

ХЕРСОНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

(повне найменування вищого навчального закладу)

ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА ТРАНСПОРТУ

(назва факультету)

КАФЕДРА ЕНЕРГЕТИКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ І ФІЗИКИ

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної роботи
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
(рівень вищої освіти)

на тему Розрахунок електричного опору провідників зі змінним поперечним
перерізом

Виконав: студент 4 курсу групи 4зЕЛ
спеціальності 141. Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка
(код і назва спеціальності)

освітньо-
професійної Електротехніка та електротехнології
програми (назва ОПП)

_____ Рубан І. І.

(прізвище та ініціали)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Івченко В.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент к.т.н., доц. Мешков Ю.Є.

(прізвище та ініціали)

Хмельницький – 2026 р.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота на тему «Розрахунок електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом» включає в себе пояснювальну записку та графічну частину.

Пояснювальна записка містить 54 сторінки формату А4, 7 рисунків, 3 таблиці, 20 використаних джерел.

Ключові слова: електричний опір, провідник, змінний поперечний переріз, електродинаміка, математичне моделювання, метод скінченних елементів.

Дипломна робота присвячена розрахунку та дослідженню електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом із використанням сучасних теоретичних і чисельних методів.

Проведено аналіз основних положень теорії електропровідності та електродинаміки. Розглянуто вплив геометричних параметрів провідника на розподіл електричного поля та густини струму. Проаналізовано існуючі аналітичні та чисельні методи визначення електричного опору, зокрема інтегральні підходи, методи розв'язання рівняння Лапласа та метод еквівалентних схем.

Побудовано математичні моделі провідників зі змінним поперечним перерізом та виконано розрахунки для різних геометричних конфігурацій. Для дослідження складних систем використано чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів, що дозволяє враховувати неоднорідність електричного поля та складну геометрію об'єктів.

За допомогою сучасних програмних засобів моделювання реалізовано чисельні експерименти для аналізу розподілу потенціалу, густини струму та визначення ефективного електричного опору провідників. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів на величину опору та встановлено закономірності його зміни.

У розділі «Охорона праці» проведено аналіз умов праці та розроблено

комплекс заходів для створення безпечного і комфортного робочого середовища при виконанні інженерних розрахунків електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом. Оскільки специфіка роботи передбачає інтенсивне зорове навантаження та тривалу роботу за персональним комп'ютером, основну увагу було приділено проєктуванню системи штучного освітлення.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА.....	8
1.1 Природа електричного опору у провідниках.....	8
1.2 Класична та квантова теорії електропровідності.....	9
1.3 Питомий електричний опір речовини.....	11
1.4 Залежність опору речовини від зовнішніх факторів.....	12
1.5 Застосування провідників із різними значеннями електричного опору....	14
1.6 Висновки.....	15
2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА.....	17
2.1 Вступні зауваження.....	17
2.2 Задачі, що мають аналітичний розв’язок.....	17
2.3 Резистор без чітких меж.....	20
2.4 Висновки.....	22
3 ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА.....	24
3.1 Задача про визначення опору трапецієподібної пластини. Наближення однорідного електричного поля.....	24
3.2 Врахування неоднорідності електричного поля. Двовимірне рівняння Лапласа та крайові мови.....	25
3.3 Комп’ютерна програма для проведення числових розрахунків.....	26
3.4 Результати числових розрахунків.....	34
3.5 Висновки.....	35
4 ОХОРОНА ПРАЦІ.....	37
4.1 Загальні положення.....	37

4.2 Характеристика приміщення.....	38
4.3 Метод розрахунку освітлення.....	39
4.4 Визначення коефіцієнтів.....	42
4.5 Розрахунок світлового потоку.....	43
4.6 Визначення кількості світильників.....	45
4.7 Перевірка освітленості.....	46
4.8 Розміщення світильників.....	47
4.9 Вимоги до освітлення.....	48
4.10 Вплив освітлення на безпеку праці	49
4.11 Електробезпека	49
4.12 Пожежна безпека	50
4.13 Висновки.....	50
ВИСНОВКИ.....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	54

ВСТУП

У сучасних умовах розвитку електротехніки, мікроелектроніки та матеріалознавства зростає потреба у глибокому розумінні фізичних процесів, що визначають поведінку електричного струму в провідниках. Однією з ключових характеристик, яка безпосередньо впливає на ефективність роботи електричних і електронних систем, є електричний опір. Особливої актуальності набуває дослідження опору провідників складної геометрії, де класичні підходи не завжди дають точні результати.

У реальних умовах більшість провідників мають неоднорідну структуру або змінний поперечний переріз, що призводить до викривлення ліній струму та неоднорідного розподілу електричного поля. Це суттєво ускладнює аналіз таких систем і вимагає застосування більш складних математичних моделей, зокрема розв'язку рівняння Лапласа з відповідними граничними умовами. У зв'язку з цим поєднання аналітичних і числових методів стає важливим інструментом дослідження.

Окрему увагу привертають задачі визначення електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом, а також систем без чітко визначених меж, де класичні формули не застосовні. Такі задачі мають не лише теоретичне, а й практичне значення, оскільки подібні структури широко використовуються в електронних компонентах, сенсорах, контактних з'єднаннях та інших технічних пристроях.

Актуальність теми полягає у необхідності розробки та аналізу ефективних методів визначення електричного опору провідників складної форми, а також у дослідженні впливу геометрії та неоднорідності електричного поля на їх електричні характеристики. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні електронних пристроїв, оптимізації електричних кіл і підвищенні ефективності роботи технічних систем.

Метою даної дипломної роботи є дослідження електричного опору

провідників зі змінним поперечним перерізом із урахуванням неоднорідності електричного поля та аналіз відмінностей між аналітичними і числовими підходами до його визначення.

Об'єктом дослідження є електричний струм у провідниках складної геометричної форми.

Предмет дослідження – закономірності розподілу електричного потенціалу, густини струму та опору в провідниках зі змінним поперечним перерізом.

Задачі дослідження:

- проаналізувати фізичну природу електричного опору та основні теорії електропровідності;
- дослідити аналітичні методи визначення опору провідників складної геометрії;
- розглянути застосування співвідношення Максвелла для систем без чітких меж;
- розробити програмну реалізацію числового розв'язання задачі на основі рівняння Лапласа;
- виконати числові розрахунки та проаналізувати вплив геометричних параметрів на опір;
- порівняти результати аналітичних і числових методів.

Методи дослідження: аналітичні методи математичної фізики, числові методи (метод скінченних елементів), комп'ютерне моделювання, аналіз та узагальнення отриманих результатів.

Практичне значення роботи полягає у можливості використання отриманих результатів для розрахунку електричних параметрів провідників складної форми, а також для вдосконалення методів проєктування електронних і електротехнічних пристроїв.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного з них, загальних висновків та списку використаних джерел.

1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА

1.1 Природа електричного опору у провідниках

Природа електричного опору у провідниках є однією з фундаментальних тем електродинаміки, що пояснює, чому електричний струм у реальних матеріалах не проходить безперешкодно. Електричний опір – це фізична величина, яка характеризує здатність провідника протидіяти проходженню електричного струму. На мікроскопічному рівні струм у металах створюється впорядкованим рухом вільних електронів під дією електричного поля. Однак цей рух не є рівномірним і безперервним, оскільки електрони постійно взаємодіють із кристалічною ґраткою провідника, а також з іншими електронами, домішками та дефектами структури. Саме ці взаємодії і є головною причиною виникнення електричного опору.

У металах вільні електрони утворюють так званий “електронний газ”, який рухається між вузлами кристалічної ґратки, утвореної іонами металу. Коли до провідника прикладається напруга, на електрони починає діяти електричне поле, що змушує їх рухатися у певному напрямку, утворюючи електричний струм. Проте на шляху цього руху електрони зазнають численних зіткнень із коливними іонами ґратки (теплові коливання), а також із домішковими атомами та структурними дефектами. Кожне таке зіткнення змінює напрямок і швидкість руху електрона (відбувається розсіяння), унаслідок чого частина енергії, отриманої від електричного поля, перетворюється на внутрішню енергію провідника, тобто на тепло. Це явище називається тепловою дією струму або джоулевым нагріванням.

За низьких температур переважає розсіяння електронів на домішках та структурних дефектах кристалічної решітки провідника, тоді як за високих температур переважає розсіяння на теплових коливаннях атомів або іонів решітки (так званих «фононах»).

Електричний опір провідника залежить від кількох факторів. По-перше,

це геометричні параметри - довжина та площа поперечного перерізу провідника. Чим довший провідник, тим більше зіткнень відбувається на шляху електронів, і тим більший опір. Чим більша площа поперечного перерізу, тим більше електронів може одночасно переносити заряд, і тим менший опір. По-друге, важливу роль відіграє матеріал провідника, що характеризується питомим опором - величиною, яка показує, наскільки сильно речовина протидіє проходженню струму. Питомий опір визначається природою речовини, її атомною структурою та концентрацією вільних носіїв заряду.

Таким чином, електричний опір у провідниках має мікроскопічну природу, пов'язану з розсіюванням електронів під час їх руху через матеріал. Він залежить від структури речовини, температури, наявності домішок і геометричних параметрів провідника. Розуміння природи електричного опору є важливим для пояснення роботи електричних кіл, створення нових матеріалів і розвитку сучасних технологій у галузі електроніки та енергетики.

1.2 Класична та квантова теорії електропровідності

Класична та квантова теорії електропровідності пояснюють механізми перенесення електричного заряду в речовинах на різних рівнях глибини розуміння – від спрощених моделей до сучасних уявлень про поведінку електронів у твердому тілі. Класична теорія електропровідності, відома як модель Друде–Лоренца, розглядає електрони в металах як своєрідний “електронний газ”, що складається з вільних заряджених частинок, які рухаються між іонами кристалічної ґратки. У цій моделі електрони вважаються класичними частинками, що підкоряються законам Ньютона і періодично зазнають зіткнень із іонами. Під дією електричного поля електрони набувають спрямованого руху, але через часті зіткнення їх середня швидкість залишається невеликою, що й обумовлює скінченне значення електропровідності.

У класичній теорії важливим є поняття середнього часу між зіткненнями - часу релаксації. Саме він визначає, як швидко електрон “забуває” свою попередню швидкість. На основі цієї моделі отримують вираз для питомої електропровідності, який пов’язує мікроскопічні характеристики з макроскопічними властивостями матеріалу:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (1.1)$$

де n - концентрація вільних електронів, e - заряд електрона, τ - час релаксації, m - маса електрона.

Ця формула добре пояснює залежність електропровідності від концентрації носіїв заряду та частоти їх зіткнень. Класична теорія також приводить до закону Ома на мікроскопічному рівні, який встановлює пропорційність між густиною струму та напруженістю електричного поля:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.2)$$

Попри успіхи, класична теорія має суттєві обмеження. Вона не може пояснити, чому електропровідність деяких речовин різко відрізняється (наприклад, провідники, напівпровідники та діелектрики), а також не дає правильного опису температурної залежності теплоємності електронного газу. Ці недоліки зумовили розвиток квантової теорії електропровідності, яка враховує хвильову природу електронів і принципи квантової механіки.

Квантова теорія базується на уявленні про те, що електрони в кристалі рухаються не хаотично між іонами, а перебувають у періодичному потенціалі кристалічної ґратки. Це призводить до утворення енергетичних зон – дозволених і заборонених рівнів енергії. Згідно з зонною теорією, електропровідність визначається тим, чи заповнена зона провідності електронами та чи є можливість для їх переходу між енергетичними станами.

У металах зона провідності частково заповнена, тому електрони можуть легко змінювати свою енергію під дією поля, що забезпечує високу провідність. У діелектриків між валентною зоною та зоною провідності існує широка заборонена зона, тому електрони практично не можуть брати участь у провідності. У напівпровідниках ця зона вузька, і навіть невелике підвищення температури або введення домішок різко змінює їх провідні властивості.

Квантова теорія також вводить поняття ефективної маси електрона, яка відрізняється від маси вільного електрона і враховує вплив кристалічного поля. Крім того, розподіл електронів за енергіями описується статистикою Фермі–Дірака, що визначає, які енергетичні рівні зайняті при певній температурі. Це дозволяє точно описувати поведінку електронів навіть при дуже низьких температурах, де класична теорія повністю втрачає застосовність.

Таким чином, класична теорія електропровідності дає просте і наочне пояснення процесу перенесення заряду та дозволяє отримати базові співвідношення, однак її точність обмежена. Квантова теорія, навпаки, забезпечує глибоке розуміння природи електропровідності, враховуючи структуру речовини на атомному рівні, зонну будову та квантові властивості електронів, що робить її необхідною для пояснення сучасних електронних матеріалів і технологій.

1.3 Питомий електричний опір речовини

Питомий електричний опір речовини є однією з основних характеристик, що визначає здатність матеріалу протидіяти проходженню електричного струму. Ця фізична величина позначається символом ρ (ρ_0) і показує, який опір має провідник довжиною 1 метр і площею поперечного перерізу 1 квадратний метр. Вона залежить виключно від природи речовини, її внутрішньої структури, температури та наявності домішок, але не залежить від геометричних розмірів конкретного провідника. Саме тому питомий опір є

зручною характеристикою для порівняння різних матеріалів за їх провідними властивостями.

Питомий опір є оберненою величиною до питомої електропровідності σ , що виражається співвідношенням:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (1.3)$$

Це означає, що матеріали з великим питомим опором мають низьку електропровідність, і навпаки - добрі провідники характеризуються малими значеннями ρ . Наприклад, метали, такі як мідь і срібло, мають дуже низький питомий опір, тоді як діелектрики (скло, гума) — надзвичайно високий. Питомий опір вимірюється в Ом $\cdot$ м або в Ом $\cdot$ мм²/м.

Таким чином, питомий електричний опір є фундаментальною характеристикою речовини, що відображає її здатність протидіяти руху електричних зарядів. Він визначається як макроскопічними параметрами, так і мікроскопічними процесами взаємодії носіїв заряду з внутрішньою структурою матеріалу, і відіграє ключову роль у фізиці твердого тіла, електротехніці та сучасних технологіях.

1.4 Залежність опору речовини від зовнішніх факторів

Залежність електричного опору речовини від зовнішніх факторів є важливою темою фізики, оскільки дозволяє зрозуміти, як змінюються електричні властивості матеріалів під впливом умов навколишнього середовища та зовнішніх дій. Електричний опір провідника визначається не лише його природою та геометричними розмірами, але й значною мірою залежить від температури, механічних деформацій, магнітного поля, освітлення та інших чинників. Ці залежності широко використовуються у техніці для створення різноманітних датчиків і електронних приладів.

Найбільш суттєвим фактором, що впливає на опір, є температура. У металах зі зростанням температури опір збільшується, що пояснюється посиленням теплових коливань атомів кристалічної ґратки. Це призводить до частіших зіткнень електронів із іонами, унаслідок чого зменшується їх середня довжина вільного пробігу. У першому наближенні ця залежність описується лінійним законом:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (1.3)$$

де R_0 - опір при початковій температурі;

α - температурний коефіцієнт опору, що вимірюється в обернених градусах Цельсія;

t - зміна температури.

Для напівпровідників і діелектриків залежність має протилежний характер: із підвищенням температури їх опір зменшується, оскільки збільшується кількість вільних носіїв заряду.

Іншим важливим фактором є механічна деформація провідника. При розтягуванні змінюється його довжина та площа поперечного перерізу, що безпосередньо впливає на опір. Крім того, деформація може змінювати й сам питомий опір через зміну структури матеріалу. На цьому явищі ґрунтується робота тензодатчиків, які використовуються для вимірювання механічних напружень.

Суттєвий вплив на опір може чинити і магнітне поле. У деяких матеріалах спостерігається явище магнітоопору – зміни електричного опору під дією магнітного поля. Це пов'язано зі зміною траєкторій руху заряджених частинок під дією сили Лоренца, що впливає на частоту їх зіткнень. У сучасній електроніці використовуються матеріали з гігантським магнітоопором, які застосовуються, наприклад, у пристроях зчитування інформації з магнітних носіїв.

Освітлення також може змінювати опір деяких речовин, особливо

напівпровідників. Під дією світла відбувається генерація додаткових носіїв заряду (електронів і дірок), що призводить до зменшення опору. Це явище називається фотопровідністю і лежить в основі роботи фоторезисторів та сонячних елементів.

Окрім зазначених факторів, на опір впливають також домішки, радіаційне випромінювання, електричні поля великої напруженості та частота струму (у випадку змінного струму). Наприклад, при високих частотах проявляється поверхневий ефект, коли струм розподіляється переважно біля поверхні провідника, що ефективно збільшує його опір.

Таким чином, електричний опір речовини є величиною, чутливою до багатьох зовнішніх факторів. Зміни температури, механічних деформацій, магнітного поля, освітлення та інших умов можуть суттєво впливати на провідні властивості матеріалів. Розуміння цих залежностей має велике значення як для фундаментальної фізики, так і для практичного застосування у вимірювальній техніці, електроніці та сучасних технологіях.

1.5 Застосування провідників із різними значеннями електричного опору

Застосування провідників із різними значеннями електричного опору є надзвичайно важливим у сучасній електротехніці та електроніці, оскільки саме підбір матеріалу з певними електричними властивостями дозволяє ефективно керувати струмом, енергією та сигналами в електричних колах. Електричний опір провідника визначає, наскільки сильно він протидіє проходженню струму, і залежить як від геометричних параметрів, так і від питомого опору матеріалу. Тому матеріали з низьким, середнім і високим опором мають принципово різні сфери застосування.

Провідники з дуже малим електричним опором, такі як мідь, алюміній і срібло, широко використовуються для передачі електричної енергії. Їх головна перевага полягає у мінімальних втратах енергії під час проходження струму,

оскільки виділення тепла прямо пов'язане з опором провідника. Саме тому з таких матеріалів виготовляють електричні дроти, кабелі, обмотки трансформаторів і електродвигунів. У високочастотних і спеціалізованих системах іноді застосовують навіть надпровідники, в яких за певних умов опір практично зникає, що дозволяє передавати струм без втрат.

Провідники із середніми значеннями опору використовуються там, де необхідно обмежувати силу струму або створювати певні електричні режими. До таких елементів належать резистори – одні з найпоширеніших компонентів електронних схем. Вони виготовляються зі спеціальних сплавів або композиційних матеріалів, які мають стабільний питомий опір і слабку залежність від температури. Завдяки цьому резистори дозволяють точно регулювати струм, напругу та розподіл енергії в колі, забезпечуючи правильну роботу електронних пристроїв.

Матеріали з великим електричним опором знаходять застосування у нагрівальних елементах і захисних пристроях. Наприклад, ніхром і подібні сплави використовуються в електроплитах, прасках, електричних обігрівачах, де електрична енергія спеціально перетворюється на теплову. Високий опір таких матеріалів забезпечує значне виділення тепла навіть при відносно невеликому струмі, а також їх стійкість до високих температур і окиснення.

Окрему групу становлять матеріали зі змінним або керованим опором. До них належать терморезистори, у яких опір залежить від температури, фоторезистори, чутливі до освітлення, а також варистори, що змінюють опір залежно від напруги. Такі елементи широко застосовуються у датчиках, автоматичних системах керування, захисті електричних пристроїв від перенапруги та стабілізації режимів роботи.

Крім того, провідники з різними значеннями опору використовуються у вимірювальній техніці. Наприклад, еталонні резистори застосовуються для калібрування приладів, а шунти з малим опором – для вимірювання великих струмів. У високочастотній техніці підбір матеріалів із відповідними електричними властивостями дозволяє зменшити втрати сигналу та

забезпечити ефективну передачу електромагнітних хвиль.

Таким чином, різноманіття матеріалів із різними значеннями електричного опору дає змогу реалізовувати широкий спектр технічних рішень – від передачі електроенергії до точного керування електричними процесами та створення чутливих сенсорних систем. Правильний вибір провідника відповідно до його електричних характеристик є ключовим чинником ефективності, надійності та безпеки будь-якого електричного чи електронного пристрою.

1.6 Висновки

У результаті виконання оглядової частини дипломної роботи узагальнено теоретичні основи природи електричного опору та електропровідності у провідниках. Показано, що електричний опір має мікроскопічне походження і зумовлений процесами розсіювання носіїв заряду на коливаннях кристалічної ґратки, домішках і дефектах структури, причому домінуючі механізми розсіювання визначаються температурним режимом. Встановлено, що макроскопічні характеристики опору тісно пов'язані з геометричними параметрами провідника та питомими властивостями матеріалу.

Проаналізовано класичну та квантову теорії електропровідності, що дозволило з'ясувати межі застосовності кожної з них. Визначено, що класична модель Друде–Лоренца адекватно описує загальні закономірності перенесення заряду та дає змогу отримати основні співвідношення, однак не враховує квантові ефекти. Водночас квантова теорія забезпечує більш повний опис електропровідності, враховуючи зонну структуру твердих тіл, статистику носіїв заряду та їх ефективні параметри, що є необхідним для аналізу сучасних матеріалів.

Розглянуто фізичний зміст питомого електричного опору як фундаментальної характеристики речовини, що визначає її здатність

протидіяти проходженню струму, та встановлено його зв'язок із електропровідністю і мікроскопічними параметрами середовища. Показано, що питомий опір є ключовим параметром при виборі матеріалів для практичних застосувань.

Визначено основні зовнішні фактори, що впливають на електричний опір, зокрема температуру, механічні деформації, магнітні поля та освітлення, і встановлено характер їх впливу на різні класи матеріалів. Обґрунтовано можливість використання цих залежностей у вимірювальних приладах, сенсорах і системах автоматичного керування.

Проаналізовано практичні аспекти застосування провідників із різними значеннями електричного опору та показано, що вибір матеріалу визначається вимогами до енерговтрат, тепловиділення, стабільності параметрів і функціонального призначення елементів електричних кіл.

2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Вступні зауваження

Загальновідомо, що електричний опір R об'єкта визначається як коефіцієнт пропорційності між напругою U та струмом I :

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.1)$$

Електричний опір однорідного провідника визначається співвідношенням [1]:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.2)$$

де ρ – питомий електричний опір;

l – довжина провідника;

S – площа поперечного перерізу провідника.

Слід зазначити, що рівняння (2.2) застосовується лише для провідника зі сталим по довжині поперечним перерізом (причому, цей поперечний переріз може мати будь-яку форму). Нижче ми розглядаємо приклади, що дозволяють аналітично або лише чисельно розв'язати задачу знаходження опору для провідника зі змінним поперечним перерізом (довжиною) або провідника без чітких меж.

2.2 Задачі, що мають аналітичний розв'язок

Розглянемо порожнисту провідну кулю з внутрішнім та зовнішнім радіусами, що дорівнюють відповідно r_1 та r_2 . Необхідно знайти її опір, якщо

між внутрішньою та зовнішньою поверхнями прикладено сталу напругу. Зазначимо, що в цьому випадку лінії протікання струму є радіальними прямими лініями (рис. 2.1).

Використовуючи цей факт, можна розбити провідник на нескінченно малі сферичні шари товщиною dr та радіусом r . Згідно з рівнянням (2.2), кожен з них має нескінченно малий опір $dR = \rho dr / (4\pi r^2)$. Оскільки ці шари з'єднані послідовно, матимемо:

$$R = \int dR = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.3)$$

Якщо $r_2 \rightarrow \infty$ (заряджена куля радіуса r_1 , розміщена в нескінченному провідному середовищі з питомим опором ρ), то з рівняння (2.3) отримуємо: $R = \rho / (4\pi r_1)$.

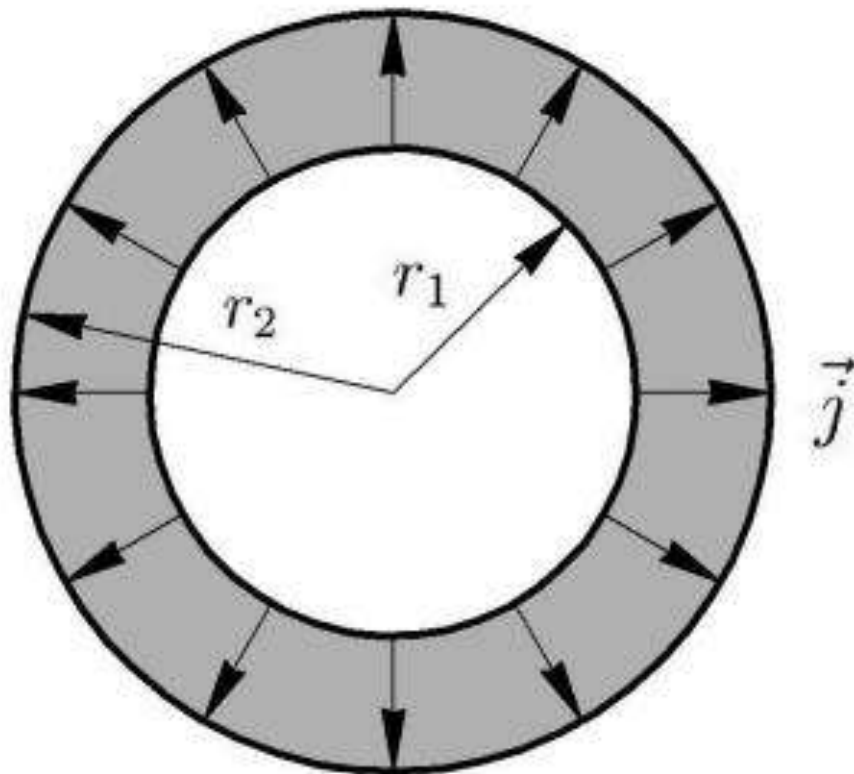


Рисунок 2.1 – Порожниста провідна куля

Розглянемо тепер довгий порожнистий циліндричний провідник довжиною h та з внутрішнім та зовнішнім радіусами, що дорівнюють відповідно r_1 та r_2 ($r_2 \ll h$). Як і в попередньому випадку, лінії його течії є радіальними прямими лініями (рис. 2.2). Тоді, розділивши цей провідник на сукупність нескінченно малих циліндричних шарів товщиною dr , матимемо: $dR = \rho dr / (2\pi r h)$ і

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (2.4)$$

Якщо $r_2 \rightarrow \infty$ (довгий заряджений циліндр радіуса r_1 , розміщений в нескінченному провідному середовищі з питомим опором ρ), то з рівняння (2.4) отримуємо: $R \rightarrow \infty$.

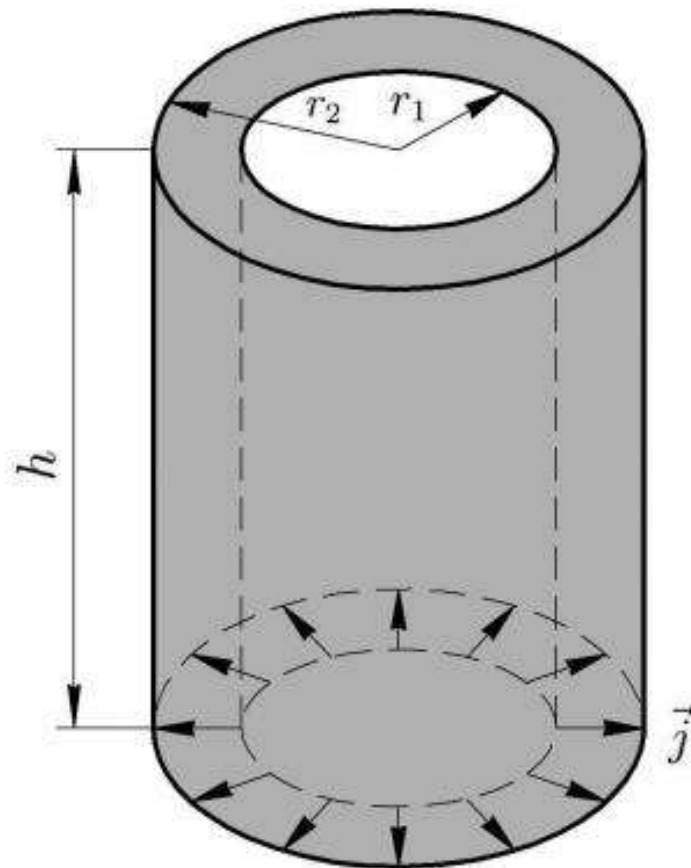


Рисунок 2.2 – Порожнистий циліндричний провідник

Розглянутий вище метод визначення опору шляхом підсумовування його значення по нескінченно малих шарах також справедливий також для випадку, коли лінії протікання струму викривляються (через вигин провідника), але залишаються паралельними в будь-якому поперечному перерізі провідника. Як приклад можна розглянути півкільце товщиною t , показане на рис. 2.3. Спробуємо знайти опір між його кінцями. У цьому випадку ми маємо справу з провідником змінної довжини. Опір нескінченно малого кільця з радіусом r та шириною dr дорівнює $dR = \rho \pi r / (t dr)$. Опори різних елементарних півкільць з'єднано паралельно одне одному. Отже,

$$\frac{1}{R} = \int \frac{1}{dR} = \frac{t}{\pi \rho} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{t}{\pi \rho} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (2.5)$$

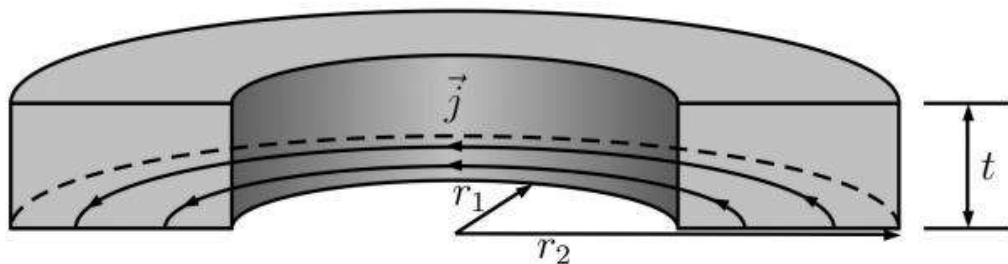


Рисунок 2.3 – Провідне напівкільце.

2.3 Резистор без чітких меж

Вищеописаний метод визначення опору об'єкта не «працює», у випадку провідника без чітких меж («розмитий провідник» або «масивний» провідник). Розглянемо систему з двох провідників довільної форми, які розміщені в нескінченному однорідному слабо-провідному середовищі з питомим опором ρ та діелектричною проникністю ε [2]. Знайдемо добуток RC , де R - опір середовища між провідниками, а C - взаємна ємність такої системи.

Оскільки середовище є слабо-провідним, можна припустити, що провідність провідників значно вища, ніж провідність середовища. Тоді можна знехтувати зміною потенціалу всередині провідників, тобто припускати, що всі точки кожного електрода мають однаковий потенціал. Напругу між електродами підтримуємо сталою і рівною U .

Подумки оточимо один з електродів довільною замкненою поверхнею S . Тоді загальний струм через цю поверхню буде:

$$I = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.6)$$

де $\vec{j}$ – густина струму;

$\vec{E}$ – напруженість електричного поля (тут ми використовували співвідношення $\vec{j} = \vec{E}/\rho$).

З іншого боку, застосовуючи закон Гаусса, матимемо:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (2.7)$$

де $q = CU$ – заряд одного з електродів;

ε_0 – діелектрична проникність вакууму.

Використовуючи рівняння (2.1), (2.6), (2.7), остаточно отримуємо [2]:

$$RC = \rho \varepsilon \varepsilon_0. \quad (2.8)$$

Як приклад застосування рівняння (2.8) розглянемо випадок двох паралельних дротів радіуса r та довжини l . Нехай відстань між їхніми осями симетрії є рівною d ($d > 2r$). Враховуючи вираз для електричної ємності такої системи [3], ми одразу отримуємо:

$$RC = \frac{\rho}{\pi l} \operatorname{arcosh} \left(\frac{d}{2r} \right). \quad (2.9)$$

Отже, згідно з рівнянням (2.9), опір такої системи нелінійно зростає зі збільшенням відносної відстані між проводами $d/2r$ (рис. 2.4). При $d = 2r$ маємо: $R = 0$. Якщо $d \rightarrow \infty$, то $R \rightarrow \infty$.

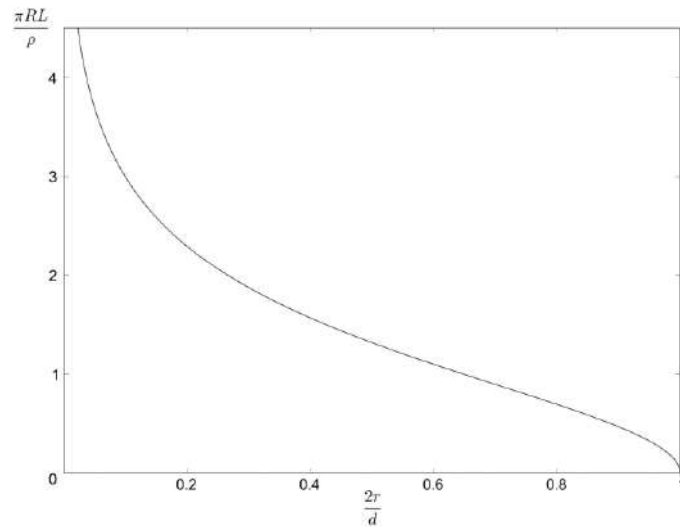


Рисунок 2.4 – $\pi RL/\rho$ як функція $2r/d$ згідно з рівнянням (2.9)

Ми можемо також розглянути випадок двох кульок радіуса r кожна, які знаходяться на великій відстані d ($d \gg r$) одна від одної. Електрична ємність кожної кульки становить $C_0 = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$. Оскільки таку систему можна розглядати як два конденсатори, з'єднані послідовно, то $C = C_0/2$ і

$$RC = \frac{\rho}{2\pi r}. \quad (2.10)$$

Відповідно до рівняння (2.10) опір R не залежить від відстані між кульками. Це пояснює результат, емпірично знайдений телеграфістами, які виявили (на свій подив), що опір землі між телеграфними станціями не залежить від відстані між ними.

Користуючись рівняння (2.8), обчислимо контактний опір між двома провідниками. Такий резистор можна розглядати як один отвір радіуса r , вирізаний у нескінченно великій плоскій перегородці з ізоляційного матеріалу. Власна ємність провідного диска визначається як $C_0 = 8\epsilon\epsilon_0 r$. Насправді, лише половина ємності C_0 є релевантною ($C = C_0/2$), оскільки для нашої задачі сторони провідного диска мають протилежні знаки заряду. Загальний контактний опір виявляється послідовним з'єднанням двох однакових резисторів (R_{in} та R_{out}), при цьому $R_{in} = R_{out} = \rho\epsilon\epsilon_0/C$. Тоді

$$RC = \frac{\rho}{2r}. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.11) вперше було виведено Дж. К. Максвеллом [4]. Згідно з цим рівнянням, контактний опір різко зростає зі зменшенням розміру плями контакту.

Цікаво, що рівняння (2.3), (2.4) можна вивести за допомогою рівняння (2.8). Рівняння (2.3), (2.4), (2.8) часто застосовуються для оцінки опору витoku [5] сферичних, циліндричних та інших типів конденсаторів. Слід зазначити, що в багатьох випадках задача знаходження взаємної ємності не менш складна, ніж задача знаходження опору. Для цих випадків слід використовувати прямий метод розрахунку опору, заснований на розв'язку рівняння Лапласа.

2.4 Висновки

Здійснено детальний аналіз аналітичних методів знаходження електричного опору провідників зі змінним перерізом. Показано, що коло таких задач є дуже обмеженим через складність знаходження взаємної ємності у випадку неоднорідного електричного поля.

Наведено детальне виведення співвідношення Максвелла, що дозволяє визначити опір провідника без чітких меж. Проілюстровано приклади застосування цього виразу у декількох важливих практичних випадках.

Встановлено, що опір шару землі між телеграфними станціями не залежить від відстані між ними. Також показано, що контактний опір різко зростає зі зменшенням розміру плями контакту.

Розглянуто граничні випадки поведінки опору циліндричного та сферичного провідного шару.

3 ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА

3.1 Задача про визначення опору трапецієподібної пластини. Наближення однорідного електричного поля

Розглянемо провідну пластину фіксованої довжини l та товщини t . Припустимо, що ця пластина має форму рівнобедреної трапеції з криволінійними бічними сторонами, а між її основами прикладено напругу U . Позначимо довжини основ трапецій як a та b (покладемо $b > a$) та виберемо двовимірну декартову систему координат, як показано на рис. 3.1. Рівняння криволінійної сторони можна апроксимувати степеневою функцією:

$$y(x) = \left(\frac{2x - a}{b - a} \right)^n l, \quad (3.1)$$

де n – показник степеня.

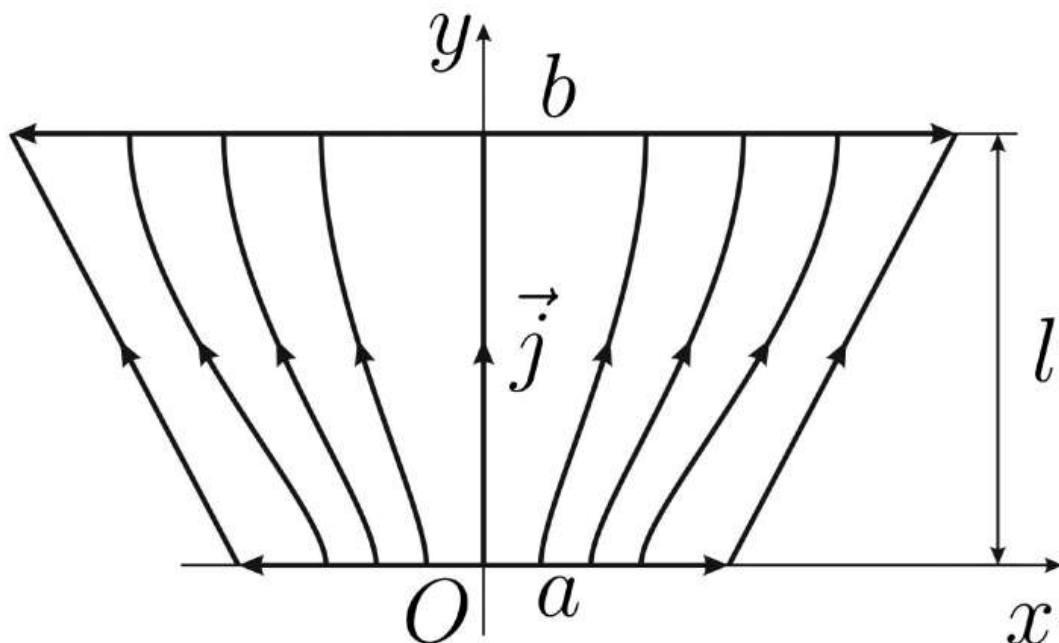


Рисунок 3.1 – Геометрія задачі про визначення опору трапецієподібної пластини

Використовуючи рівняння (3.1) та розглянутий вище метод «додавання опорів нескінченно малих шарів», можна знайти загальний опір. Наприклад:

$$R_0 = \frac{\rho l}{t\sqrt{a(b-a)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\right) \quad (n = 1/2), \quad (3.2)$$

$$R_0 = \frac{\rho l}{t(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (n = 1), \quad (3.3)$$

$$R_0 = \frac{2\rho l}{t(b-a)^2} \left(b - a - a \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \quad (n = 2). \quad (3.4)$$

Слід зазначити, що у всіх випадках $R_0 \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$ (така ж ситуація виникає, якщо покласти $r_1 \rightarrow 0$ у виразах (2.3), (2.4)). Якщо $a \rightarrow b$, ми отримуємо «стандартне» співвідношення (2.2).

Рівняння (3.2)–(3.4) виведені за умови, що електричне поле всередині провідника є однорідним. Насправді, ситуація з визначенням опору для таких об'єктів виявляється набагато складнішою через те, що лінії потоку (електричного поля) не є прямими паралельними лініями, а викривлені (див. рис. 3.1), так що нормальна складова напруженості електричного поля зникає на сторонах пластини. Відповідно, екіпотенціальні поверхні також не є площинами, перпендикулярними до осі симетрії трапеції. Це питання детально обговорювалося у роботах [6-8]. Нижче ми продовжимо цей аналіз за допомогою числових розрахунків, виконаних для трьох випадків: $n = 1/2, 1, 2$ (рис. 3.2).

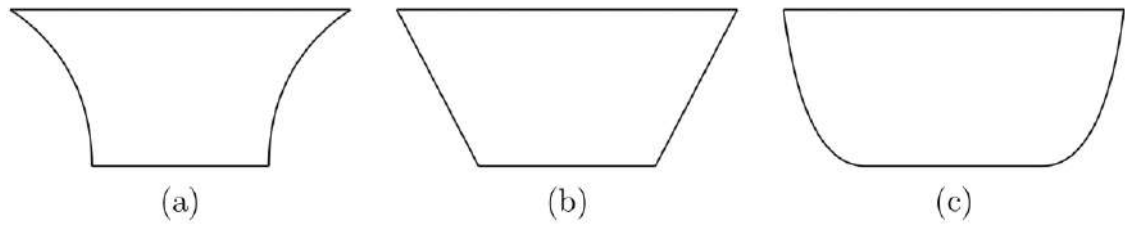


Рисунок 3.2 Три досліджені геометрії трапецієподібної пластини. (a) – $n = 1/2$; (b) – $n = 1$; (c) – $n = 2$

3.2 Врахування неоднорідності електричного поля. Двовимірне рівняння Лапласа та крайові умови

Повернемося до з рівняння (2.1) і запишемо: $U = \Phi_1 - \Phi_2$, де $\Phi_{1,2}$ – електричні потенціали основ трапеції

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\rho} \iint \nabla \Phi \cdot d\vec{S}, \quad (3.5)$$

де інтеграл береться по довільному поперечному перерізу провідника S (тут ми скористалися рівнянням (2.6) та співвідношенням $\vec{E} = -\nabla \Phi$).

Таким чином, розв'язок нашої задачі зводиться до знаходження потенціалу Φ всюди всередині резистора. Це можна зробити, розв'язавши рівняння Лапласа $\Delta \Phi = 0$ з відповідними граничними умовами. Враховуючи симетрію нашої задачі, матимемо, що електричний потенціал залежить лише від координат x та y , а рівняння Лапласа приймає вигляд:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.6)$$

На основах трапеції мають місце наступні граничні умови Діріхле:

$$\Phi(x, 0) = \Phi_1 \quad \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\right), \quad (3.7)$$

$$\Phi(x, l) = \Phi_2 \quad \left(-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}\right). \quad (3.8)$$

Існують також граничні умови Неймана на бічних поверхнях трапеції, згідно з якими нормальна до цих поверхонь складова напруженості електричного поля обертається в нуль. Ця умова має вигляд:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{y=f(x)} = 0. \quad (3.9)$$

де $\vec{n}$ – вектор нормалі до бічної поверхні; функція $f(x)$ визначається рівнянням (3.1).

3.3 Комп'ютерна програма для проведення числових розрахунків

Числова реалізація розв'язку задачі визначення електричного опору трапецієподібної провідної пластини виконана мовою програмування Python [9] із використанням спеціалізованого середовища для методу скінченних елементів. Обчислення проводилися із застосуванням бібліотеки FEniCS, яка є відкритою платформою для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних у варіаційній постановці. Додатково використовувалися бібліотеки NumPy для роботи з числовими даними та Matplotlib для візуалізації результатів.

Програмна реалізація може виконуватися у середовищах типу Linux, Windows або macOS за умови встановлення відповідного дистрибутиву FEniCS, зокрема через Docker-контейнери або менеджери пакетів. Найбільш стабільним варіантом є використання ізольованого середовища, що гарантує сумісність усіх залежностей, оскільки FEniCS включає власні реалізації генерації сіток, інтегрування та розв'язання систем лінійних рівнянь.

Алгоритм розв'язання складається з кількох послідовних етапів. На першому етапі задаються фізичні параметри задачі, зокрема значення прикладеної напруги, геометричні характеристики пластини та електропровідність матеріалу. Після цього формується обчислювальна область, яка апроксимує геометрію трапецієподібної пластини. У запропонованій реалізації використовується регулярна прямокутна сітка, яка охоплює всю область, після чого геометрія ефективно задається через аналітичний опис меж. Такий підхід спрощує побудову сітки, хоча й вносить певну похибку апроксимації, яка може бути зменшена шляхом згущення сітки.

Далі виконується дискретизація області. Простір шуканих функцій задається як простір кусочно-лінійних функцій, що визначені на трикутних елементах. Кожен вузол сітки відповідає значенню потенціалу, а всередині елемента потенціал апроксимується лінійною інтерполяцією. Це є стандартним підходом у методі скінченних елементів, який забезпечує достатню точність при відносно невеликих обчислювальних витратах.

На наступному етапі формується варіаційна постановка задачі. Бібліотека FEniCS дозволяє задавати її у декларативній формі, максимально наближеній до математичного запису. На основі цієї постановки автоматично виконується побудова глобальної матриці жорсткості та вектора правої частини. Важливою особливістю є те, що інтегрування по елементах, а також облік внесків від усіх вузлів здійснюється автоматично, без необхідності ручної реалізації чисельних квадратур.

Граничні умови реалізуються комбіновано. Умови Діріхле на верхній і нижній основах задаються явно шляхом фіксації значень потенціалу у відповідних вузлах сітки. Натомість умови Неймана на бічних поверхнях не вводяться явно, оскільки в рамках варіаційної постановки вони автоматично враховуються як природні граничні умови. Це є важливою перевагою методу скінченних елементів, яка спрощує програмну реалізацію задач із ізольованими межами.

Після формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь виконується

її чисельне розв'язання. FEniCS використовує ефективні вбудовані лінійні солвери, які можуть базуватися як на прямих, так і на ітераційних методах. Вибір конкретного алгоритму здійснюється автоматично або може бути налаштований користувачем залежно від розмірності задачі. У даній реалізації застосовується стандартний розв'язувач, оптимізований для розріджених симетричних матриць, що характерно для задач типу рівняння Лапласа.

Після отримання чисельного розв'язку виконується пост-обробка результатів. Зокрема, обчислюється градієнт потенціалу, який визначає електричне поле в кожній точці області. Далі визначається густина струму, що пропорційна електричному полю. Для знаходження повного струму використовується інтегрування нормальної складової густини струму через вибрану граничну поверхню. Цей інтеграл обчислюється чисельно на основі тих самих скінченних елементів, що забезпечує узгодженість результатів.

Електричний опір визначається як відношення прикладеної напруги до обчисленого струму. Таким чином, задача визначення опору зводиться до однократного розв'язання рівняння Лапласа з відповідними граничними умовами.

Окремою особливістю реалізації є можливість варіювання параметра, який визначає форму бокових меж пластини. Це дозволяє досліджувати вплив геометрії на розподіл електричного поля та значення опору без зміни основної структури алгоритму. Також передбачена можливість зміни густини сітки, що дає змогу контролювати точність розрахунків і проводити аналіз збіжності.

Візуалізація результатів здійснюється за допомогою бібліотеки Matplotlib. Розподіл потенціалу відображається у вигляді кольорових карт, що дозволяє наочно аналізувати структуру електричного поля. За необхідності можуть бути побудовані також лінії рівного потенціалу або векторні поля.

Таким чином, запропонована програмна реалізація поєднує гнучкість методу скінченних елементів із зручністю сучасних програмних засобів і дозволяє ефективно досліджувати електричні властивості провідників складної геометрії.

Нижче наведено програмний код, згенерований у середовищі Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from dolfin import *

# -----
# ПАРАМЕТРИ ЗАДАЧІ
# -----
V0 = 1.0      # Напруга
sigma = 1.0    # Провідність
L = 1.0       # Висота пластини
a = 1.0       # Нижня основа
b = 0.5       # Верхня основа
m = 2         # Степінь кривизни

# -----
# ГЕОМЕТРІЯ
# -----
class Trapezoid(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        # Межі області
        y = x[1]
        x_left = -0.5 * (a - (a - b)*(y/L)**m)
        x_right = 0.5 * (a - (a - b)*(y/L)**m)
        return (x[0] >= x_left) and (x[0] <= x_right)

# Створюємо прямокутну сітку і обрізаємо
nx, ny = 60, 60
mesh = RectangleMesh(Point(-a/2, 0), Point(a/2, L), nx, ny)
```



```

# Функціональний простір
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# -----
# ГРАНИЦІ
# -----
def bottom(x, on_boundary):
    return near(x[1], 0) and on_boundary

def top(x, on_boundary):
    return near(x[1], L) and on_boundary

# Граничні умови Діріхле
bc_bottom = DirichletBC(V, Constant(V0), bottom)
bc_top = DirichletBC(V, Constant(0.0), top)

bcs = [bc_bottom, bc_top]

# -----
# ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА
# -----
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)

a_form = dot(grad(u), grad(v)) * dx
L_form = Constant(0) * v * dx

# -----
# РОЗВ'ЯЗАННЯ
# -----

```

```

u_sol = Function(V)
solve(a_form == L_form, u_sol, bcs)

# -----
# ОБЧИСЛЕННЯ СТРУМУ
# -----
# Нормаль
n = FacetNormal(mesh)

# Потік через нижню основу
current = assemble(sigma * dot(grad(u_sol), n) * ds)

# Опір
R = V0 / abs(current)

print("Струм I =", current)
print("Опір R =", R)

# -----
# ВІЗУАЛІЗАЦІЯ
# -----
plt.figure()
plot(u_sol)
plt.title("Потенціал")
plt.colorbar()
plt.show()

# -----
# ПАРАМЕТРИ ЗАДАЧІ
# -----
V0 = 1.0      # Напруга

```

```

sigma = 1.0    # Провідність
L = 1.0        # Висота пластини
a = 1.0        # Нижня основа
b = 0.5        # Верхня основа
m = 2         # Степінь кривизни

# -----
# ГЕОМЕТРІЯ
# -----

class Trapezoid(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        # Межі області
        y = x[1]
        x_left = -0.5 * (a - (a - b)*(y/L)**m)
        x_right = 0.5 * (a - (a - b)*(y/L)**m)
        return (x[0] >= x_left) and (x[0] <= x_right)

# Створюємо прямокутну сітку і обрізаємо
nx, ny = 60, 60
mesh = RectangleMesh(Point(-a/2, 0), Point(a/2, L), nx, ny)

# Функціональний простір
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# -----
# ГРАНИЦІ
# -----

def bottom(x, on_boundary):
    return near(x[1], 0) and on_boundary

```

```

def top(x, on_boundary):
    return near(x[1], L) and on_boundary

# Граничні умови Діріхле
bc_bottom = DirichletBC(V, Constant(V0), bottom)
bc_top = DirichletBC(V, Constant(0.0), top)

bcs = [bc_bottom, bc_top]

# -----
# ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА
# -----
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)

a_form = dot(grad(u), grad(v)) * dx
L_form = Constant(0) * v * dx

# -----
# РОЗВ'ЯЗАННЯ
# -----
u_sol = Function(V)
# ОБЧИСЛЕННЯ СТРУМУ
# -----
# Нормаль
n = FacetNormal(mesh)

# Потік через нижню основу
current = assemble(sigma * dot(grad(u_sol), n) * ds)

```

```

# Опір
R = V0 / abs(current)

print("Струм I =", current)
print("Опір R =", R)

# -----
# ВІЗУАЛІЗАЦІЯ
# -----

plt.figure()
plot(u_sol)
plt.title("Потенціал")
plt.colorbar()
plt.show()

```

3.4 Результати числових розрахунків

На рис. 3.3 зображено залежності $R(a/b)$, розраховані за допомогою рівнянь (2.1) та (3.1)–(3.9) при різних значеннях відношення b/l та показника n .

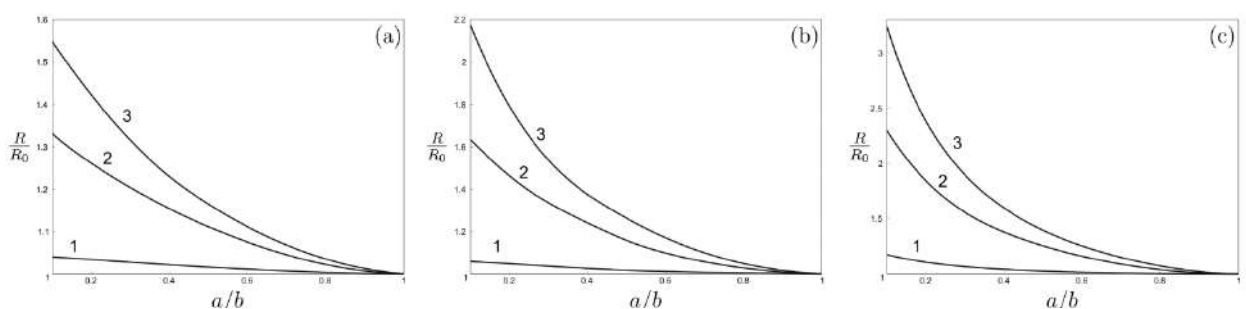


Рисунок 3.3 Залежність $R(a/b)$. (1) – $b/l = 1$; (2) – $b/l = 5$; (3) – $b/l = 10$. (a) – $n = 1/2$; (b) – $n = 1$; (c) – $n = 2$

Видно, що у всіх випадках реальне (справжнє) значення опору більше, ніж його значення, отримане в припущенні однорідного електричного поля.

Цей факт можна пояснити на основі принципу мінімуму електричної потужності [10]. Згідно з цим принципом, струми розподіляються всередині об'єму провідника так, щоб електрична потужність була якомога меншою. Оскільки $P = U^2/R$, то при фіксованій напрузі струми повинні розподілятися таким чином, щоб забезпечити максимальний опір зразка. Це означає, що $R > R_0$ завжди.

За фіксованого значення b/l та n різниця між значеннями опору R та R_0 збільшується зі зменшенням відношення a/b . Ця різниця також збільшується зі збільшенням b/l та n .

3.5 Висновки

У третьому розділі виконано дослідження електричного опору провідної пластини трапецієподібної форми з криволінійними бічними межами. Спочатку було розглянуто наближений аналітичний підхід, який базується на припущенні про однорідний розподіл електричного поля всередині провідника та методі додавання опорів нескінченно малих шарів. Для кількох значень показника ступеня, що визначає форму бокових меж пластини, отримано аналітичні вирази для електричного опору. Показано, що при виродженні однієї з основ трапеції опір необмежено зростає, тоді як у граничному випадку прямокутної пластини результати переходять до відомої формули для однорідного провідника.

Для більш точного опису процесів перенесення струму враховано неоднорідність електричного поля шляхом розв'язання двовимірного рівняння Лапласа з відповідними граничними умовами Діріхле та Неймана. Встановлено, що реальний розподіл потенціалу та силових ліній суттєво відрізняється від наближення однорідного поля, оскільки лінії струму викривляються відповідно до геометрії бічних меж провідника.

Для чисельного розв'язання задачі розроблено програмну реалізацію на мові Python із використанням методу скінченних елементів та бібліотеки

FEniCS. Реалізований алгоритм дозволяє визначати розподіл потенціалу, електричного поля, густини струму та обчислювати повний струм через провідник, що дає можливість знаходити його електричний опір для різних геометричних параметрів.

Аналіз результатів чисельних розрахунків показав, що в усіх досліджених випадках значення опору, отримані з урахуванням неоднорідності електричного поля, перевищують результати, розраховані в межах наближення однорідного поля. Це узгоджується з принципом мінімуму електричної потужності, згідно з яким реальний розподіл струму забезпечує максимальне значення опору за заданої напруги. Встановлено, що відхилення між точним та наближеним значеннями опору зростає зі зменшенням відношення a/b , а також зі збільшенням відношення b/l і показника степеня n , який характеризує кривизну бокових меж пластини. Отримані результати свідчать про суттєвий вплив геометрії провідника на його електричні характеристики та необхідність врахування неоднорідності електричного поля під час розрахунку опору провідників складної форми. Таким чином, проведене дослідження підтвердило ефективність застосування методу скінченних елементів для аналізу електричних властивостей провідників складної геометрії та дозволило кількісно оцінити похибку, що виникає при використанні спрощених аналітичних моделей.

4 ОХОРОНА ПРАЦІ

4.1 Загальні положення

Охорона праці є системою правових, соціально-економічних, організаційно-технічних та санітарно-гігієнічних заходів, спрямованих на збереження життя, здоров'я та працездатності людини в процесі трудової діяльності [11]. Забезпечення безпечних умов праці є обов'язковою складовою підготовки фахівців технічних спеціальностей, зокрема у галузі електротехніки.

При виконанні розрахунків електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом основна діяльність пов'язана з обробкою текстової та графічної інформації, роботою з формулами, схемами та програмними засобами моделювання. Такий вид роботи характеризується підвищеним зоровим навантаженням, тривалим перебуванням за комп'ютером та високими вимогами до точності виконання операцій.

У зв'язку з цим особливого значення набуває організація раціонального освітлення робочого місця, оскільки саме освітлення є одним із ключових факторів виробничого середовища, що впливає на функціональний стан організму людини, продуктивність праці та якість виконання роботи [12]. Недостатній рівень освітленості або його нерівномірність можуть призводити до швидкої втомлюваності, зниження концентрації уваги, збільшення кількості помилок, а також до розвитку професійних захворювань органів зору.

Відповідно до вимог державних будівельних норм України ДБН В.2.5-28:2018 «Природне і штучне освітлення», для приміщень, у яких виконуються роботи середньої точності (зокрема робота з документами, кресленнями та комп'ютерною технікою), нормована освітленість повинна становити 300–500 лк [13]. Дотримання цих норм є необхідною умовою забезпечення безпечних та комфортних умов праці.

Крім того, організація робочого місця повинна відповідати вимогам нормативних документів з охорони праці при роботі з електронно-обчислювальними машинами, що регламентують параметри освітлення, розташування обладнання, а також режими праці та відпочинку [14].

Таким чином, правильне проєктування системи освітлення є важливим етапом забезпечення охорони праці та створення оптимальних умов для виконання інженерних розрахунків.

4.2 Характеристика приміщення

Для виконання інженерних розрахунків електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом розглядається робоче приміщення, яке відповідає умовам навчального або офісного середовища.

Основні геометричні параметри приміщення:

- площа приміщення –

$$S = 20 \text{ м}^2 .$$

- висота приміщення –

$$H = 3 \text{ м} .$$

Приміщення призначене для виконання робіт, пов'язаних із використанням персонального комп'ютера, обробкою текстової інформації, розрахунками, побудовою графіків та аналізом електротехнічних процесів. Такий вид діяльності характеризується високим рівнем зорового навантаження та потребує забезпечення належних умов освітлення [15].

Згідно з класифікацією зорових робіт, даний вид діяльності відноситься до робіт середньої точності, що передбачає роботу з об'єктами розміром понад 0,5 мм. Для таких умов нормативні документи встановлюють відповідний рівень освітленості.

Нормована освітленість робочої поверхні визначається відповідно до ДБН В.2.5-28:2018 і приймається:

$$E = 400 \text{ лк},$$

що знаходиться в межах допустимого діапазону 300–500 лк для приміщень з використанням комп'ютерної техніки [12].

Крім геометричних параметрів, важливими характеристиками приміщення є коефіцієнти відбиття поверхонь, які впливають на ефективність використання світлового потоку:

- стеля — 0,7;
- стіни — 0,5;
- підлога — 0,3.

Ці значення відповідають типовим умовам експлуатації та враховуються при подальшому розрахунку системи штучного освітлення.

Таким чином, задані параметри приміщення є вихідними даними для проведення розрахунку штучного освітлення та дозволяють забезпечити відповідність умов праці встановленим нормативним вимогам.

4.3 Метод розрахунку освітлення

Освітлення виробничих, навчальних і житлових приміщень є одним із найважливіших факторів, що визначають комфортність перебування людини, ефективність виконання роботи та рівень безпеки. Недостатній рівень освітленості може призводити до перевтоми, зниження працездатності та погіршення зору [13].

Для визначення параметрів освітлювальних установок застосовуються різні методи, серед яких найбільш поширеним є метод світлового потоку (люмен-метод). Цей метод дозволяє визначити необхідний світловий потік для забезпечення нормованої освітленості в приміщенні [16].

Сутність методу світлового потоку

Метод світлового потоку базується на визначенні загального світлового потоку, який повинен створюватися джерелами світла для досягнення заданого рівня освітленості на робочій поверхні [17].

Даний метод є ефективним для розрахунку загального рівномірного освітлення і широко використовується при проєктуванні освітлення навчальних та адміністративних приміщень [18].

Основна формула розрахунку:

$$\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta},$$

де Φ – необхідний світловий потік, лм;

E – освітленість, лк;

S – площа приміщення, м²;

K – коефіцієнт запасу;

η – коефіцієнт використання світлового потоку [19].

Характеристика параметрів

Освітленість (E) є основною нормованою величиною, що визначає рівень освітлення робочої поверхні. Вона встановлюється відповідно до нормативних документів і залежить від характеру виконуваних робіт [18]. Наприклад, для навчальних аудиторій освітленість становить 300–500 лк [19].

Площа приміщення (S) визначається як добуток довжини та ширини приміщення. Цей параметр безпосередньо впливає на загальну потребу в освітленні [20].

Коефіцієнт запасу (K) враховує зниження освітленості в процесі експлуатації освітлювальної установки, зокрема через забруднення світильників і старіння ламп [20].

Коефіцієнт використання світлового потоку (η) показує частку світлового потоку, яка досягає робочої поверхні. Його значення залежить від конструкції світильників і відбивних властивостей поверхонь [20].

Фактори, що впливають на ефективність освітлення

Ефективність освітлення залежить від ряду факторів, серед яких:

- геометричні параметри приміщення;
- висота підвісу світильників;
- коефіцієнти відбиття стелі, стін і підлоги;
- тип джерела світла;
- рівномірність розподілу світлового потоку [15].

Світлі поверхні приміщення сприяють кращому використанню світлового потоку, тоді як темні – знижують ефективність освітлення [16].

Алгоритм розрахунку освітлення

Розрахунок методом світлового потоку виконується за наступною послідовністю:

1. Визначення площі приміщення;
2. Вибір нормованої освітленості;
3. Визначення коефіцієнтів K та η ;
4. Розрахунок загального світлового потоку;
5. Вибір типу джерела світла;
6. Визначення кількості світильників;
7. Перевірка відповідності нормативним вимогам [14].

Приклад розрахунку

Нехай задано:

$$S = 20 \text{ м}^2;$$

$$E = 300 \text{ лк};$$

$$K = 1,3;$$

$$\eta = 0,5.$$

Підставляємо у формулу:

$$\Phi = (300 \times 20 \times 1,3) / 0,5 = 15600 \text{ лм}$$

Отже, необхідний світловий потік становить 15600 лм.

Якщо використовується лампа зі світловим потоком 1500 лм:

$$N = 15600 / 1500 \approx 10,4 \approx 11 \text{ ламп [15].}$$

Переваги та недоліки методу

Переваги:

- простота використання;
- універсальність;
- достатня точність [70].

Недоліки:

- не враховує локальне освітлення;
- не визначає точний розподіл світла;
- потребує уточнень для складних умов [18].

Висновок

Метод світлового потоку є одним із основних методів розрахунку освітлення, який дозволяє визначити необхідний світловий потік та кількість освітлювальних приладів. Його застосування забезпечує створення комфортних та безпечних умов праці відповідно до нормативних вимог [13].

4.4 Визначення коефіцієнтів

При розрахунку освітлення методом світлового потоку важливе значення мають допоміжні коефіцієнти, які враховують реальні умови експлуатації освітлювальної установки. До таких коефіцієнтів належать коефіцієнт запасу та коефіцієнт використання світлового потоку [13].

Коефіцієнт запасу (К)

Коефіцієнт запасу враховує зниження освітленості в процесі експлуатації освітлювальної установки. Це зниження обумовлене рядом факторів:

- старінням джерел світла (зменшення світлового потоку з часом);
- забрудненням світильників та поверхонь;
- зниженням прозорості розсіювачів;
- погіршенням відбивних властивостей стін і стелі [14].

Врахування цього коефіцієнта є необхідним для забезпечення нормативного рівня освітленості протягом усього терміну експлуатації освітлювальної установки.

Згідно з нормативними рекомендаціями, значення коефіцієнта запасу залежить від умов середовища:

- для чистих приміщень — 1,2;
- для звичайних умов — 1,3–1,4;
- для запилених або виробничих приміщень — до 1,5 [15].

У даному випадку приймається:

$K = 1,5$, що відповідає умовам можливого забруднення та необхідності забезпечення стабільного рівня освітлення [16].

Коефіцієнт використання світлового потоку (η)

Коефіцієнт використання світлового потоку показує, яка частина світлового потоку від джерел світла досягає робочої поверхні. Його значення залежить від ряду факторів:

- геометричних параметрів приміщення (довжина, ширина, висота);
- висоти підвісу світильників;
- типу та конструкції світильників;
- коефіцієнтів відбиття стелі, стін і підлоги [17].

Чим світліші поверхні приміщення, тим більшим є коефіцієнт використання світлового потоку, оскільки світло краще відбивається і розподіляється в просторі.

Зазвичай значення коефіцієнта η знаходиться в межах 0,4–0,6 для більшості стандартних приміщень [18].

У даному розрахунку приймається, $\eta = 0,6$, що відповідає сприятливим умовам освітлення та достатньо високим відбивним властивостям поверхонь.

Прийняті значення коефіцієнтів $K = 1,5$ та $\eta = 0,6$ дозволяють врахувати експлуатаційні втрати світлового потоку та ефективність його використання. Це забезпечує більш точний розрахунок освітлення та відповідність нормативним вимогам [19].

4.5 Розрахунок світлового потоку

На основі прийнятих вихідних даних та визначених коефіцієнтів виконується розрахунок необхідного світлового потоку для забезпечення нормативного рівня освітленості в приміщенні.

Для розрахунку використовується формула методу світлового потоку [20]:

$$\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta}$$

де Φ – необхідний світловий потік, лм;

E – нормована освітленість, лк;

S – площа приміщення, м²;

K – коефіцієнт запасу;

η – коефіцієнт використання світлового потоку.

Підстановка значень

Для даного приміщення прийнято:

$E = 400$ лк;

$S = 20$ м²;

$K = 1,5$;

$\eta = 0,6$.

Підставляємо значення у формулу:

$$\Phi = (400 \times 20 \times 1,5) / 0,6 = 20000 \text{ лм.}$$

Отже, для забезпечення необхідного рівня освітленості в приміщенні потрібно забезпечити загальний світловий потік 20000 лм.

Аналіз отриманого результату

Отримане значення світлового потоку враховує як нормативну освітленість, так і експлуатаційні втрати, пов'язані із забрудненням світильників та старінням джерел світла [11]. Це дозволяє забезпечити стабільний рівень освітлення протягом тривалого часу.

Знаючи загальний світловий потік, на наступному етапі розрахунку визначається кількість світильників або ламп, необхідних для освітлення приміщення, шляхом ділення Φ на світловий потік одного джерела світла [12].

Розрахунок показав, що для приміщення площею 20 м² необхідний світловий потік становить 20000 лм. Це значення є основою для подальшого підбору освітлювальних приладів та організації системи освітлення відповідно до нормативних вимог [13].

4.6 Визначення кількості світильників

Після визначення загального світлового потоку виконується розрахунок кількості світильників, необхідних для забезпечення нормативного рівня освітлення в приміщенні.

Кількість ламп визначається за формулою [14]:

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_1}$$

де N – кількість ламп (світильників);

Φ – загальний світловий потік, лм;

Φ_1 – світловий потік однієї лампи, лм.

Вихідні дані: $\Phi = 20000$ лм; $\Phi_1 = 2000$ лм.

Підставляємо значення у формулу:

$$N = 20000 / 2000 = 10.$$

Аналіз результату

Отримане значення є цілим числом, тому додаткове округлення не потрібне. Це означає, що для забезпечення необхідного рівня освітленості достатньо встановити 10 світильників [15].

При практичному проектуванні освітлення важливо забезпечити рівномірне розташування світильників по площі приміщення, що дозволить уникнути утворення затемнених зон або зон з надмірною яскравістю [16].

У результаті розрахунку встановлено, що для даного приміщення необхідно встановити 10 світлодіодних світильників зі світловим потоком 2000 лм кожен, що забезпечить нормативний рівень освітленості відповідно до вимог стандартів [17].

4.7 Перевірка освітленості

Після виконання розрахунку світлового потоку необхідно здійснити перевірку отриманих результатів шляхом визначення фактичної освітленості в приміщенні. Це дозволяє оцінити правильність вибраних параметрів та відповідність системи освітлення нормативним вимогам.

Фактична освітленість визначається за формулою [18]:

$$E = \frac{\Phi \cdot \eta}{S \cdot K}$$

де E – освітленість, лк;

Φ – загальний світловий потік, лм;

η – коефіцієнт використання;

S – площа приміщення, м²;

K – коефіцієнт запасу.

Розрахунок

$$E = (20000 \times 0,6) / (20 \times 1,5) = 400 \text{ лк.}$$

Аналіз результату

Отримане значення освітленості становить 400 лк, що повністю відповідає нормативним вимогам для навчальних і офісних приміщень. Це свідчить про правильність вибору коефіцієнтів та коректність виконаних розрахунків.

Також важливо зазначити, що фактична освітленість знаходиться в середньому діапазоні нормативних значень, що забезпечує:

- комфортне навантаження на зір;
- відсутність перенапруження очей;
- оптимальні умови для тривалої роботи.

Отримане значення освітленості підтверджує ефективність розрахованої системи освітлення та її відповідність діючим стандартам [19].

4.8 Розміщення світильників

Раціональне розміщення світильників є важливим етапом проектування освітлення, оскільки навіть при правильному розрахунку світлового потоку неправильне розташування може призвести до нерівномірного освітлення.

У даному випадку приймається наступна схема:

- світильники розташовуються рівномірно по всій площі приміщення;
- кількість – 10 світильників;
- схема – 2 ряди по 5 світильників;
- висота встановлення – 2,5 м.

Обґрунтування вибору

Таке розміщення забезпечує:

- рівномірний розподіл світлового потоку по всій площі;

- мінімізацію тіней;
- відсутність зон із недостатнім освітленням;
- оптимальний кут падіння світла.

Крім того, при такому розташуванні відстань між світильниками приблизно однакова, що відповідає вимогам до рівномірності освітлення.

Додаткові аспекти

При розміщенні світильників також враховують:

- відстань до стін (зазвичай 0,5–1 м);
- напрямок світлового потоку;
- розташування робочих місць;
- наявність природного освітлення.

Обрана схема розміщення світильників забезпечує ефективне та рівномірне освітлення приміщення [20].

4.9 Вимоги до освітлення

Освітлення повинно відповідати ряду санітарно-гігієнічних та технічних вимог [11].

Основні вимоги:

- рівномірність освітлення – виключення різких перепадів яскравості;
- відсутність мерехтіння – особливо важливо при використанні LED-ламп;
- достатній рівень освітленості;
- правильна передача кольору (індекс $R_a \geq 80$);
- відсутність сліпучого ефекту.

Організація робочого місця

Особливу увагу слід приділяти роботі з комп'ютером:

- монітор розміщується перпендикулярно до світла;
- виключаються відблиски на екрані;

- джерело світла не повинно потрапляти в поле зору.

Значення дотримання вимог

Дотримання цих вимог забезпечує:

- збереження зору;
- підвищення продуктивності;
- зниження втомлюваності.

4.10 Вплив освітлення на безпеку праці

Освітлення є одним із ключових факторів, що впливають на безпеку праці та ефективність діяльності людини.

Якісне освітлення:

- знижує навантаження на зоровий апарат;
- покращує орієнтацію в просторі;
- підвищує точність виконання завдань;
- зменшує ризик травматизму [12].

Негативний вплив недостатнього освітлення

Недостатнє освітлення може призвести до:

- швидкої втоми;
- головного болю;
- зниження уваги;
- збільшення кількості помилок.

Психофізіологічний аспект

Освітлення також впливає на:

- емоційний стан людини;
- працездатність;
- рівень концентрації.

Якісне освітлення є необхідною умовою безпечної та ефективної праці [13].

4.11 Електробезпека

Електробезпека є обов'язковою складовою при експлуатації освітлювальних систем.

Основні вимоги:

- наявність заземлення;
- використання справної ізоляції проводів;
- застосування автоматичних вимикачів;
- захист від короткого замикання.

Додаткові заходи

- регулярний технічний огляд;
- недопущення перевантаження мережі;
- використання сертифікованого обладнання.

Дотримання правил електробезпеки забезпечує захист людей та обладнання [14].

4.12 Пожежна безпека

Освітлювальні системи повинні відповідати вимогам пожежної безпеки.

Основні заходи:

- контроль електричного навантаження;
- використання негорючих матеріалів;
- уникнення перегріву світильників;
- наявність вогнегасників.

Профілактичні заходи

- регулярна перевірка проводки;
- своєчасна заміна пошкоджених елементів;
- дотримання правил експлуатації.

Дотримання пожежної безпеки дозволяє запобігти аварійним ситуаціям та зберегти майно і життя людей [15].

4.13 Висновки

У результаті виконаних розрахунків встановлено:

- освітленість – 400 лк;
- світловий потік – 20000 лм;
- кількість світильників – 10.

Загальна оцінка

Отримані результати свідчать про те, що:

- система освітлення відповідає нормативним вимогам;
- забезпечується комфортне середовище для роботи;
- досягнуто оптимального співвідношення ефективності та економічності.

Практичне значення

- покращує умови праці;
- знижує втому;
- підвищує продуктивність;
- відповідає вимогам безпеки.

Загальний висновок

Запропонована система освітлення є ефективною, безпечною та відповідає вимогам ДБН, що дозволяє рекомендувати її до практичного застосування базується на методі світлового потоку (коефіцієнта використання), який є класичним для розрахунку загального рівномірного освітлення.

Ключові параметри та результати

- Об'єкт: Приміщення 20 м² інженерних робіт (середня точність).
- Норма: Відповідно до ДБН В.2.5-28:2018, прийнято $E = 400$ лк.
- Коефіцієнти: Вибрано коефіцієнт запасу $K = 1,5$ (враховує старіння ламп та забруднення) та коефіцієнт використання $\eta = 0,6$ (світлі стіни/стеля).

- Формула: $\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta}$
- Результат: Необхідний потік 20 000 лм, що забезпечується 10 світильниками по 2 000 лм кожен.

ВИСНОВКИ

У ході виконання дипломної роботи було проведено комплексне дослідження електричного опору провідників, зокрема для випадків складної геометрії та неоднорідного розподілу електричного поля. Робота поєднує теоретичний аналіз, аналітичні методи розрахунку та числове моделювання, що дозволило отримати узагальнені результати як фундаментального, так і прикладного характеру.

У першому розділі узагальнено фізичну природу електричного опору та електропровідності. Встановлено, що опір має мікроскопічне походження і зумовлений процесами розсіювання носіїв заряду на коливаннях кристалічної ґратки, домішках і дефектах. Показано взаємозв'язок між макроскопічними характеристиками (опір, провідність) і мікроскопічними параметрами речовини. Проаналізовано класичну та квантову теорії електропровідності, визначено їх межі застосовності та встановлено, що квантова теорія є необхідною для коректного опису сучасних матеріалів. Також досліджено вплив зовнішніх факторів на опір та обґрунтовано практичні аспекти використання матеріалів із різними значеннями питомого опору.

У методичному розділі розглянуто аналітичні методи визначення електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом. Отримано точні вирази для опору сферичних, циліндричних та інших симетричних систем. Показано обмеженість аналітичних підходів у випадку складних геометрій та неоднорідних полів. Особливу увагу приділено співвідношенню Максвелла, яке дозволяє визначати опір середовищ без чітких меж. Встановлено важливі практичні закономірності, зокрема незалежність опору між віддаленими електродами від відстані між ними у певних умовах, а також різке зростання контактного опору при зменшенні площі контакту.

У дослідницькій частині виконано числове моделювання електричного опору трапецієподібної провідної пластини з використанням методу скінченних елементів. Розв'язано двовимірне рівняння Лапласа з

відповідними граничними умовами та досліджено вплив геометричних параметрів на розподіл потенціалу і струму. Встановлено, що наближення однорідного електричного поля дає занижене значення опору, тобто є нижньою оцінкою. Показано, що реальний опір завжди більший за аналітичний, отриманий у цьому наближенні, що узгоджується з принципом мінімуму електричної потужності. Виявлено, що відхилення між точним і наближеним значенням зростає при збільшенні неоднорідності геометрії провідника.

У розділі з охорони праці виконано розрахунок штучного освітлення робочого приміщення. Визначено необхідний світловий потік, кількість та схему розміщення світильників. Підтверджено відповідність отриманих параметрів нормативним вимогам. Показано, що забезпечення раціонального освітлення, а також дотримання вимог електро- та пожежної безпеки є важливими чинниками створення безпечних і комфортних умов праці.

У результаті виконаної роботи підтверджено, що електричний опір провідників складної форми суттєво залежить від геометрії, граничних умов та характеру розподілу електричного поля. Продемонстровано ефективність поєднання аналітичних і числових методів для дослідження таких систем. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні електронних пристроїв, сенсорних систем та елементів електричних кіл із неоднорідною структурою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Halliday D. Fundamentals of Physics. – 9th ed. / Halliday D., Resnick R. and Walker J. – Wiley, 2011. – 928 p.
2. Zangwill A. Modern Electrodynamics. – 5th ed. / 2. Zangwill A. – Cambridge University Press, 2017. – 789 p.
3. Jackson, J. D. Classical Electrodynamics. – 9th ed. / Halliday D., Resnick R. and Walker J. – Wiley, 1975. – 811 p.
4. Maxwell J.C. *Treatise on Electricity and Magnetism*. – Vol. 1. / Maxwell J.C.– Oxford: Clarendon Press, 1873. – 508 p.
5. France R. The transient effect in capacitor leakage resistance measurements / R. France // IRE Transactions on Component Parts. – 1960. – Vol. 7(3). – P. 106-112.
6. Romano J. D. The conical resistor conundrum: a potential solution/ J. D. Romano D. and R. H. Price // Am. J. Phys. – 1996. – Vol. 64(9). – P. 1150-1153.
7. E-Jie Tan. New approach to two-dimensional boundary value problems in magnetostatics and current distributions./ E-Jie Tan and Bernard Ricardo // The Physics Educator. – 2025. – Vol. 7. – 2550010.
8. V. Ivchenko. Electrical properties of an L-shaped conducting plate /V. Ivchenko // Revista Brasileira de Ensino de Física. – 2026. – Vol. 48. – e20250510.
9. Solar Power World – Technical Articles [Electronic resource]. – Access mode: <https://www.solarpowerworldonline.com/> (last access: 28.05.25). – Title from the screen.
10. Sree Harsha N. R. A review on the variational methods in solving DC circuits / 10.Sree Harsha N. R. // Eur. J. Phys.– 2019. – Vol. 40(3). – 033001.
11. MATLAB Simulink Documentation [Electronic resource]. URL: <https://www.mathworks.com/help/simulink/>
12. PV Education [Electronic resource]. URL: <https://www.pveducation.org/>

13. EnergySage [Electronic resource]. URL: <https://www.energysage.com/solar/>
14. Greenmatch [Electronic resource]. URL: <https://www.greenmatch.co.uk/solar-energy/>
15. National Renewable Energy Laboratory (NREL) [Electronic resource]. URL: <https://www.nrel.gov/>
16. Simscape Electrical Toolbox Documentation [Electronic resource]. URL: <https://www.mathworks.com>
17. Охорона праці та безпека в лабораторіях: нормативи МОН (ред. 2024–2025) [Електронний ресурс] / Міністерство освіти і науки. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua>
18. Державні санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень ДСН 3.3.6.042-99 (чинні 2025) [Електронний ресурс] / МОЗ України. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0216-99#Text>
19. ДБН В.2.5-28:2018 «Природне і штучне освітлення» [Електронний ресурс] / Мінрегіон. – Режим доступу: <https://online.budstandart.com>
20. Світлотехнічні норми освітлення робочих місць (коментарі та приклади 2024–2025) [Електронний ресурс] / Електротема. – Режим доступу: <https://elektrotema.ua/news/osvitlennya-normy>