mx}, y = \frac{1}{ax+b}, y = \frac{a}{x} + b, y = \frac{x}{ax+b}, y = a \ln x + b.$$

$$y = ax^m, y = ae^{mx}, y = \frac{1}{ax+b}, y = \frac{a}{x} + b, y = \frac{x}{ax+b}, y = a \ln x + b.$$

6.5.3. ЗГЛАДЖУВАННЯ КРИВИМИ БЕЗ'Є

Як вже відзначалось, інтерполяція означає побудову кривої, що проходить через заданий набір точок. Застосовані методи інтерполяції добре підходять для обробки даних, отриманих під час експериментів або чисельного моделювання. Прикладами можуть слугувати обводи крила літака, елементи двигуна чи інші конструктивні деталі.

Однак існує окремий тип задач, у яких результат залежить не лише від технічних параметрів, а й від зовнішнього вигляду. Йдеться, наприклад, і в першу чергу, про моделювання кузова автомобіля. В цьому випадку важливу роль відіграють не лише числові характеристики, а й досвід, інтуїція та художнє бачення розробника. Часто процес вимагає активної участі користувача та оперативного коригування форми.

Раніше розглянуті кубічні сплайни виявляються не дуже зручними для такої взаємодії. Керування, наприклад, через дотичні не дає чіткого уявлення про поведінку кривої, що ускладнює її налаштування в реальному часі.

На початку 1960-х років інженер компанії «Renault» П'єр Без'є запропонував новий підхід до математичного опису кривих, який застосував у системах тривимірного моделювання поверхонь. Його метод ґрунтувався на геометричних принципах, однак пізніше було встановлено, що одержані рівняння відповідають поліномам Бернштейна.

Конструювання кривої Без'є здійснюється за допомогою опорного багатокутника, вершини якого відповідають радіус-векторам контрольних точок (рис. 6.8).

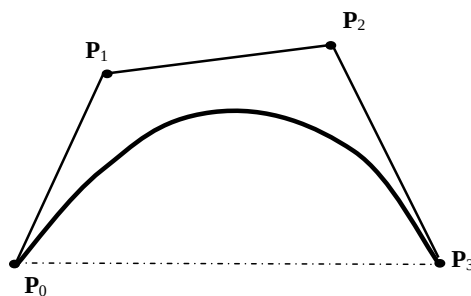


Рис. 6.8. Крива Без'є

Криві Без'є мають ряд характерних властивостей, які визначають їхню поведінку та зручність у використанні в геометричному моделюванні:

- базисні функції, що використовуються для побудови кривої, завжди мають додатні значення на відрізку побудови;
- ступінь полінома, що формує окрему ділянку кривої, дорівнює кількості контрольних точок мінус один;
- геометрична форма кривої загалом наближається до контуру багатокутника, утвореного контрольними точками;
- початкова та кінцева точки кривої точно відповідають першій і останній точкам багатокутника;
- дотичні в кінцях кривої спрямовані вздовж першого та останнього відрізка багатокутника, що визначає напрямок кривої на межах;
- крива повністю розташовується всередині опуклої оболонки багатокутника — тобто вона не виходить за межі найменшого опуклого контурного полігону, утвореного заданими точками;
- властивість зменшення варіації полягає в тому, що крива перетинає будь-яку пряму не частіше, ніж це робить її визначальний багатокутник;
- для побудови замкненої кривої Без'є потрібно, щоб перша та остання точки багатокутника збігалися;
- афінна інваріантність означає, що криву можна трансформувати за допомогою афінного перетворення, впливаючи лише на її контрольні точки, після чого побудована з нових точок крива залишатиметься геометрично узгодженою з початковою.

Ці властивості роблять криві Без'є потужним інструментом у комп'ютерній графіці, САД-системах та дизайні.

Спираючись на наведені властивості, стає можливим досить легко передбачити форму кривої лінії за зовнішнім виглядом багатокутника, утвореного контрольними точками (рис. 6.9).

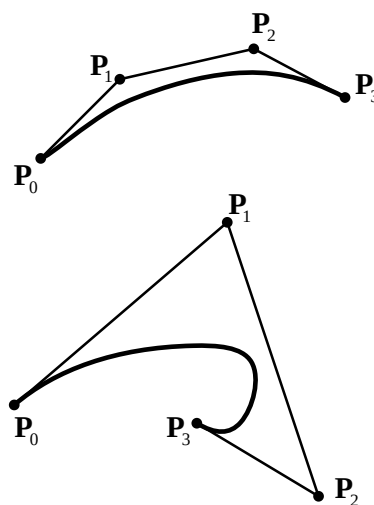


Рис. 6.9. Форма кривої Без'є, відповідна до багатокутника

З математичної точки зору параметричне задання кривої Без'є записується у такій базисній формі:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (6.14)$$

де базис (функція апроксимації) представлено поліномами Бернштейна:

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (6.15)$$

В цій формулі число сполучень позначено як

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

З наведених формул випливає, що

$$J_{n,i}(t) = \frac{n! t^i (1-t)^{n-i}}{i!(n-i)!}. \quad (6.16)$$

Треба враховувати відомі тотожності, а саме: $(0)^0 \equiv 1$ і $0! \equiv 1$. Наприклад, для $n=3$ (маємо чотири вершини, тобто чотирикутник), тоді

$$J_{3,i}(t) = \frac{3! t^i (1-t)^{3-i}}{i!(3-i)!} = \frac{6 t^i (1-t)^{3-i}}{i!(3-i)!}$$

Для $i=0$

$$J_{3,0}(t) = \frac{6 t^0 (1-t)^{3-0}}{0!(3-0)!} = \frac{6 \cdot 1 \cdot (1-t)^3}{1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot (1-t)^3}{6} = (1-t)^3$$

Збираючи результати для всіх точок маємо:

$$\left. \begin{aligned} i=0, & \quad J_{3,0}(t) = (1-t)^3; \\ i=1, & \quad J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2; \\ i=2, & \quad J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t); \\ i=3, & \quad J_{3,3}(t) = t^3. \end{aligned} \right\}. \quad (6.17)$$

У матричній формі вираження (6.14) можна записати як

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}, \quad (6.18)$$

де $\mathbf{F} = [J_{n,0} \quad J_{n,1} \quad J_{n,2} \quad \dots \quad J_{n,n}]$; $\mathbf{G}^T = [\mathbf{P}_0 \quad \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_n]$.

Для випадку, що розглядається, $n=3$, тому

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

В іншій формі, після перегрупування, $\mathbf{P}(t)$ можна записати

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{G},$$

або

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи виведені формули, можна реалізувати комп'ютерну візуалізацію кривої Без'є на основі заданого чотирикутника $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ за допомогою відповідного програмного забезпечення.

6.5.4. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Моделювання поверхонь (наприклад, форми кузовних елементів автомобілю) розглянемо на прикладі поверхонь Без'є. Вони визначаються за допомогою двох незалежних параметрів u і v та задаються у вигляді наступного векторного виразу:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} J_{i,n}(u) J_{j,m}(v). \quad (6.20)$$

Вектори $\mathbf{P}_{ij}$ називаються контактними точками поверхні. При комп'ютерному проєктуванні звичайно використовують $m=n=3$ і тоді повинні бути представлено 16 контактних точок. Привабливість поверхні Без'є полягає в її здатності згладжувати нерівності просторових форм, що особливо цінується в дизайні та інженерному моделюванні. Слід зазначити, що порядок розташування контрольних точок суттєво впливає на геометрію отриманої поверхні. Тому доцільно розміщувати 16 точок у вигляді чотирьох послідовностей, кожна з яких містить по чотири точки.

Під час побудови частини поверхні за допомогою формули (6.20) формується окремий фрагмент — так званий шматок поверхні. Щоб з'єднати кілька таких шматків у єдину структуру, необхідно забезпечити спільність крайових точок між ними. Саме так, наприклад, може бути створена безперервна модель кузова автомобіля.

Для досягнення бажаного візуального результату можна змінювати координати окремих контрольних точок, що легко реалізується в середовищах інтерактивного моделювання.

Розглянемо побудову поверхні Без'є, використовуючи наступні чотири ряди контрольних точок:

$$\begin{aligned} &P11(1,4,4), P12(2,3,5), P13(3,2,6), P14(4,1,7), \\ &P21(2,4,3), P22(3,3,4), P23(4,2,5), P24(6,2,6), \\ &P31(3,5,2), P32(4,4,3), P33(5,3,4), P34(6,2,5), \\ &P41(4,5,1), P42(5,4,2), P43(6,3,3), P44(7,2,4). \end{aligned}$$

На початковому етапі слід сформувати три окремі двовимірні матриці: один для абсцис, інший для ординат і ще один для аплікат контрольних точок.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, AY = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, AZ = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Випишемо біноміальні формули багаточленів Бернштейна третього порядку:

$$\begin{aligned} &(1-u)^3 \\ &3u(1-u)^2 \\ &3u^2(1-u) \\ &u^3 \end{aligned}$$

і, відповідно,

$$\begin{aligned} & (1 - v)^3 \\ & 3 v (1 - v)^2 \\ & 3 v^2 (1 - v) \\ & v^3 \end{aligned}$$

Для кожної із трьох координат F_x , F_y , F_z шуканої поверхні Без'є запишемо формулу в розгорнутому й конкретному вигляді:

$$\begin{aligned} F_x(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A X_{ij} J_{i,n}(u) J_{j,m}(v), \\ F_y(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A Y_{ij} J_{i,n}(u) J_{j,m}(v), \\ F_z(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A Z_{ij} J_{i,n}(u) J_{j,m}(v) \end{aligned}$$

В результаті маємо поверхню, що відображена на рис. 6.10.

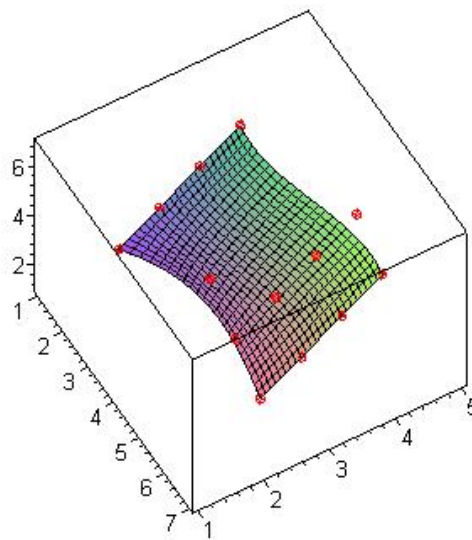


Рис. 6.10. Поверхня Без'є.

6.6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОБОТИ З СИСТЕМАМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) — в лінійній алгебрі система лінійних рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Це система m лінійних рівнянь з n невідомими. Таблиця, яку утворюють коефіцієнти системи, називають матрицею. Таким чином, *матрицею* називають таблицю, що складається з числових елементів і має m рядків та n стовпців. Так як з кожною матрицею пов'язана система лінійних алгебраїчних рівнянь, то операції з матрицями еквівалентні перетворенням СЛАР. Алгебра матриць сформована таким чином, щоб рішення матричного рівняння $AX = B$ в сенсі знаходження X було еквівалентно знаходженню рішення СЛАР.

Таким чином *вектор-рядком* є матриця, яка містить лише один рядок, а *вектор-стовпцем* — та, що складається лише з одного стовпця. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, таку матрицю називають *нульовою*.

Операцію додавання матриць можна виконувати лише для тих матриць, які мають однакову кількість рядків і стовпців. Щоб знайти їхню суму, потрібно додати між собою відповідні елементи кожної з матриць:

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 35 \\ 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 56 \\ 35 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

Операція *множення* (або *ділення*) матриці на число полягає в множенні (або діленні) кожного її елемента на це число. Наприклад

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Виконати *множення* двох матриць можна тільки в тому випадку, якщо кількість стовпців у першій матриці дорівнює кількості рядків у другій. *Добутком* двох матриць розмірами $n \times m$ і $m \times p$ буде матриця розміром $n \times p$, елементи якої складаються із сум добутоків елементів рядка першої матриці на відповідний елемент стовпця другий:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 11 & 25 & 10 \end{pmatrix},$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (AB)_y = \sum_k A_{ik} B_{ki}$$

Операція *транспонування* матриці полягає у заміні її рядків на стовпці або стовпців на рядки. Наприклад, матриця A транспонується в A^T :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
$$A_{ij} = A_{ji}^T \quad A_{\gamma} = A_{ji}^T$$

Квадратною називається матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців. *Головну діагональ* утворюють елементи, що розміщені від лівого верхнього до правого нижнього кута, а *побічну* — від правого верхнього до лівого нижнього. Матриця, у якій на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається *одиничною*.

Визначник (детермінант) — число, що пов'язане із квадратною матрицею, та що обчислюється за спеціальним правилом.

Властивості визначника.

- При транспонуванні матриці значення її визначника залишається незмінним.
- Якщо у матриці є хоча б один рядок або стовпець, що складається виключно з нулів, то визначник такої матриці дорівнює нулю.
- Заміна місцями двох рядків або стовпців призводить до зміни знака визначника на протилежний.
- У випадку, коли два рядки або два стовпці матриці збігаються, її визначник стає рівним нулю.
- Визначник також дорівнює нулю, якщо два рядки або два стовпці пропорційні між собою.
- Множення всіх елементів одного рядка чи стовпця на ненульове число викликає пропорційне множення всього визначника на це число.
- Додавання до одного рядка (чи стовпця) іншого, попередньо помноженого на деяке ненульове число, не змінює значення визначника.

Приведення матриці до трикутного виду й обчислення визначника по методу Гауса. Приведення матриці до трикутного виду потрібно, насамперед, для розв'язку *систем лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР). Однак, для простоти весь матеріал буде розглянутий на прикладі обчислення визначника матриці. Адже найшвидший спосіб обчислити визначник — привести матрицю до трикутного виду, а потім перемножити її діагональні елементи. Якщо ж ви прагнете застосувати матеріал до розв'язку СЛАР, то єдине що вам потрібно зробити — додати до операцій з рядками матриці такі ж операції з елементами правої частини СЛАР (й не забути знайти значення невідомих величин за допомогою зворотного ходу алгоритму Гауса).

Далі строки й стовпці матриць нумеруються з нуля. Елементи матриці позначаються, як a_{ij} , де $i = 0, \dots, N-1$ — номер строки, $j = 0, \dots, N-1$ — номер

стовпця. Для скорочення запису рядка матриці позначаються, як $\bar{a}_i$: з ними можна робити операції так само, як з векторами.

Матрицю можна привести до *трикутного* виду за допомогою *алгоритму Гауса*. Ідея алгоритму полягає в тому, що елементи a_{ij} , $i > j$ обнуляються шляхом вирахування строки номер j , помноженої на a_{ij}/a_{jj} , зі строки номер i . Формально алгоритм виглядає так:

```
for j = 0..N - 2
  for i = j + 1..N - 1
     $\bar{a}_i \leftarrow \bar{a}_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \bar{a}_j$ 
```

Алгоритм будує верхнетрикутну матрицю, змінюючи вихідну матрицю. Якщо вихідна матриця повинна зберегтися, то перед початком роботи алгоритму потрібно створити її копію.

Незважаючи на те, що в алгоритмі показано два вкладені цикли, насправді в ньому три цикли, тому що вирахування рядків — операція над декількома елементами. Відповідно, час роботи алгоритму становить $O(N^3)$.

Алгоритм Гауса не буде працювати, якщо в якийсь момент виявиться $a_{jj} = 0$. Необхідна й достатня умова того, що в алгоритмі не виникне ділення на нуль — усі головні мінори матриці повинні бути відмінні від нуля.

Після приведення матриці до верхньотрикутного вигляду її визначник можна обчислити перемноженням діагональних елементів:

```
 $d \leftarrow a_{00}$ 
for i = 0..N - 1
   $d \leftarrow d a_{ii}$ 
```

Визначник трикутної матриці, обчислений таким чином, буде дорівнює визначнику вихідної матриці, тому що визначник матриці не міняється, якщо до одного рядку матриці додати інший рядок, помножену на довільне число.

Приклад роботи алгоритму Гауса.

Обчислимо визначник наступної матриці по наведеному вище алгоритму:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Припустимо, що комп'ютер при обчисленнях зберігає не більш 5-ти значущих цифр: так більш наочно видні помилки округлення, що

накопичуються. Помножимо нульовий рядок на $4/3$ й віднімемо її з першої строки:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1.333 & -1 & -3.3333 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогічно віднімемо нульовий рядок із другий і третьої рядків (помноживши її перед цим на $1/3$ й $2/3$ відповідно):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1.3333 & -1 & -3.3333 \\ 0 & 3.3333 & 3 & 1.6667 \\ 0 & 1.6667 & -1 & -1.6667 \end{pmatrix}$$

Віднімемо перший рядок із другий і третьої (строки в нас нумеруються з нуля!), помноживши її перед цим на $3.3333/1.3333$ й $1.6667/1.3333$ відповідно:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1.3333 & -1 & -3.3333 \\ 0 & 0 & 5.5 & 10.0001 \\ 0 & 0 & 0.2501 & 2.25001 \end{pmatrix}$$

Нарешті, віднімемо із третьої строки другу, помножену на $0.2501/5.5$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1.3333 & -1 & -3.3333 \\ 0 & 0 & 5.5 & 10.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0454 \end{pmatrix}$$

Перемножуючи діагональні елементи матриці, одержимо значення визначника:

$$44.977.$$

Неважко здогадатися, що якби ми обчислювали визначник точно (наприклад, з використанням дробів засобами систем комп'ютерної математики), те він був би рівний 45.

Зворотні матриці. Одержати зворотну матрицю можливо лише у випадку, коли вихідна матриця є квадратною. Якщо визначник матриці дорівнює нулю, така матриця вважається *особливою* (або *виродженою*) і не

має оберненої. Лише для *неособливих* матриць, у яких *визначник відмінний від нуля*, можливо виконати обернення. Тому перед знаходженням зворотної матриці обов'язково обчислюють визначник. У разі, якщо він не дорівнює нулю, можна переходити до обчислення. Один із способів знаходження зворотної матриці — метод Гауса, який умовно можна позначити як

$$AE \rightarrow EA^{-1}$$

де E — одинична матриця;

A^{-1} — матриця, зворотна до даної A . Після застосування кожної операції до першої матриці застосуємо ту саму операцію до другої. Коли приведення першої матриці до одиничного вигляду буде завершено, друга матриця виявиться рівною A^{-1} . Наприклад

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

У випадку *симетричних* матриць систем лінійних рівнянь, що часто виникають на практиці (зокрема, при реалізації *методу найменших квадратів*), доцільно використовувати *метод квадратного кореня*. Послідовність дій цього методу виконується за таким алгоритмом. Матричний запис системи рівнянь $AX = B$.

Процес розв'язання СЛАР складається з двох етапів:

1. Прямий хід, при якому початкова симетрична матриця визначається добутком двох взаємно транспонованих трикутних матриць: $A = U^T U$;

2. Обернений метод квадратного кореня, при якому відбувається послідовне розв'язання двох трикутних систем:

$$\begin{aligned} U^T y &= b; \\ Ux &= y \end{aligned}$$

У зв'язку з симетричністю матриці A її можна представити у вигляді $A = LDL^T$, де L — одинична нижня трикутна матриця, D — діагональна матриця.

Таким чином маємо систему

$$LDL^T x = b.$$

Розв'язок x шукаємо як послідовність розв'язків двох трикутних СЛАР:

$$LDy = b,$$

$$L^T x = y.$$

Запишемо більш детально.

$$U = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$$U^T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

При цьому

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}; t_{ij} = \sqrt{a_{11} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, \quad 1 < i \leq n;$$

$$t_{1j} = \frac{a_{11} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, \quad i < j;$$

$$t_{ij} = 0, \quad i > j;$$

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}; \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{11}}.$$

Після цього значення матриці X будуть знаходитись як

$$x_n = \frac{y_1}{t_{nn}}; \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} x_k}{t_{ii}}.$$

Розв'язання системи лінійних рівнянь із *трьохдіагональною матрицею* доцільно здійснювати за допомогою методу *прогонки*. У такій ситуації система має наступну структуру

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m-1n-2} & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Алгоритм наступний:

- прямий хід

$$A_1 = -a_{12} / a_{11};$$

$$B_1 = a_{1n+1} / a_{11};$$

$$C_i = A_{i-1}a_{ii-1} + a_{ii}, \quad 1 < i \leq n-1;$$

$$A_i = (a_{in+1} - a_{ij-1}) / C_i;$$

$$B_i = (a_{in+1} - a_{ij-1}) / C_i;$$

- розв'язок знаходимо зворотнім ходом

$$x_n = (a_{nn+1} - a_{nn-1}B_{n-1}) / (a_{nn} + a_{ann-1}A_{n-1});$$

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad n > i \geq 1.$$

6.7. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Найпростішим способом чисельного диференціювання функції є наближення похідної за допомогою січної. У цьому випадку кутовий коефіцієнт дотичної замінюється кутовим коефіцієнтом січної, що проходить через дві точки, які знаходяться дуже близько одна до одної на графіку функції. Це наближення виражається формулою по суті скінченно-різницевого типу:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

де h — деяка дуже маленька величина.

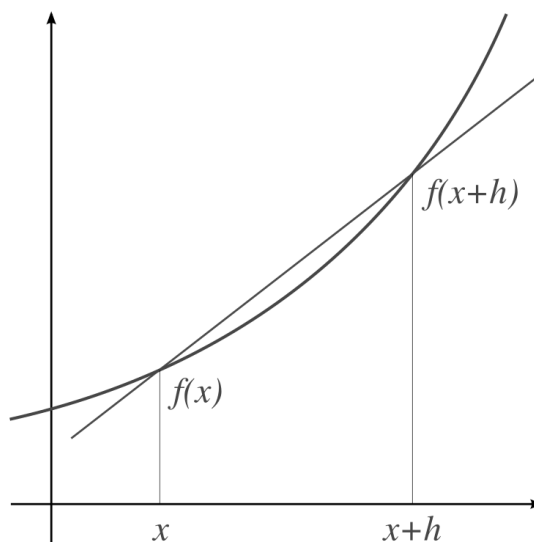


Рис. 6.11. Геометрична інтерпретація чисельного диференціювання

Розглянемо приклад. Знайдемо похідну в точці $x = 2$ для функції

$$\varphi(x) = 4x^2 + x - 1.$$

Розв'язок:

$$\varphi'(2) = \frac{4 \cdot 2,00001^2 + 2,00001 - 1 - 4 \cdot 1,99999^2 - 1,99999 + 1}{2 \cdot 0,00001} = 17,000001.$$

Точне значення

$$\varphi'(2) = 8 \cdot 2 + 1 = 17.$$

Процес чисельного диференціювання функції, заданої у вигляді таблиці, залежить від того, чи є крок між значеннями аргументу рівномірним. Якщо значення аргументу розташовані рівновіддалено, доцільно застосовувати формули Ньютона для інтерполяційних вузлів, а також трьох-, чотирьох- або п'ятиточечні схеми. Існують також більш точні методи, які використовують сім, дев'ять або дванадцять точок.

У випадку рівновіддалених вузлів чисельне диференціювання за формулами Ньютона набуває такого вигляду:

- трьохточечна схема (див. п. 6.4.2.)

$$y'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0);$$

- чотирьохточечна схема

$$y'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0);$$

- п'ятиточечна схема

$$y'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5});$$
$$y''(x) = \frac{1}{h}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11\Delta^4 y_0}{12} - \frac{5\Delta^5 y_0}{6}).$$

Для чисельного диференціювання функції, що задана таблично, можна застосовувати як поліном Лагранжа, так і методи сплайн-інтерполяції — незалежно від того, чи вузли рівновіддалені, чи ні.

6.8. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

У випадках, коли підінтегральна функція має складний вигляд і аналітичне інтегрування ускладнене або неможливе, доцільно використовувати чисельні методи. Найпростішим і найпоширенішим серед

них є *метод трапецій*. Цей метод ґрунтується на заміні криволінійної фігури під графіком функції на набір трапецій, площі яких легко обчислити. Якщо інтеграл обчислюється на відрізку ab , то формула трапецій має вигляд

$$\int_a^b y dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right); \quad h = \frac{b-a}{n},$$

де n — число інтервалів розбивки відрізка ab .

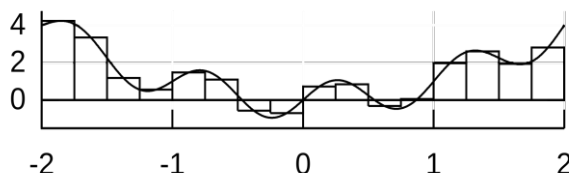


Рис. 6.12. Геометрична інтерпретація чисельного інтегрування

Досягти заданої точності під час обчислення інтеграла можливо шляхом контролю різниці між послідовними наближеними значеннями. Цього можна досягти, поступово збільшуючи кількість підінтервалів, на які розбивається область інтегрування. Іншими словами, чим більше ми ділимо інтервал, тим менше буде похибка між поточним наближеним значенням інтеграла та попереднім.

Таким чином, контроль точності обчислення забезпечується через аналіз зміни результатів при переході до більш частішої сітки інтегрування.

Застосування *формули Сімпсона* можливе подібним способом, однак лише за умови, що кількість інтервалів розбиття відрізка інтегрування є парною. Ця формула має такий вигляд:

$$I = \int_a^b y dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + \dots)]$$

П'яти- або сьомиточечні формули інтегрування дозволяють досягти вищої точності за однакової кількості інтервалів розбиття, порівняно з простішими методами.

П'ятиточечна формула

$$I = 2\Delta x(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)/45.$$

Сьомиточечна формула

$$I = 0,3\Delta x(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6).$$

Розбивання відрізка інтегрування на менші підвідрізки дає змогу застосовувати останні дві формули з більшою гнучкістю та ефективністю.

Методи чисельного інтегрування, розглянуті вище, також придатні для функцій, заданих у табличній формі, за умови рівномірного розташування значень аргументу. У такому випадку замість аналітичних виразів використовують табличні ординати. Іноді доцільно звернутися до більш точних чисельних підходів — таких як *методи Гауса* або *Чебишева*. Завдяки спеціально підібраним вузлам та ваговим коефіцієнтам, ці методи дозволяють отримати точні результати навіть за меншої кількості точок.

Метод Гауса:

$$I = \sum_{i=1}^n C_i y_i; \quad C_i = \frac{(b-a)S_i}{2}; \quad y_i = f(x_i);$$

$$x_i = \frac{(b-a)}{2} + \frac{t_i(b-a)}{2},$$

де S_i і t_i — постійні методу.

Наприклад, для двох вузлів можна отримати метод 3-го порядку точності

$$I \approx \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right).$$

Метод Чебишева:

$$I = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n y_i;$$

$$y_i = f[a + (b-a)x_i],$$

де x_i — постійні методу.

6.9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь — це сукупність алгоритмів, що використовуються для знаходження наближеного кореня рівнянь, які не можуть бути вирішені аналітично. Ці методи зазвичай *ітераційні*, тобто, знаходять рішення шляхом послідовного уточнення початкового наближення.

Основні чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь:

- метод розподілу відрізка навпіл (*метод бісекції*). Цей метод заснований на принципі розподілу відрізка, що містить корінь, навпіл і вибір тієї половини, в якій зберігається корінь. Цей процес повторюється, доки не буде досягнуто бажаної точності;

- *метод Ньютона (метод дотичних)*: дуже потужний ітераційний метод, що використовує похідну функції для знаходження кореня. На кожній

ітерації будується дотична до графіка функції у поточній точці, і точка перетину дотичної з віссю використовується як наступне наближення кореня;

- *метод січних (метод хорд)*: подібний до методу Ньютона, але замість похідної використовується січна, що проходить через дві точки на графіку функції;

- *метод простих ітерацій*: рівняння перетворюється на вигляд $x = \varphi(x)$, і ітераційний процес починається з початкового наближення x_0 . На кожній ітерації використовується формула $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, доки не буде досягнуто збіжності.

Першим етапом перед застосуванням чисельного методу для знаходження кореня нелінійного рівняння є процедура відокремлення кореня. Вона полягає у виявленні інтервалу на осі абсцис, у межах якого функція змінює знак. У багатьох випадках практичного характеру такі інтервали можна визначити, спираючись на фізичний зміст задачі. Якщо ж встановити границі інтервалу з фізичних міркувань неможливо, слід вдаватися до поступового пошуку проміжку, на якому відбувається зміна знака функції.

6.9.1. МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА (МЕТОД ДОТИЧНИХ)

З геометричної точки зору цей метод передбачає заміну дуги графіка функції $y = f(x)$ на її дотичну. Якщо відомо, що корінь нелінійного рівняння знаходиться в інтервалі (a, b) , і при цьому перша та друга похідні функції є неперервними на цьому проміжку й не змінюють знаку, тоді можна скористатися ітераційною формулою такого вигляду:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (6.21)$$

де x_i — попереднє значення x ;
 x_{i+1} — наступне значення x ;
 $f(x)$ — значення функції;
 $f'(x)$ — значення її першої похідної.

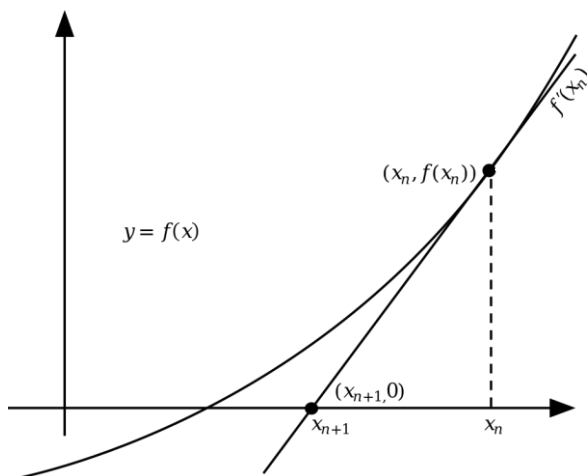


Рис. 6.13. Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Значення початкового наближення x_0 залежить від знака добутку значення функції і її другий похідної:

$$x_0 = a, \text{ якщо } f(x) \cdot f''(x) < 0 \text{ і}$$

$$x_0 = b, \text{ якщо } f(x) \cdot f''(x) > 0.$$

Наперед задаючись величиною розбіжності $x_{i+1} - x_i$ можна обчислити корінь рівняння з бажаною точністю. Збіжність методу досить швидка.

У багатьох випадках обчислення першої похідної функції є складним або незручним. Тому замість класичного методу дотичних (методу Ньютона) застосовують модифікований підхід, в якому не потрібно явно диференціювати функцію. У цьому випадку кутовий коефіцієнт дотичної замінюється нахилом хорди, проведеної через дві точки на графіку функції у діапазоні $(-10^{-5}, +10^{-5})$.

6.9.2. МЕТОД СІЧНИХ (МЕТОД ХОРД)

На відміну від методу дотичних, *метод січних (метод хорд)* не потребує обчислення похідної функції. Його суть полягає в тому, що замість дотичної до графіка функції $y = f(x)$ використовують *хорду*, яка з'єднує дві точки на кривій. Геометрично це означає, що замість дуги графіка функції розглядається пряма, що проходить через дві обрані точки, і саме ця пряма використовується для побудови наступного наближення до кореня.

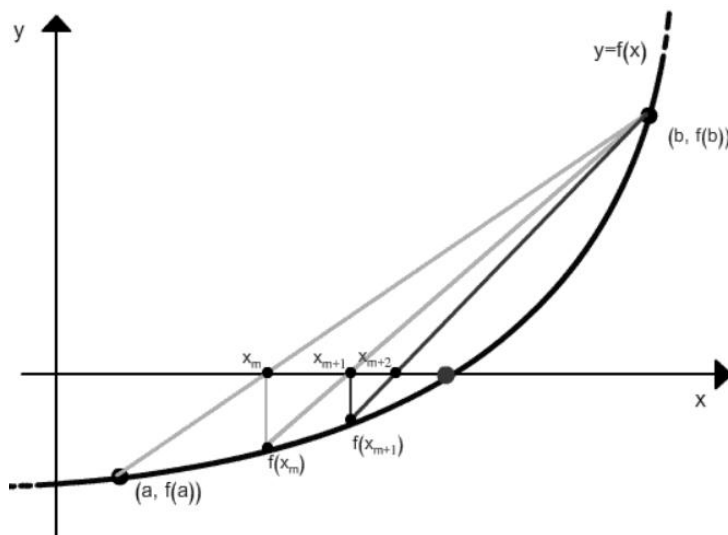


Рис. 6.14. Геометрична інтерпретація методу хорд

Алгоритмічний запис цього методу має вигляд

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x - x_i)}{f(x) - f(x_i)};$$

$$x = b, f'(x) \cdot f''(x) > 0$$

$$x = a, f'(x) \cdot f''(x) < 0. \quad (6.22)$$

Як і для методу дотичних, задаючись величиною розбіжності $x_{i+1} - x_i$, можна обчислити корінь рівняння з бажаною точністю.

6.9.3. МЕТОД ІТЕРАЦІЙ

Як вже зазначалося, у *методі ітерацій*, відомому також як метод *послідовних наближень*, початкове рівняння $f(x) = 0$ перетворюють до еквівалентної форми вигляду $x = \varphi(x)$. Далі розв'язок шукається як границя послідовності, що будується за ітераційною формулою:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i). \quad (6.23)$$

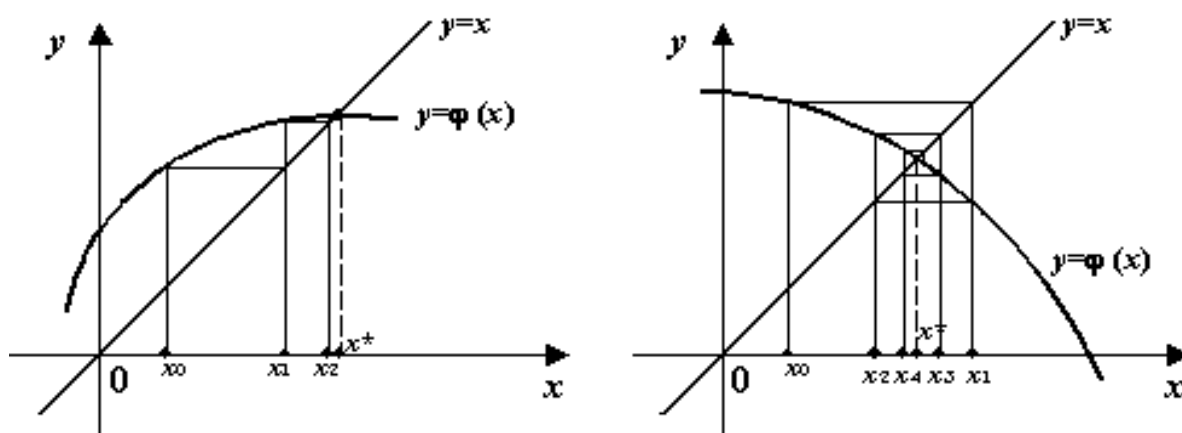


Рис. 6.15. Геометрична інтерпретація методу ітерацій

Збіжність методу ітерацій на заданому інтервалі, де шукається корінь, досить обмежена і визначається наступним критерієм:

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

6.10. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язання систем нелінійних рівнянь аналогічне пошуку кореня одного нелінійного рівняння. Чисельні методи та підходи, які застосовуються для окремих рівнянь, можуть бути адаптовані та розширені для роботи з більш складними системами.

Метод Ньютона-Рафсона. Розглянемо наступну систему нелінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ f_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{array} \right.$$

Ітераційна формула методу має вигляд

$$X_{n+1} = X_n - (F')^{-1} F. \quad (6.24)$$

де

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}; \quad F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

F' — матриця Якобі.

Ітераційний процес не завжди гарантує покращення наближень для шуканих змінних і може не збігатися. Водночас, чим ближчим до справжнього розв'язку є початковий вектор-стовпець X_0 , тим вища ймовірність успішного знаходження розв'язку системи.

Метод послідовних наближень. Систему рівнянь запишемо в зазначених вище позначеннях:

$$F(X) = 0.$$

Перепишемо систему у вигляді

$$X = \varphi(X),$$

тут φ — матриця-стовпець.

Ітераційний процес тоді проводиться за формулами

$$X_{n+1} = \varphi(X_n). \quad (6.25)$$

6.11. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язуючи звичайні диференціальні рівняння першого порядку, потрібно знайти функцію $y(x)$, що задовольняє рівнянню $y' = f(x, y)$ на відрізку ab з початковими умовами виду:

$$y|_0 = f(x_0, y_0).$$

6.11.1. МЕТОД ЕЙЛЕРА

Одним із найпростіших способів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь є *метод Ейлера*. Метод Ейлера — це чисельний спосіб для наближеного вирішення звичайних диференціальних рівнянь, вперше описаний Леонардом Ейлером у 1768 році, і який є одним із найбільш базових методів чисельного інтегрування. У цьому методі відрізок ab розбивається на n інтервалів інтегрування

$$h_1 = \frac{b-a}{n},$$

при цьому в точці x_i дотична замінюється хордою

$$x_i = x_{i-1} + h_1 \quad \text{и} \quad \Delta y_i = h_1 \cdot f(x_i, y_i).$$

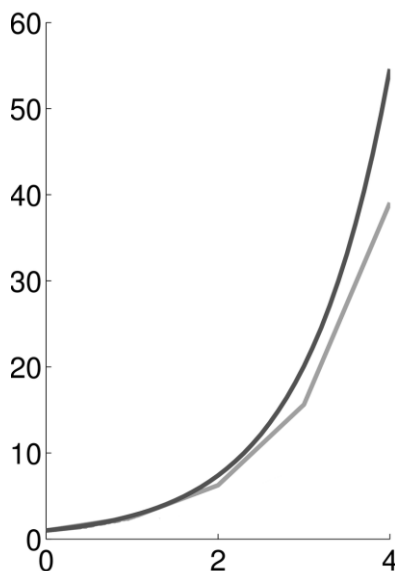


Рис. 6.16. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Тоді

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Наступним кроком є подвоєння кількості інтервалів розбиття відрізка інтегрування, тобто $k=2n$, і повторюють розрахунки:

$$h_2 = \frac{b-a}{k}.$$

Розрахунок закінчується за умови $|y_n - y_k| < \varepsilon$, де ε — задана точність розрахунків.

6.11.2. МЕТОД РУНГЕ-КУТТИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Сьогодні цей метод дуже широко застосовується в обчислювальній практиці для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, тому його часто називають просто *методом Рунге-Кутти*, або RK4.

Його алгоритм має вигляд:

$$\begin{aligned}h &= \frac{b-a}{n}; \\k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i); \\k_2 &= h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}); \\k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}); \\k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3); \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$

Метод Рунге-Кутти є методом 4-го порядку, тобто похибка на кінцевому інтервалі інтегрування становить $O(h^4)$.

Метод RK4 також застосовується для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Зокрема, для системи, що складається з двох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z); \\z' &= g(x, y, z),\end{aligned}$$

він використовується таким чином:

$$\begin{aligned}h &= (b-a)/n; \\k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i, z_i); \\k_2 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + m_1/2); \\k_3 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + m_2/2); \\k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3); \\y_{i+1} &= y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6; \\z_{i+1} &= z_i + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6; \\m_1 &= h \cdot g(x_i, y_i, z_i); \\m_2 &= h \cdot g(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + m_1/2); \\m_3 &= h \cdot g(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + m_2/2); \\m_4 &= h \cdot g(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3).\end{aligned}$$

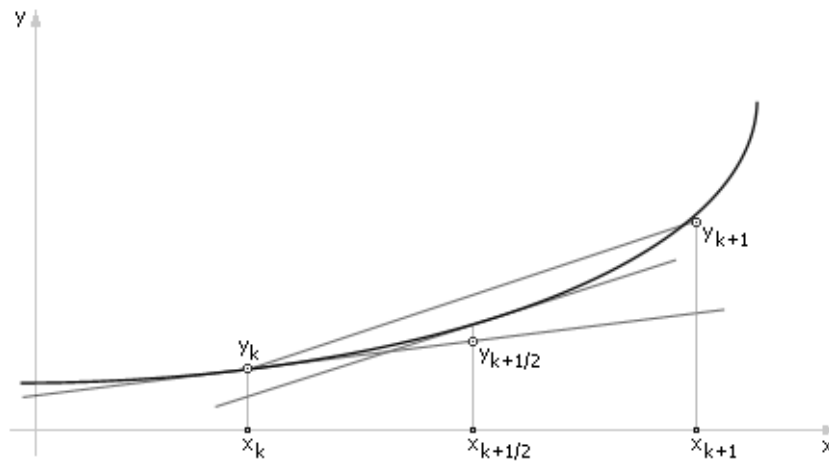


Рис. 6.17. Геометрична інтерпретація розрахунку методом Рунге-Кутти

6.12. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ВИРІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Диференціальне рівняння порядку n

$$y^{[n]} + ay^{[n-1]} + \dots + by' + cy = d$$

можна звести до системи рівнянь першого порядку за рахунок підстановок:

$$\begin{aligned} y_1 &= y'; \\ y_2 &= y_1'; \\ y_3 &= y_2'; \\ y_4 &= y_3'; \\ &\dots \\ y_n &= y_{n-1}'; \\ y_1' &= y_2; \\ y_2' &= y_3; \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \end{aligned}$$

Для розв'язання отриманої системи за заданих початкових умов використовують один із вище описаних методів.

6.13. ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ТА МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розв'язання диференціальних або інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними зазвичай здійснюється чисельними методами. Ці

методи базуються на дискретизації незалежних змінних, тобто представленні їх у вигляді кінцевого набору значень у певних вузлових точках досліджуваної області. Інакше кажучи, область дослідження поділяється на скінченну множину вузлових точок, у яких наближено обчислюються значення шуканої функції. Оскільки обчислення проводяться в межах побудованої сітки, такі методи отримали назву *сіткових*.

Найпоширенішими серед сіткових методів є *метод скінченних різниць* (МСР) та *метод скінченних елементів* (МСЕ). Зазвичай дискретизація застосовується до просторових змінних, створюючи просторову сітку. У результаті виходить система звичайних диференціальних рівнянь для нестационарних задач або система алгебраїчних рівнянь у випадку стаціонарних задач.

Нехай необхідно вирішити рівняння

$$LV(z) = f(z)$$

із заданими крайовими умовами

$$MV(z) = \Psi(z),$$

де L й M — диференціальні оператори, $V(z)$ — фазова змінна, $z = (x_1, x_2, x_3, t)$ — вектор незалежних змінних, $F(z)$ $\Psi(z)$ — задані функції незалежних змінних.

У *методі скінченних різниць*, який застосовувався раніше для лінійної одновимірної задачі, перетворення похідних за просторовими координатами здійснюється шляхом апроксимації їх скінченними різницями. При цьому необхідно обрати крок сітки для кожної координати та тип шаблону. Під шаблоном розуміють набір вузлових точок, значення функції в яких використовуються для обчислення апроксимації похідної у певній точці.

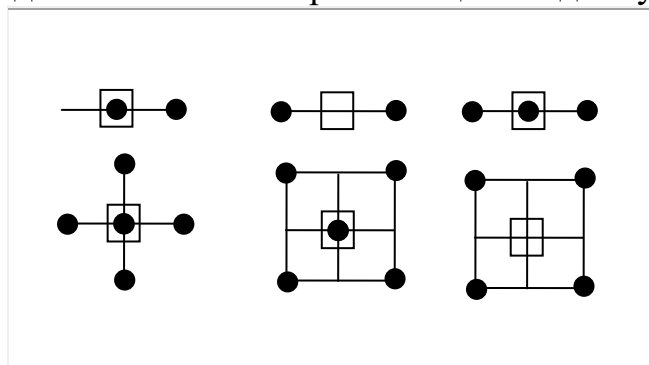


Рис. 6.18. Приклади шаблонів для одновимірних і двовимірних задач

На рисунку вузол, у якому обчислюється похідна, позначено квадратом. Чорні точки вказують на вузли, значення фазової змінної в яких використовуються для побудови апроксимації.

У верхній частині рисунка для одновимірних шаблонів наведено приклади апроксимації похідної $\partial U / \partial x$ в заданій точці. При розгляді

шаблонів зліва направо показано, як кожна конфігурація дає певний варіант апроксимації.

$$\begin{aligned}h \frac{\partial U}{\partial x} &= U_{k+1} - U_k ; \\2h \frac{\partial U}{\partial x} &= U_{k+1} - U_{k-1} ; \\h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1} ,\end{aligned}$$

де h — крок дискретизації по осі x .

Шаблони для двовимірних задач наведені у нижній частині рисунку та відповідають наступним скінченно-різницеvim операторам:

- схема зліва:

$$h^2 \nabla^2 U = C^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = U_{k+1j} + U_{k-1j} + U_{kj+1} + U_{kj-1} - 4U_{kj} ,$$

- схема посередині:

$$2h^2 \nabla^2 U = U_{k+1j+1} + U_{k-1j+1} + U_{k+1j-1} + U_{k-1j-1} - 4U_{kj} ,$$

- схема праворуч:

$$4h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = U_{k+1j+1} - U_{k-1j+1} - U_{k+1j-1} + U_{k-1j-1} ;$$

Тут U_{kj} — значення V в точці (x_{1k}, x_{2j}) ; прийняті однакові значення кроків h по обох координатах.

Метод скінченних елементів заснований на апроксимації не похідних, а самого рішення. Але оскільки воно невідомо, то апроксимація виконується вираженнями з невизначеними коефіцієнтами q_i

$$U(z) \approx Q^T \phi(z), \quad (6.19)$$

де $Q^T = (q_1, q_2 \dots q_n)^T$ — вектор-рядок невизначених коефіцієнтів, $\phi(z)$ — вектор-стовпець *координатних функцій* (опорних функцій), заданих так, що задовольняються граничні умови.

У цьому контексті мається на увазі наближене подання (апроксимація) розв'язку в межах окремих скінченних елементів. Завдяки невеликим розмірам цих елементів можливо використовувати відносно прості апроксимуючі функції для опису поведінки шуканої величини $U(z)$ всередині кожного з них (наприклад, $\phi(z)$ — поліноми низьких ступенів). У

результаті підстановки $U(z)$ у вихідне диференціальне рівняння й виконання операцій диференціювання одержуємо систему нев'язок

$$\Delta(z, Q) = LU(z) - f(z) = L(Q^T \phi(z)) - f(z), \quad (6.20)$$

з якої потрібно знайти вектор Q .

Цю задачу (визначення Q) вирішують одним з наступних методів:

- *метод колокацій*, у якому, використовуючи (6.19), формують n рівнянь із невідомим вектором Q :

$$L(Q^T \phi(z_i)) - f(z_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n, \text{ де } n \text{ — число невизначених коефіцієнтів};$$

- *метод найменших квадратів*, заснований на мінімізації квадратів нев'язок у n точках або в середньому по розглянутій області;
- *метод Гальоркіна*, за допомогою якого мінімізуються в середньому по області нев'язка зі спеціальними ваговими коефіцієнтами, що задаються.

Основні труднощі при застосуванні вказаних методів полягають у тому, щоб знайти інтеграли по області Ω та на її границі, особливо в разі складних криволінійних границь. Саме метод скінченних елементів надає цю можливість: область Ω_i розбивають на ряд підобластей чи елементів простої форми таким чином, щоб $\bigcup \Omega_i = \Omega$ (рис. 6.19). Потім апроксимують $U(\mathbf{r})$ по кусках, тобто окремо на кожному елементі використовуються свої апроксимаційні функції. При цьому мова йде про апроксимації рішення в межах скінченних елементів, а з урахуванням їхніх малих розмірів можна говорити про використання порівняно простих апроксимуючих виразів (наприклад, $\phi(\mathbf{r})$ — поліноми низьких ступенів).

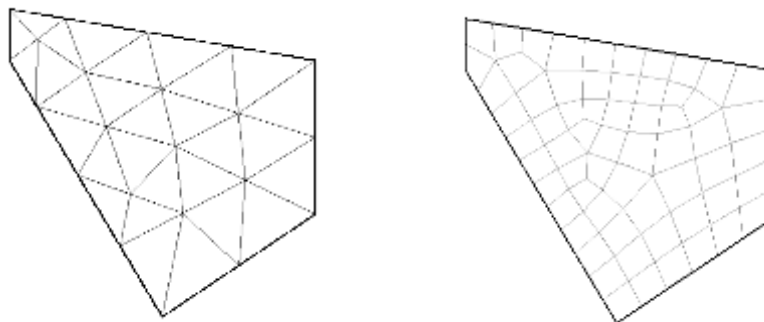


Рис. 6.19. Варіанти розбиття області в методі скінченних елементів.

Найширше метод скінченних елементів (МСЕ) застосовується в системах автоматизованого проектування машинобудівного профілю, зокрема для оцінювання міцності конструкцій. У межах цієї задачі можливе використання підходу, що передбачає алгебраїчну дискретизацію вихідного рівняння пружності (рівняння Ламе). Водночас більш ефективним у практичній реалізації МСЕ є варіаційний підхід, заснований на фундаментальних принципах механіки (див. тему 3).

Відповідно до МСЕ це рішення апроксимується за допомогою координатних функцій і невизначених коефіцієнтів, які стосовно до сукупності скінченних елементів представимо в матричній формі:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}\mathbf{q},$$

де $\mathbf{H}$ — матриця координатних функцій, $\mathbf{q}$ — вектор невизначених коефіцієнтів, і в цьому разі одержуємо (див. рівняння (3.4))

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q}^T (\mathbf{S}\mathbf{H})^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{H}\mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{H})^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{H} dV \right) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q}, \quad (6.21)$$

де $\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{H})^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{H} dV$ — матриця жорсткості.

Відповідно до принципу мінімуму потенційної енергії (див. (3.1) та (3.5)) в стані рівноваги маємо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0},$$

або, диференціюючи (6.21), знаходимо

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B} \quad (6.22)$$

де $\mathbf{B} = \partial A / \partial \mathbf{q}$ — вектор навантажень. Таким чином задача повністю відповідна (3.6), з тією лише різницею, що апроксимація за допомогою координатних функцій і невизначених коефіцієнтів проводиться в границях елемента, після чого вже йде інтегрування, яке, як наслідок, перетворюється у підсумовування по всім скінченим елементам (процедура ансамблювання).

Таким чином, задача аналізу міцності, згідно МСЕ, зведена до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6.22). Матриця жорсткості виявляється сильно розрідженою, тому для рішення (6.22) застосовують методи розріджених матриць (див. п. 6.6). Інтегрування в рамках скінченного елемента також виконується чисельними методами (див. п. 6.8).

Для практичного застосування МСЕ необхідно попередньо розробити математичні моделі скінченних елементів (СЕ) і реалізувати їх у бібліотеці СЕ програми аналізу механічної міцності.

Основою математичної моделі k -го СЕ є квадратна матриця жорсткості $\mathbf{K}_k$ скінченного елемента, розмір якої дорівнює числу $\mathbf{q}_k$ невизначених коефіцієнтів у частині вектора $\mathbf{q}$, що ставиться до цього СЕ. У свою чергу, розмір цієї частини вектора $\mathbf{q}$ є добуток розмірності d простору й числа b_k вузлів, виділених у моделі k -го СЕ. При одержанні моделі СЕ використовується матриця координатних функцій $\mathbf{N}_k$ скінченного елемента,

у якої число рядків дорівнює d , а число стовпців $d \times b_k$. При розрахунку $\mathbf{K}_k$ спочатку вибирають вид залежності переміщень від просторових координат, потім перетворюють ці залежності у вираз $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_k \mathbf{q}_k$ й за допомогою інтегрування по просторових координатах визначають матрицю жорсткості $\mathbf{K}_k$.

За наявності бібліотеки скінченних елементів застосування методу скінченних елементів включає такі основні етапи:

1. Побудова геометричної моделі об'єкта дослідження (наприклад, деталі) за допомогою системи геометричного моделювання або шляхом створення ескізу вручну на екрані в графічному редакторі.

2. Вибір типу скінченного елемента з бібліотеки, завдання зовнішніх навантажень, геометричних та фізичних параметрів матеріалу, а також формулювання граничних умов. Усі наступні дії виконує програмне забезпечення автоматично.

3. Генерація сітки скінченних елементів, тобто поділ геометричної моделі на окремі елементи. У результаті цього етапу визначаються координати всіх вузлових точок.

4. Перетворення об'ємних і поверхневих навантажень до вузлових значень, які будуть використані в розрахунковій моделі.

5. об'єднання моделей $\mathbf{K}_k$ в загальну скінченноелементну модель деталі, у якій матриця жорсткості $\mathbf{K}$ має порядок, рівний $d \times b$, де b — загальне число вузлів. При об'єднанні елементи матриці $\mathbf{K}$ утворюються підсумовуванням тих елементів матриць жорсткості $\mathbf{K}_k$ окремих $\mathbf{K}_k$, які відносяться до того самого вузла й напрямку переміщення. Якщо деякий вузол закріплений (його переміщення дорівнює нулю), то відповідні цьому вузлу рядки в $\mathbf{K}$ та $\mathbf{q}$ і стовпці у $\mathbf{K}$ викреслюються;

6. зміст інших операцій відповідає блокам програми, розглянутої стосовно до аналізу на макрорівні;

7. подання результатів рішення в зручній для користувача формі. Поряд із числовим висновком результатів звичайно використовується графічне зображення деформованої деталі, можливе подання розподілів напруг, деформацій, температур і т.п. усередині деталі із вказівкою їхньої інтенсивності за допомогою колірного розфарбування.

Етапи 1-6 відповідають роботі в так званому *препроцесорі*, візуалізація результатів та їх опрацювання користувачем (пункт 7) відповідають роботі *постпроцесорі*. До числа відомих програм аналізу по МСЕ відносяться ANSYS, NASTRAN, PATRAN, COMSOL тощо.

Скінченно-елементна модель, що відповідає попередньо побудованій твердотільній моделі вантажопідйомного гака вказана на рис.6.20:



Рис. 6.20. Розбиття вантажопідійомного гаку.

Розраховані за методом скінченних елементів деформації та поле напруг показані на рис. 6.21.

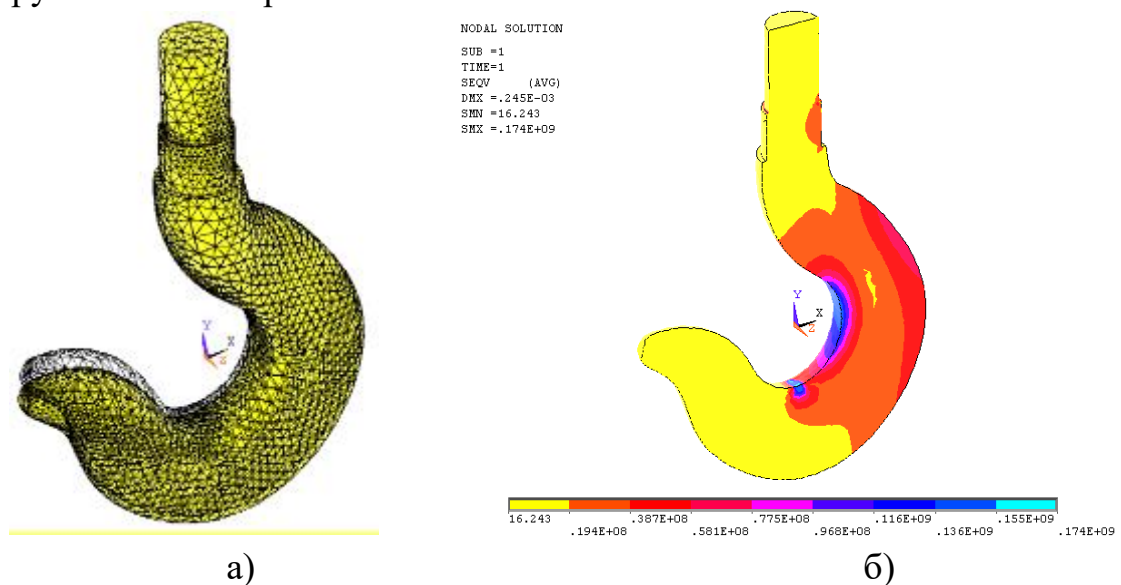


Рис. 6.21. Розрахунок методом скінченних елементів та візуалізація деформацій (а) і трасування напруг (б).

На рис. 6.22. показані приклади розрахунків за методом скінченних елементів.

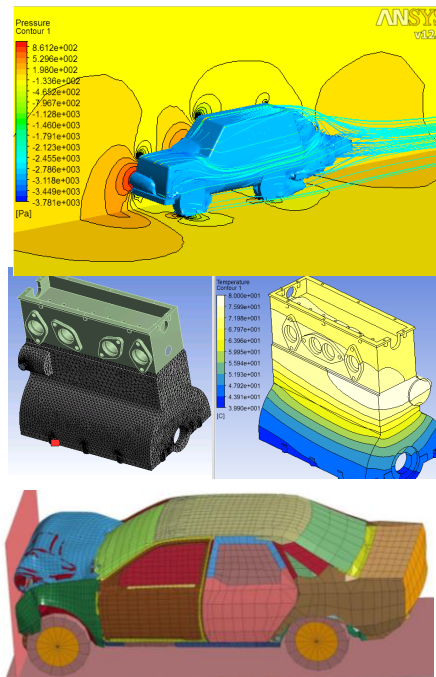


Рис. 6.22. Приклади розрахунків за методом скінченних елементів

РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ ТА СИСТЕМ

ТЕМА 7. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ ТА СИСТЕМ

7.1. ТИПИ САПР В ОБЛАСТІ МАШИНО- ТА АВТОМОБІЛЕ- БУДУВАННЯ

Комп'ютерні системи автоматизованого проєктування (САПР) традиційно поділяють на три рівні: нижній, середній і верхній. Така класифікація сформувалася на межі 1980–1990-х років.

Системи нижнього рівня, або так звані *легкі САПР*, були призначені головним чином для створення двовимірної графіки, тобто автоматизації креслярських робіт. Вони працювали на персональних комп'ютерах, які на той час мали обмежені обчислювальні ресурси порівняно з робочими станціями.

Системи верхнього рівня, які ще називають *важкими САПР* або *hi-end*, створювались для потужних обчислювальних платформ — робочих станцій чи мейнфреймів. Ці рішення мали ширші функціональні можливості, особливо в частині твердотільного та поверхневого 3D-моделювання. Документування у таких системах, як правило, виконувалося на основі створених тривимірних моделей.

Системи середнього рівня виникли як компроміс між легкими й важкими, коли 3D-моделювання обмежувалося лише твердотільною геометрією без підтримки складних поверхонь.

Сьогодні ситуація значно змінилася. З появою потужніших персональних комп'ютерів і розвитком програмного забезпечення системи середнього рівня часто отримали функції, притаманні "важким" САПР, зокрема засоби для поверхневого моделювання. У результаті сучасна класифікація вже не базується лише на технічних обмеженнях.

Сучасні важкі САПР — це інтегровані платформи CAE/CAD/CAM/PDM, які включають в себе інструменти для конструкторського та технологічного проєктування, інженерного аналізу, управління проєктною інформацією, а також широкий набір спеціалізованих модулів.

Зараз системи одного рівня загалом мають схожий функціонал, і нововведення, що з'являються в одній із них, зазвичай швидко впроваджуються в інші рішення з того ж класу.

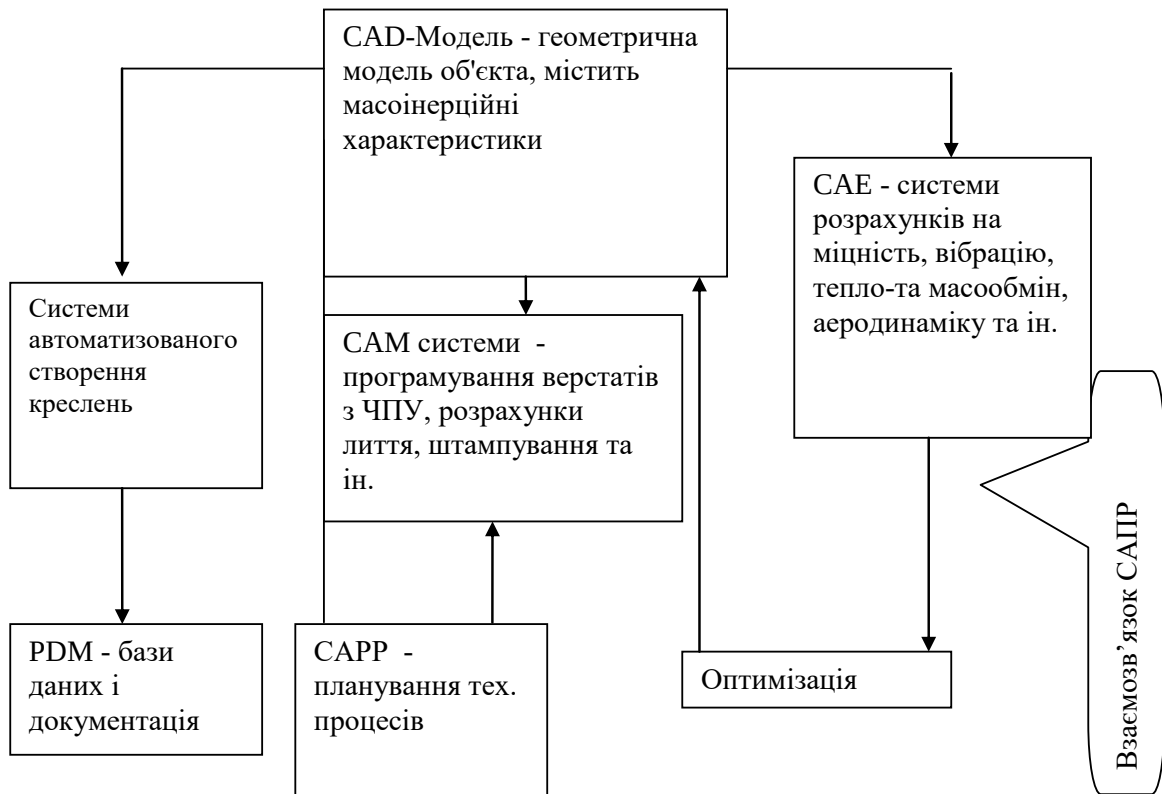


Рис. 7.1. Взаємозв'язок САПР

У САПР, що використовуються на великих підприємствах, зазвичай задіяно програмне забезпечення різних рівнів. Це пояснюється тим, що понад 80% усіх конструкторських операцій можна ефективно виконувати за допомогою CAD-систем нижнього або середнього рівнів. До того ж рішення верхнього рівня є дорогими, тому підприємства, як правило, купують обмежену кількість ліцензій на такі системи, забезпечуючи більшість робочих місць менш вартісними програмами.

У зв'язку з цим виникає потреба в організації обміну даними між CAD-системами різних типів. Для забезпечення сумісності використовуються стандартизовані мови та формати, рекомендовані в межах CALS-технологій. Проте при передаванні геометричних моделей через універсальні формати можуть виникати труднощі, пов'язані з втратою точності або спотворенням даних, що вимагає додаткових зусиль для коректної трансляції інформації.

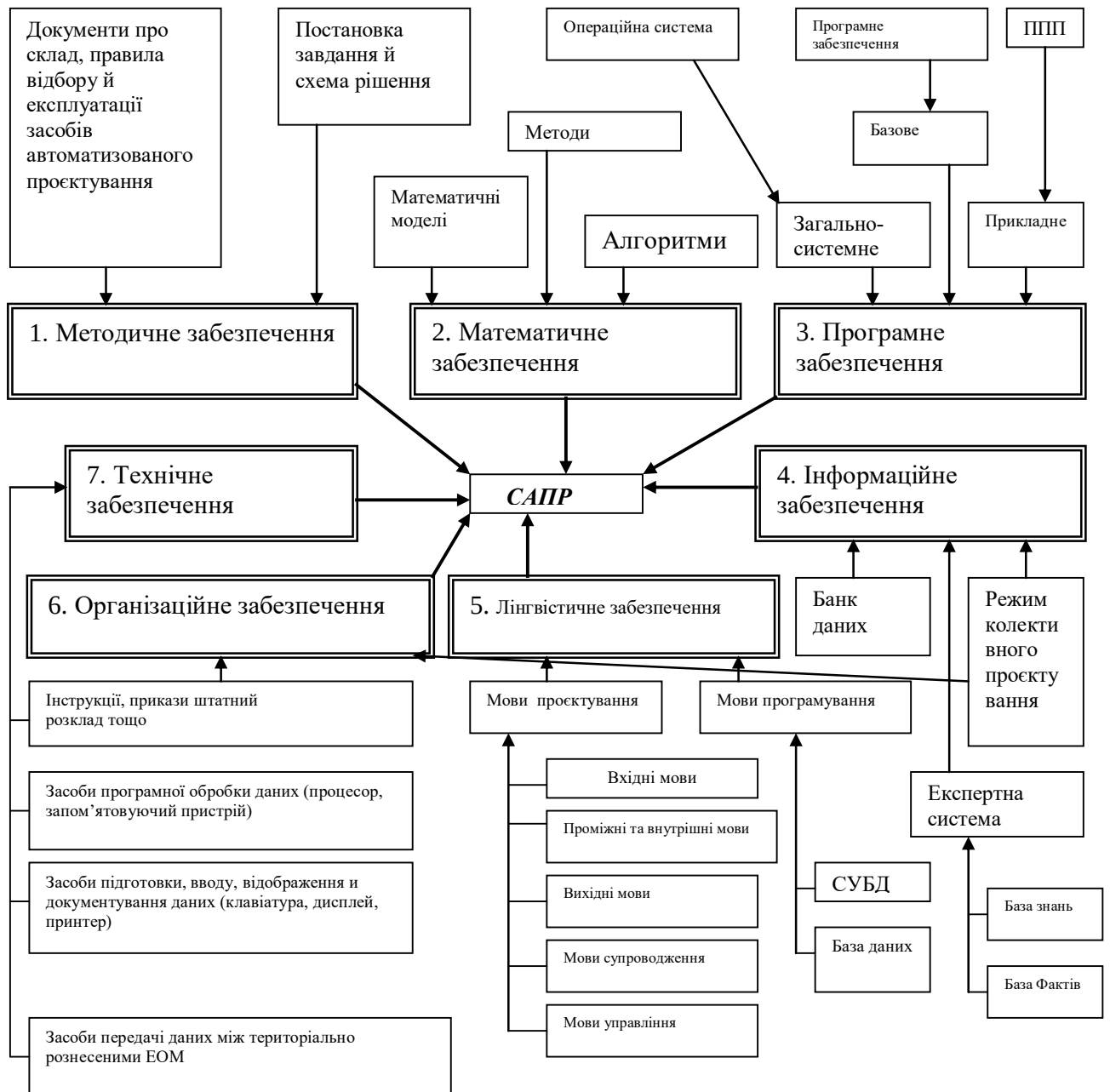


Рис.7.2. Структура САПР

7.2. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ CAD-СИСТЕМ

У машинобудуванні функціональні можливості CAD-систем зазвичай поділяють на дві групи: функції для *двовимірного* (2D) та *тривимірного* (3D) проектування.

До *2D-функцій* належать створення креслень і оформлення технічної документації.

3D-функції включають побудову просторових геометричних моделей, виконання вимірювань, реалістичну візуалізацію, а також перетворення моделей між 2D і 3D-форматами.

Тривимірні моделі можуть описуватися як поверхні, що обмежують форму деталі, або як області простору, зайняті об'єктом. Створення моделей

складної геометрії здійснюється переважно методами, що належать до кінематичного підходу. Сюди відносяться:

- витягування плоского контуру у напрямку, перпендикулярному до площини (екструзія);
- протягування профілю вздовж довільної просторової траєкторії (лофтинг);
- обертання профілю навколо заданої осі;
- побудова поверхонь між кількома перетинами (блендінг або скінінг).

Для моделювання скульптурних форм, які проходять через конкретні просторові точки, використовуються *поверхні Без'є* (див. 6.4.6). У випадках, коли потрібно досягти високої гладкості, застосовують *В-сплайни*.

Створення збірок виконується за допомогою позиціонування складових частин і операцій *булевої алгебри* (*перетин, об'єднання, віднімання*), які застосовуються як до стандартних елементів із бібліотеки, так і до створених моделей деталей. У деяких CAD-системах реалізовано функції компонування та розміщення обладнання.

Серед ключових властивостей сучасних CAD-систем виділяють *параметризацію* та *асоціативність*.

- *Параметризація* означає, що замість фіксованих числових значень параметри геометрії можуть задаватися змінними, що дозволяє швидко адаптувати модель до різних умов проєктування.
- *Асоціативність* забезпечує взаємозв'язок між моделями, наприклад, при зміні одного з параметрів деталі оновлюється вся конструкція. Це досягається завдяки математичним залежностям між параметрами елементів у складі виробу.

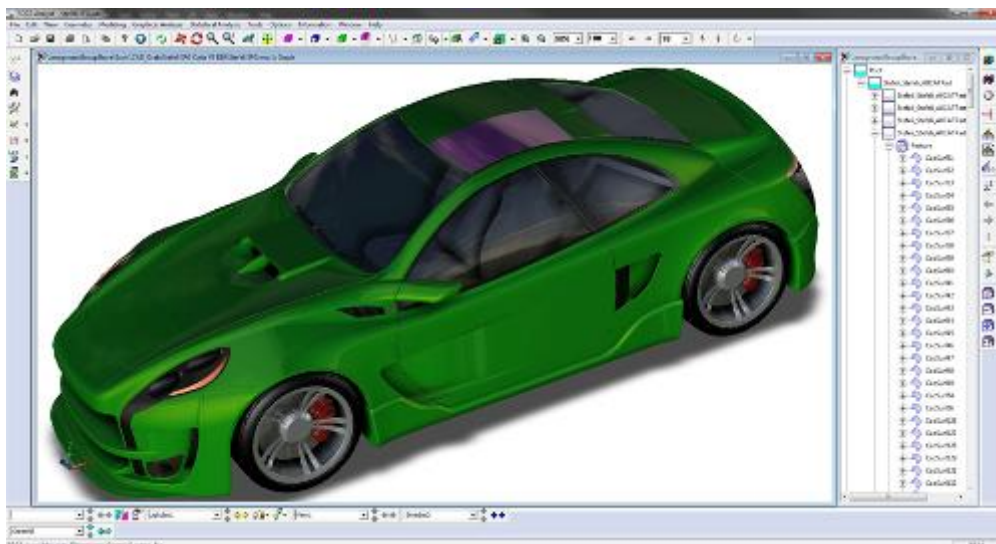


Рис.7.3. CAD-модель автомобіля

Параметризація й асоціативність відіграють важливу роль при проєктуванні конструкцій вузлів і блоків, що складаються з великої кількості деталей. Дійсно, зміна розмірів одних деталей впливає на розміри й

розташування інших. Завдяки параметризації й асоціативності зміни, зроблені конструктором в одній частині зборки, автоматично переносяться в інші частини, викликаючи зміни відповідних геометричних параметрів у цих частинах.

7.2.1. СИСТЕМИ АВТОМАТИЗОВАНОГО СТВОРЕННЯ КРЕСЛЕНЬ

У CAD-системах робота у двовимірному середовищі зазвичай пов'язана зі створенням ескізів або креслень. Основні принципи взаємодії з цими об'єктами є спільними: побудова виконується за допомогою базових 2D-примітивів, після чого до них застосовуються операції редагування, встановлюються геометричні прив'язки та додаються розміри для повного визначення об'єкта.

Ескіз або креслення вважається *повністю визначеним*, якщо між усіма його елементами задані всі необхідні розміри та прив'язки. Якщо ж встановлено надлишкові обмеження, такий ескіз називають *надвизначеним*. Система автоматично аналізує стан ескізу й повідомляє про його статус.

Наприклад, у *SolidWorks* використовуються кольорові індикатори:

- чорний — *повністю визначений* ескіз,
- червоний — *надвизначений*,
- синій — *невизначений* (тобто частина прив'язок або розмірів відсутня).

Типи можливих зв'язків між об'єктами залежать від самих об'єктів. Розглянемо деякі можливі зв'язки (зв'язки накладаються прив'язками):

точка-точка — підтримує горизонтальність (точки вирівнюються по горизонталі), вертикальність, збіг (точки сполучаються);

точка-відрізок — середня точка (переносить точку на середину відрізка), збіг (точка переноситься на відрізок по нормалі);

відрізок-відрізок — горизонтальність, вертикальність, колінеарність, перпендикулярність, паралельність, рівність;

точка-крива (сплайн) — збіг;

відрізок-крива — перпендикулярність, дотичність;

крива-крива — дотичність;

точка-окружність — центрування (точка переноситься в центр окружності).

Для всіх випадків є додаткова прив'язка, називана зафіксованістю, і масив (масиви елементів).

До примітивів 2D графіки відносяться такі об'єкти як:

- точка;
- відрізок;
- сплайн;
- еліпс;
- окружність;
- дуга окружності;
- прямокутник;

- багатогранник;
- паралелограм;
- ...

За допомогою двовірних 2D функцій моделювання проводиться доробка двовірних примітивів до необхідної конфігурації.

3D моделі часто є основою для створення в них креслярської документації. В автоматизованому режимі проводиться винесення на аркуш. У деяких системах можливе проставлення розмірів з урахуванням розмірних ланцюгів. Загальні методи доведення креслення відповідають принципам роботи в ескізі з додатковими елементами, відповідним до стандартів креслення.

Формування креслярської документації відбувається шляхом переходу на позицію "створити креслення з деталі", дозволяє створювати набір потрібних видів, включаючи вибір деталей з наступною ізометрією, створення розрізів і перетинів і т.д.:

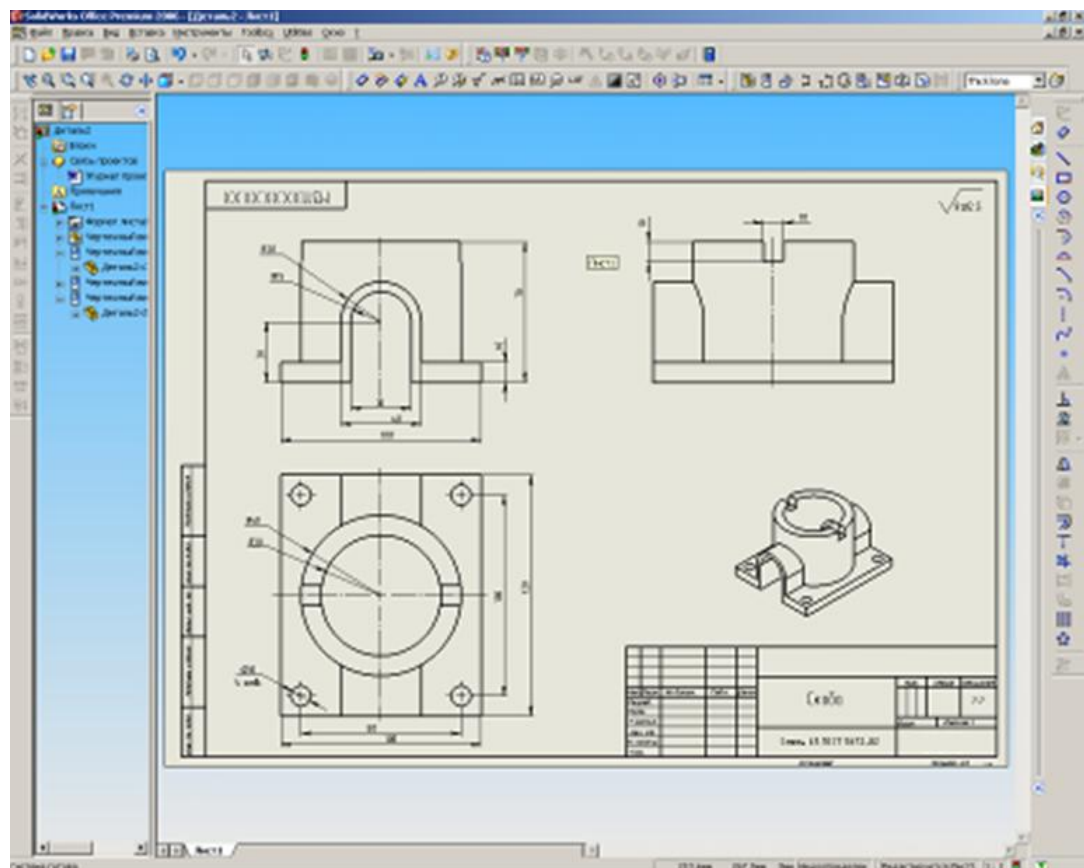


Рис.7.4. Побудування креслень в SolidWorks

7.2.2. ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ

Процес створення набору готових твердотільних компонентів із заданими зв'язками між їхніми розмірами або через прив'язку до таблиці значень називається *параметризацією*.

Типовий підхід до параметризації полягає у використанні спеціальної таблиці параметрів, де задаються різні розмірні значення для окремих

варіантів виконання моделі. Доступ до таких варіантів, як правило, здійснюється через *менеджер конфігурацій*, який дозволяє перемикатися між конфігураціями в межах однієї деталі чи збірки.

7.3. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ CAE-СИСТЕМ

Функціональні можливості CAE-систем (систем інженерного аналізу) охоплюють широкий спектр задач, пов'язаних із моделюванням, аналізом і оптимізацією технічних рішень у процесі проектування. У машинобудуванні такі системи зазвичай включають інструменти для виконання наступних завдань:

- *моделювання фізичних полів*, зокрема аналізу міцності, яке часто базується на методі скінченних елементів (МСЕ);
- *розрахунок станів об'єктів* та моделювання перехідних процесів за допомогою підходів макрорівня;
- *імітаційне моделювання складних виробничих систем*, з використанням моделей теорії масового обслуговування або мереж Петрі.

Програмні комплекси CAE-систем, що реалізують аналіз за методом скінченних елементів, зазвичай включають такі компоненти:

- *бібліотеку скінченних елементів (СЕ)* — містить різні типи елементів та їхні матриці жорсткості. Вибір моделі СЕ залежить від характеру задачі: це може бути аналіз пружності, теплопередачі, електричних полів тощо, а також від геометричної форми елементів (наприклад, трикутні або чотирикутні у 2D);
- *препроцесор* — працює з геометричною моделлю об'єкта, яка зазвичай імпортується з CAD-системи. Його головне завдання — побудова сітки, тобто поділ об'єкта на окремі скінченні елементи;

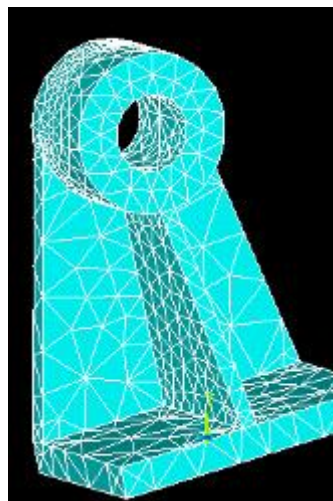


Рис.7.4. Сітка скінченних елементів

- *розв'язувач (вирішувач)* — чисельно обробляє сформовану систему рівнянь;

- *постпроцесор* — забезпечує візуалізацію результатів обчислень та їх подальший аналіз. У машинобудівних САПР це графічна форма. Користувач може бачити вихідну (до навантаження) і деформовану форми деталі, поля напруг, температур, потенціалів і т.п. у вигляді кольорових зображень, у яких палітра кольорів або інтенсивність світіння характеризують значення фазової змінної.

Таким чином, САЕ-системи є потужним інструментом для перевірки працездатності та вдосконалення технічних рішень ще на етапі проєктування.

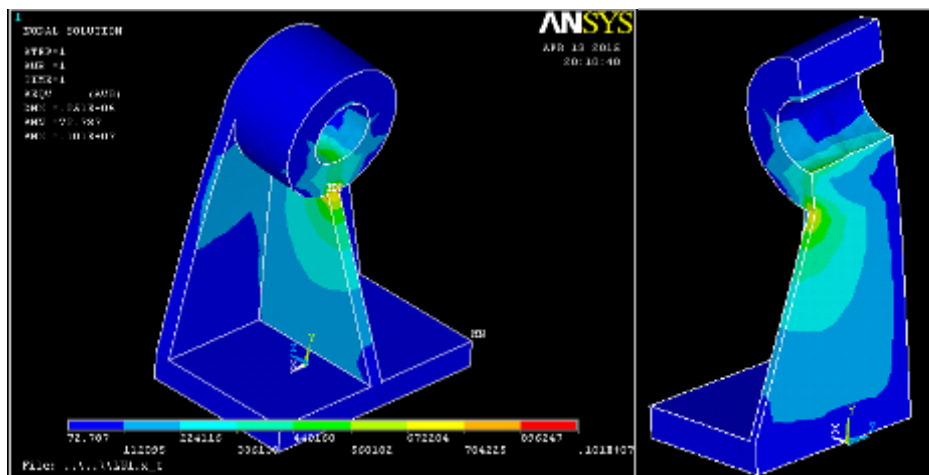


Рис.7.5. Трасування еквівалентних напруг

7.4. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ САМ-СИСТЕМ

САМ-системи (Computer-Aided Manufacturing) виконують ключові завдання, пов'язані з підготовкою та автоматизацією виробничих процесів. Їхні основні функції включають:

- розробку технологічних процесів обробки;
- створення керуючих програм для обладнання з числовим програмним керуванням (ЧПК);
- моделювання процесу обробки, зокрема побудову траєкторії інструмента відносно заготовки;
- генерацію постпроцесорів, адаптованих до конкретного типу ЧПК-обладнання;
- розрахунок нормативного часу виконання операцій.

Як правило, вихідною інформацією для САМ-систем виступають результати, отримані під час конструкторського проєктування у CAD-середовищі. Водночас можливо також програмування на основі креслень і технологічних параметрів без повноцінної 3D-моделі.

У процесі програмування задається геометрія заготовки, траєкторії руху інструмента та параметри обробки. Для цього використовуються спеціальні мови, зокрема *APT (Automatically Programmed Tools)* — мова високого рівня, яка дозволяє описувати складні операції для ЧПК-обладнання.

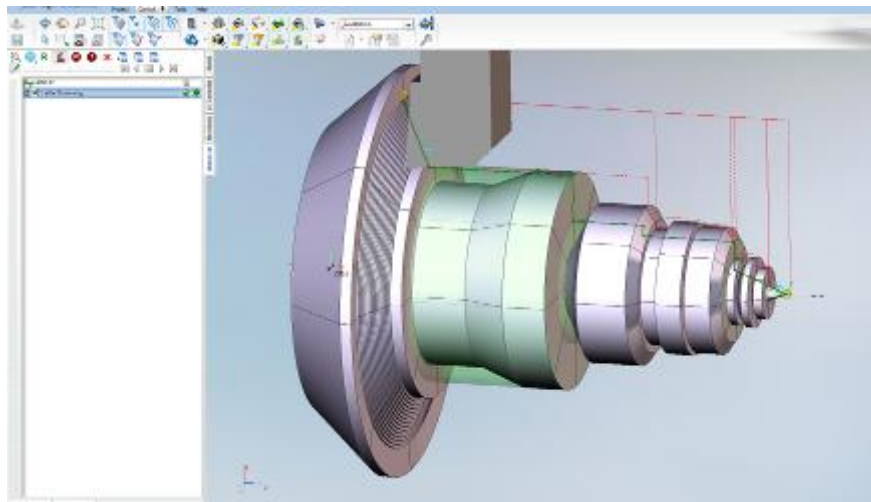


Рис.7.5. Робота в САМ системах

7.5. ОГЛЯД МАШИНОБУДІВНИХ САПР

Сучасні машинобудівні системи автоматизованого проєктування (САПР) зазвичай мають *модульну структуру*, де кожен модуль відповідає за окремий етап проєктування. Типовий набір включає програми для:

- конструкторської розробки механічних виробів;
- промислового дизайну;
- інженерного аналізу (функціонального моделювання);
- технологічного проєктування;
- візуалізації та підготовки графіки;
- обміну даними з іншими програмними системами.

Станом на сьогодні серед високорівневих машинобудівних САПР лідирують три рішення:

- *Unigraphics (NX)*, що розробляється компанією *Unigraphics Solutions*;
- *CATIA*, створена *Dassault Systèmes* за підтримки IBM;
- *Pro/Engineer*, розроблена компанією *PTC (Parametric Technology Corporation)*. Сучасна назва — *Creo*.

Колись конкурентами цих систем були I-DEAS (від SDRC), CADD5 (від Computervision) та EUCLID (від Matra Datavision), однак вони з часом втратили актуальність.

Після злиття SDRC з корпорацією EDS, було утворено підрозділ *EDS PLM Solutions*, який пізніше став незалежною компанією *Unigraphics Solutions*. Нова платформа *Unigraphics NX* об'єднала найкращі характеристики *Unigraphics* і I-DEAS — наприклад, потужний інженерний аналіз з I-DEAS і розвинуті CAM-функції з *Unigraphics*.

Компанія *PTC* ще у 1990-х роках придбала *Computervision*, після чого подальша розробка CADD5 була припинена. Зараз *PTC* зосереджена на розвитку сучасної версії *Pro/Engineer* під назвою *Creo Parametric*.

Серед головних напрямів еволюції систем CAD/CAM/CAE варто виділити:

- інтеграцію САПР у структуру PLM-систем (управління життєвим циклом виробів), що дозволяє об'єднати проєктування, виробництво, аналіз і супровід у єдиному середовищі;
- впровадження інструментів для колективної роботи, зокрема на базі мережових і хмарних технологій, включно з використанням Інтернету для спільного проєктування в реальному часі.

Unigraphics NX — це багатофункціональна система для геометричного моделювання та конструкторсько-технологічного проєктування, яка підтримує роботу з великими збірками, виконання міцнісних розрахунків і створення конструкторської документації. В системі застосовується концепція *майстер-процесів* — інтерактивних інструментів, адаптованих до специфіки конкретних завдань.

У CAD-підсистемі забезпечуються можливості твердотільного моделювання, побудови складних сплайнових поверхонь, автоматичного створення креслень на основі 3D-моделей, а також проєктування великих збірок, що можуть містити сотні чи тисячі деталей з підтримкою асоціативних зв'язків між ними. Для графічного ядра використовується *Parasolid*.

У САМ-модулі реалізовані засоби розробки програм керування для різних видів обробки — токарної, електроерозійної, трьох- та п'ятикоординатної фрезерної обробки, а також інструменти для проєктування прес-форм і штампів із можливістю синтезу та аналізу траєкторій руху інструментів.

САЕ-підсистема включає модулі для міцнісного аналізу з застосуванням методу скінченних елементів (з препроцесором і постпроцесором), а також інструменти кінематичного і динамічного моделювання механізмів з розрахунком сил, швидкостей та прискорень, а також модулі для аналізу лиття пластмас.

CATIA V5 застосовується на всіх етапах життєвого циклу виробу — від розробки концепції до технологічної підтримки виробництва та планування ресурсів. Система підтримує як твердотільне, так і поверхневе 3D-моделювання, а також оптимізацію параметрів виробів. Для графічного відображення використовується власне ядро *CNEXT*.

Серед можливостей *CATIA V5* — фотореалістична візуалізація моделей та відновлення математичних описів виробів на основі фізичних прототипів. Система має масштабовану архітектуру, пропонуючи різні типові конфігурації: від повнофункціонального наскрізного проєктування складних виробів до варіантів, орієнтованих на невеликі та середні підприємства для проєктування окремих комплектуючих.

До унікальних особливостей *CATIA* належать модулі формалізації знань, що допомагають оптимізувати конструкції та процеси проєктування, а також антропологічний модуль, який дозволяє моделювати параметри людини в системах "людина-машина".

Система *Pro/Engineer (Creo)*, що існує з 1986 року, містить базові модулі для твердотільного і поверхневого моделювання, а також для

створення конструкцій із базових формових елементів. Вона підтримує параметризацію та асоціативність моделей, дозволяє виконувати проекційне креслення і автоматизовану розробку креслень із зазначенням розмірів і допусків. Користувачі можуть розширювати бібліотеку формових елементів, додаючи власні моделі. Для графічної обробки застосовується ядро *Granite One*, розроблене компанією PTC.

Додаткові конструкторські модулі орієнтовані на вузькі сфери, такі як проектування панелей із композитних матеріалів, розробка штампів і ливарних прес-форм, трубопровідних систем, зварних конструкцій, а також прокладання електричних кабелів і джгутів.

Модулі функціонального моделювання слугують для препроцесування і постпроцесування у задачах скінченноелементного аналізу — включаючи нанесення сітки, візуалізацію результатів, аналіз теплового режиму та оцінку вібростійкості.

Технологічні модулі охоплюють моделювання процесів токарної, фрезерної, електроерозійної обробки і розробку постпроцесорів для ЧПК-верстатів, хоча САМ-функції у Pro/Engineer не є провідними.

Для обміну даними використовуються конвертори, що забезпечують імпорт та експорт у різні CAE/CAD/CAM-системи.

Серед САПР середнього рівня лідируючі позиції займають такі системи, як *SolidWorks* (SolidWorks Corporation), *Solid Edge* (EDS PLM Solutions) та *Inventor* (Autodesk). Компанія PTC також пропонує систему цього класу — Pro/Desktop. На рівні з ними широко використовуються САПР від Autodesk, Beantly, Bee-Pitron.

Ці системи зазвичай включають підсистеми для 2D конструкторського креслення, твердотільного 3D-моделювання, технологічного проектування, управління проектною інформацією, а також низку модулів для інженерного аналізу і розрахунку різних видів машинобудівної продукції. Крім того, у їхньому складі є бібліотеки типових конструктивних елементів.

Система *SolidWorks* побудована на базі графічного ядра *Parasolid* і забезпечує параметричне твердотільне моделювання механічних деталей. Проектування починається зі створення базового тіла за допомогою операцій, таких як видавлювання, протягання чи обертання плоского контуру, з подальшим додаванням або видаленням інших тіл. Застосовується метод граничного моделювання (B-representation) із описом поверхонь за допомогою аналітичних функцій або сплайнів.

При створенні складних збірок, побудованих на базі твердотільних моделей, користувач може задавати різні умови взаємного розташування компонентів, а також автоматично контролювати зазори і виключати перетинання деталей. Для обміну даними з іншими САПР підтримуються формати IGES, DXF, DWG. У складі *SolidWorks* передбачено також модуль міцнісних розрахунків *CosmosWorks*.

Важливою перевагою *Solid Edge* є її тісна інтеграція із системою високого рівня *Unigraphics*, оскільки обидві розробляє одна компанія і вони базуються на однаковому графічному ядрі. Технологія моделювання в *Solid*

Edge подібна до інших сучасних САПР: конструктивні елементи задаються через перетини 3D-форми, які потім за допомогою операцій витягування або обертання перетворюються в об'ємну модель деталі.

Система *Inventor* орієнтована на параметричне твердотільне проектування великих збірок із сотнями й тисячами компонентів. Вона має розвинену бібліотеку стандартних елементів і побудована на графічному ядрі *ACIS* (яке стало основою для розробки компанією Autodesk власного ядра — *Shape Manager*). Моделі створюються за допомогою операцій видавлювання, обертання, по перетинах або вздовж заданих траєкторій. З тривимірної моделі можна автоматично отримати 2D креслення та специфікації матеріалів.

Inventor підтримує спільну роботу над проєктами, включно з одночасним редагуванням однієї й тієї ж збірки кількома користувачами. В системі реалізована автоматична перевірка кінематичних взаємодій, а також контроль розмірів деталей з урахуванням їхнього положення в збірці. Зручність використання забезпечується тим, що асоціативні зв'язки задаються безпосередньо через форму і розташування компонентів, а не через опис операцій чи рівнянь.

Крім того, компанія Autodesk пропонує середньорівневу систему *MDT* (*Mechanical Desktop*) і простішу версію для 2D-проектування — *AutoCAD LT*.

Компанія *Moldflow* спеціалізується на розробці програмного забезпечення для САПР у ливарному виробництві. Її продукти, такі як *Part Adviser* і *Mold Adviser*, призначені для моделювання процесів лиття пластмас.

Важливу роль у системах конструкторсько-технологічної підготовки виробництва займають програми для технологічного планування. Одним із провідних рішень у цій сфері є система *Mastercam*, яка містить модулі для розробки керуючих програм різних видів обробки заготовель, а також засоби моделювання і доопрацювання моделей. *Mastercam* підтримує конвертацію популярних графічних форматів, таких як STEP, IGES, Parasolid (.xmt, .txt), ACIS SAT (.sat), AutoCAD (.dxf, .dwg), Inventor (.ipt, .iam), SolidWorks (.sldprt) та інші.

Для технологічної підготовки дискретного виробництва компанія *Consistent Software* пропонує систему *TechnologiCS*. Вона забезпечує функції складання специфікацій, ведення структури проєкту та бібліотеки креслень, синтезу технологічних процесів, вибору інструментів, розрахунку режимів різання, нормування витрати матеріалів і управління технологічною документацією.

Система *SolidCAM* (розроблена *CADTech*), яка базується на ядрі *ACIS* як і *Mechanical Desktop*, призначена для генерації керуючих програм для токарної, 2,5- і 3-осьової фрезерної обробки на верстатах з ЧПК.

Відомими світовими лідерами в області скінченноелементного аналізу є програмно-методичні комплекси *Nastran* і *Patran* від MSC Software Corporation, а також *ANSYS* від ANSYS Inc. Зазвичай ці комплекси включають набір програм зі схожими математичними алгоритмами, інтерфейсами та спільними модулями, але відрізняються ступенем

спеціалізації, орієнтацією на конкретні задачі та вартістю. Наприклад, ANSYS дозволяє виконувати аналіз механічної міцності, теплопровідності, динаміки рідин і газів, а також акустичних та електромагнітних полів. Усі версії комплексу містять пре- і постпроцесори та мають інтеграцію з базами даних, а також підтримують обмін даними з провідними системами геометричного моделювання і комп'ютерної графіки.

Світовим лідером у сфері моделювання механічних процесів на макрорівні за допомогою розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь є програма *Adams*.

7.6. СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Системи комп'ютерної математики (СКМ, інша назва — *системи комп'ютерної алгебри*) — це програмні комплекси, призначені для автоматизації математичних обчислень, аналітичного й чисельного розв'язання задач, побудови графіків, моделювання процесів і символічних перетворень. Їх активно застосовують у наукових дослідженнях, інженерних розрахунках, навчальному процесі та технічному проектуванні.

Серед найпоширеніших СКМ можна виділити *Mathematica*, *Maple*, *MATLAB*, *Mathcad*, *SageMath* і *Maxima*. Кожна з них має свої особливості. Наприклад, *Mathematica* забезпечує потужний інструментарій для аналітичних обчислень, візуалізації та моделювання, тоді як *MATLAB* орієнтований переважно на чисельні методи, роботу з матрицями та інженерні задачі. *Maple* відома широкими можливостями для символічної математики, *Mathcad* — простотою оформлення розрахунків у вигляді зрозумілої документованої структури. *Maxima* — вільна система комп'ютерної алгебри, яка призначена для символічних і чисельних обчислень.

СКМ дозволяють ефективно реалізовувати як класичні алгоритми, так і складні обчислювальні моделі, значно скорочуючи час підготовки та обробки даних. Вони підтримують роботу зі змінними, системами рівнянь, інтегралами, диференціальними рівняннями, статистикою, а також мають інтерфейси для взаємодії з іншими мовами програмування й CAD-системами.

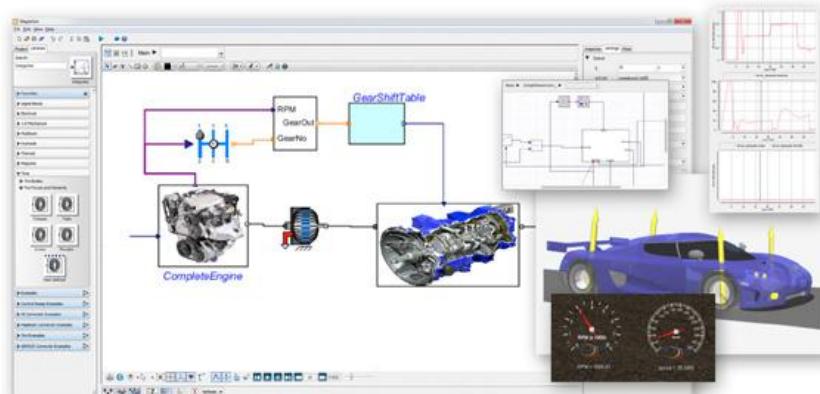


Рис.7.8. Модуль Vehicle Dynamics в СКМ Maple.

Основні можливості СКМ охоплюють:

- *символьні обчислення* — спрощення виразів, диференціювання, інтегрування, розкладання в ряди, обчислення меж (границь), розв'язання рівнянь і систем (у тому числі диференціальних);
- *чисельні методи*: обчислення наближених значень, побудова чисельних рішень, підтримка довільної точності обчислень;
- *лінійна алгебра*: робота з матрицями й векторами, визначники, обернені матриці, власні значення;
- *побудова графіків*: дво- та тривимірні візуалізації функцій і даних за допомогою інтеграції з утилітами, такими як `gnuplot`;
- *програмування*: мови СКМ дозволяють створювати власні функції та алгоритми, підтримуючи умовні конструкції, цикли та рекурсію.

ЛІТЕРАТУРА

1. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казміренко В. А. Обчислювальна математика: Навч. посіб. — К.: Видавництво, 2013. — 224 с.
2. Бугаєць Н.О. Математика з програмою Maxima: навчальний посібник. — Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2023. — 163 с.
3. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф.; Посібник для вчителів. 3-тє видання. К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 2015. 315 с.
4. Kunwoo Lee. Principles of CAD/CAM/CAE. — Pearson; 1st edition (January 20, 1999). — 560 с.
5. ДСТУ 2226-93. Автоматизовані системи. Терміни та визначення. — [Чинний від 1994-07-01]. Вид. офіц. Київ : Держстандарт України, 1994. 93 с.
6. Pierre Germain-Lacour. Mathematiques et CAO. — Universite de Metz: Hermes Publishing, 1986-1987. — 264 p.
7. Баганов Є.О. Методи розрахунків на ЕОМ. Навчальний посібник. — Херсон: Олді-плюс, 2009. — 288 с.
8. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач: Навч. посіб. для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, М. А. Сухорольський, І. М. Запшкільняк, В. М. Колісник; Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Л., 2002. — 236 с.
9. Волков В. П., Вільський Г. Б. Теорія руху автомобіля: підручник. Суми : Університетська книга, 2010. 320 с.
10. Луняка К. В., Русанов С. А., Ключев О. І., Ключева О. О.. Використання методу факторного експерименту при дослідженні умов роботи теплоаккумулятора в системі передпускової підготовки автомобільного двигуна. // Стан, досягнення і перспективи холодильної техніки і технології : зб. тез доп. Всеукр. наук.-техн. онлайн-конф. молодих вчених та здобувачів вищої освіти, Одеса, 19-20 квіт. 2022 р. / Одес. нац. технол. ун-т, Навч.-наук. ін-т холоду, кріотехнологій та екоенергетики ім. В. С. Мартиновського ; під ред. М. Г. Хмельнюка. — Одеса, 2022. — С. 39–41.
11. Pedro X. La Hera. Active suspension control for a heavy-duty vehicle with hydraulic cylinders at the wheels // Swedish cluster of forest technology / Swedish University of Agricultural Sciences. Technical Report. 2012. — 17 p.
12. Protsenko, V., Rusanov, S., Kliuev, O., Voitovich, O., Protasov, R. Improvement of the internal combustion engine sleeve spring packets equipped coupling calculation model // Strojnický Casopis, 2024, 74(3), p. 89–96.
13. Edgar J. A Century of Car Aerodynamics: the Science and Art of Cars and Airflow. Amazon Digital Services LLC, 2021. 218 p.
14. Piechna J., Kurec K., Broniszewski J., Remer M., Piechna A., Kamieniecki K., Bibik P. Influence of the car movable aerodynamic elements on fast road car cornering. Energies. 2022. Vol. 15, No. 3. P. 689.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I. МАТЕМАТИЧНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ ТА СИСТЕМ.....	6
ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ПОНЯТТЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ.....	6
1.1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	6
1.2. ПОНЯТТЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ.....	8
1.2.1. СТРУКТУРА Й ПАРАМЕТРИ ОБ'ЄКТІВ МОДЕЛЮВАННЯ.....	9
1.2.2. АВТОМАТИЗОВАНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	10
ТЕМА 2. СПОСОБИ ПОБУДУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ. ВИМОГИ ДО МОДЕЛЕЙ.....	11
2.1. ВИХІДНІ ДАНІ ДО ЗАДАЧІ ПРОЄКТУВАННЯ.....	11
2.1.1. КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	11
2.1.2. ОБ'ЄКТИ МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ.....	16
2.1.2.1. МАКРОРІВНЕВІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ	17
2.1.2.2. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА МАКРОРІВНІ.....	21
2.1.2.3. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: МЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ.....	21
2.1.2.4. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: ГІДРАВЛІЧНІ СИСТЕМИ.....	23
2.1.2.5. МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ: АНАЛІЗ ПЛАВНОСТІ ХОДУ АВТОМОБІЛЯ.....	24
2.1.3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ НА МІКРОРІВНІ.....	28
ТЕМА 3. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ПО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОМУ СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ.....	30
3.1. РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ.....	30
ТЕМА 4. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ГІДРО- ТА ГАЗОДИНАМІКИ.....	33
4.1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РУХУ РЕАЛЬНИХ РІДИН ТА ГАЗІВ.....	33
4.2. ВІДОМОСТІ ПРО УТВОРЕННЯ ТА ЗРИВ ВИХОРИВ ТА ВИНИКНЕННЯ ТУРБУЛЕНТНОСТІ.....	34
4.3. СТІЙКІСТЬ РУХУ РІДИНИ ТА ГАЗУ.....	34
4.4. ТУРБУЛЕНТНА ОБЛАСТЬ ТА ЯВИЩЕ ВІДРИВУ.....	35
ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМІНУ.....	38
5.1. ТЕПЛООБМІН В НЕРУХОМИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	38
5.2. ТЕПЛООБМІН В РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩАХ (КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН).....	39
ТЕМА 6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ.....	42
6.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ.....	42
6.2. ОБЧИСЛЕННЯ Й ПОХИБКИ.....	42
6.3. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗКУ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАДАЧ.....	45
6.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ Й ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ.....	46
6.4.1. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОЛІНОМОМ ЛАГРАНЖА	47

6.4.2. БАЗИСНІ ФОРМИ.....	48
6.4.3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОЛІНОМАМИ НЬЮТОНА.....	48
6.4.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ.....	51
6.5. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЗГЛАДЖУВАННЯ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.....	54
6.5.1. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЗГЛАДЖУВАННЯ.	54
6.5.2. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.....	54
6.5.3. ЗГЛАДЖУВАННЯ КРИВИМИ БЕЗ'Є.....	58
6.5.4. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ.....	61
6.6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОБОТИ З СИСТЕМАМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.....	63
6.7. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.....	70
6.8. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ.....	71
6.9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	73
6.9.1. МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА (МЕТОД ДОТИЧНИХ).....	74
6.9.2. МЕТОД СІЧНИХ (МЕТОД ХОРД).....	75
6.9.3. МЕТОД ІТЕРАЦІЙ.....	76
6.10. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	76
6.11. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	77
6.11.1. МЕТОД ЕЙЛЕРА.....	78
6.11.2. МЕТОД РУНГЕ-КУТТИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ.....	79
6.12. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ВИРІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	80
6.13. ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ТА МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	80
РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ ТА СИСТЕМ.....	88
7.1. ТИПИ САПР В ОБЛАСТІ МАШИНО- ТА АВТОМОБІЛЕ- БУДУВАННЯ.....	88
7.2. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ САД-СИСТЕМ.....	90
7.2.1. СИСТЕМИ АВТОМАТИЗОВАНОГО СТВОРЕННЯ КРЕСЛЕНЬ...	92
7.2.2. ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ.....	93
7.3. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ САЕ-СИСТЕМ.....	94
7.4. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ САМ-СИСТЕМ.....	95
7.5. ОГЛЯД МАШИНОБУДІВНИХ САПР.....	96
7.6. СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	100
ЛІТЕРАТУРА.....	102

Навчальне електронне видання

Сергій Русанов
Олег Ключєв
Владислав Проценко

МАТЕМАТИЧНІ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ РОЗРАХУНКІВ.

КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчально-методичний посібник

для студентів технічних закладів вищої освіти

ISBN 978-617-8187-55-2 (електронне видання)

Підписано до видання 15.09.2025 р. Формат 60×84/8.

Гарнітура Times.

Ум. друк. арк. 12,89. Обл.-вид. арк. 13,85.

Замовлення №3239.



Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В.С.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи:
Серія ХС №48 від 14.04.2005 р.
Видано Управлінням у справах преси та інформації
73000, Україна, м. Херсон, вул. Соборна, 2.
Тел. +38(050)133-10-13
e-mail: printvvs@gmail.com