

ХЕРСОНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

(повне найменування вищого навчального закладу)

ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА ТРАНСПОРТУ

(назва факультету)

КАФЕДРА ЕНЕРГЕТИКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ І ФІЗИКИ

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної роботи
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
(рівень вищої освіти)

на тему Вивчення затухання струму в колах першого порядку зі скінченними
значеннями сталої часу

Виконав: студент 4 курсу групи 4ЕЛ
спеціальності 141. Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка
(код і назва спеціальності)

освітньо-
професійної Електротехніка та електротехнології
програми (назва ОПП)

Санін В. В.

(прізвище та ініціали)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Івченко В.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент к.т.н., доц. Мешков Ю.Є.

(прізвище та ініціали)

Хмельницький – 2026 р.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота на тему «Вивчення затухання струму в колах першого порядку зі скінченними значеннями сталої часу» включає в себе пояснювальну записку та графічну частину.

Пояснювальна записка містить 59 сторінок формату А4, 4 рисунки, 3 таблиці, 23 джерела.

Ключові слова: електричний струм, гарний провідник, RC-коло, RL-коло, магнітна дифузія, стала часу.

Дипломна робота присвячена розрахунку та дослідженню електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом із використанням сучасних теоретичних і чисельних методів.

Проведено аналіз основних положень теорії електропровідності та електродинаміки. Розглянуто вплив геометричних параметрів провідника на розподіл електричного поля та густини струму. Проаналізовано існуючі аналітичні та чисельні методи визначення електричного опору, зокрема інтегральні підходи, методи розв'язання рівняння Лапласа та метод еквівалентних схем.

Побудовано математичні моделі провідників зі змінним поперечним перерізом та виконано розрахунки для різних геометричних конфігурацій. Для дослідження складних систем використано чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів, що дозволяє враховувати неоднорідність електричного поля та складну геометрію об'єктів.

За допомогою сучасних програмних засобів моделювання реалізовано чисельні експерименти для аналізу розподілу потенціалу, густини струму та визначення ефективного електричного опору провідників. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів на величину опору та встановлено закономірності його зміни.

У розділі «Охорона праці» розглянуто комплекс заходів щодо забезпечення безпечних умов праці при роботі з комп'ютерною технікою.

Наведено характеристику робочого місця, проаналізовано шкідливі та небезпечні фактори (електромагнітне випромінювання, напруження зору, шум, статична електрика), а також оцінено параметри мікроклімату та забезпечення електробезпеки.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА.....	8
1.1 Електричний струм та його характеристики. Глосарій термінів	8
1.2 Перехідні процеси в колах першого порядку	9
1.3 Наближення гарного провідника	11
1.4 Висновки.....	15
2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА.....	17
2.1 Вступні зауваження.....	17
2.2 Загальна теорія.....	18
2.3 Випадок резисторно-конденсаторного кола	21
2.4 Випадок резисторно-індуктивного кола	23
2.5 Висновки.....	24
3 ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА.....	25
3.1 Комп'ютерна програма для проведення числових розрахунків.....	27
3.2 Результати числових розрахунків.....	33
3.3 Висновки.....	34
4 ОХОРОНА ПРАЦІ.....	39
4.1 Загальні положення.....	39
4.2 Вплив безпечних умов праці на якість продукції (інженерних розрахунків)	40
4.3 Характеристика приміщення.....	42

4.4 Аналіз небезпечних та шкідливих виробничих факторів	43
4.5 Оптимальні параметри мікроклімату.....	44
4.6 Визначення коефіцієнтів.....	47
4.7 Розрахунок світлового потоку.....	49
4.8 Висновки.....	50
ВИСНОВКИ.....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	54

ВСТУП

У сучасних умовах розвитку електротехніки, електроніки та мікроелектроніки особливого значення набуває дослідження швидкоплинних електромагнітних процесів у провідниках та електричних колах. Постійне зростання швидкодії електронних пристроїв, зменшення характерних розмірів елементів та збільшення робочих частот призводять до ситуацій, коли класичні моделі електричних кіл із зосередженими параметрами вже не забезпечують достатньої точності опису реальних фізичних процесів. У таких умовах необхідним стає врахування просторового розподілу електромагнітного поля всередині провідників та пов'язаних із ним дифузійних явищ.

Особливий інтерес становлять перехідні процеси в колах першого порядку, які містять резистивні, ємнісні або індуктивні елементи. Згідно з класичною теорією електричних кіл, затухання струму в RC- та RL-ланцюгах відбувається за експоненціальним законом, який визначається сталою часу кола. Проте результати експериментальних досліджень свідчать про можливість виникнення відхилень від експоненціальної поведінки, особливо в системах із малими характерними часовими масштабами. Однією з причин таких відхилень є скінченний час встановлення магнітного поля всередині провідника, що зумовлює просторову неоднорідність густини струму та появу ефектів пам'яті.

Для опису подібних процесів недостатньо використання традиційних рівнянь теорії електричних кіл. Більш повний аналіз потребує застосування рівнянь Максвелла, які дозволяють врахувати часову та просторову еволюцію електромагнітного поля. У межах наближення гарного провідника рівняння електродинаміки приводять до дифузійного рівняння для густини струму, розв'язок якого дає можливість досліджувати вплив магнітної дифузії на динаміку перехідних процесів.

Актуальність теми полягає у необхідності підвищення точності

математичних моделей електричних кіл при дослідженні швидкоплинних процесів, характерних для сучасних електронних систем, мікроелектроніки, імпульсної техніки та високошвидкісних пристроїв. Урахування магнітної дифузії дозволяє пояснити виникнення неекспоненціального затухання струму та оцінити вплив внутрішньої структури електромагнітного поля на роботу електротехнічних систем.

Метою даної дипломної роботи є дослідження впливу магнітної дифузії на перехідні процеси в RC- та RL-ланцюгах першого порядку шляхом побудови математичної моделі просторово-часового розподілу густини струму в провіднику та проведення числового моделювання.

Об'єктом дослідження є перехідні електромагнітні процеси в електричних колах першого порядку.

Предмет дослідження – закономірності розподілу густини струму та особливості затухання струму в RC- та RL-ланцюгах з урахуванням магнітної дифузії в провіднику.

Задачі дослідження:

- проаналізувати теоретичні основи електричного струму, перехідних процесів та електромагнітного поля;
- дослідити рівняння Максвелла та особливості їх застосування до провідних середовищ;
- отримати математичну модель розподілу густини струму в циліндричному провіднику в наближенні гарного провідника;
- дослідити вплив часу магнітної дифузії на характер перехідних процесів;
- побудувати математичні моделі RC- та RL-ланцюгів з урахуванням просторової неоднорідності струму;
- розробити алгоритми числового розв'язання отриманих інтегральних рівнянь;
- реалізувати програмні засоби для проведення числових розрахунків у середовищі Python;

- дослідити вплив параметра $\beta = \tau/\tau_D$ на характер затухання струму;
- виконати порівняння отриманих результатів із класичною експоненціальною моделлю перехідних процесів;
- проаналізувати можливість виникнення неекспоненціальних та коливальних режимів у колах першого порядку.

Методи дослідження: методи математичної фізики, теорія електромагнітного поля, рівняння Максвелла, метод розкладу за функціями Бесселя, числові методи розв'язування інтегральних рівнянь, комп'ютерне моделювання та аналіз результатів числових експериментів.

Практичне значення роботи полягає у можливості використання отриманих результатів для більш точного аналізу швидкоплинних електромагнітних процесів у високошвидкісних електронних пристроях, імпульсних системах, мікроелектроніці, системах автоматизації та інших технічних об'єктах, де характерні часові масштаби є порівняними з часом магнітної дифузії провідника. Запропонована модель може бути використана для вдосконалення методів проектування та математичного моделювання електротехнічних систем.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел.

1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА

1.1 Електричний струм та його характеристики. Глосарій термінів.

Електричний струм - це напрямлений рух заряджених частинок. Для виникнення й існування електричного струму необхідна наявність вільних заряджених частинок та електричного поля, дія якого створює й підтримує їхній напрямлений рух.

Основними умовами існування електричного струму є: наявність вільних заряджених частинок; наявність джерела струму, що створює електричне поле, дія якого зумовлює впорядкований рух вільних заряджених частинок; замкненість електричного кола, що забезпечує циркуляцію вільних заряджених частинок.

Сила струму - це фізична величина, що характеризує електричний струм і чисельно дорівнює заряду, який проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу. Силу струму позначають символом I та визначають за формулою:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (1.1)$$

де q - заряд, який проходить через поперечний переріз провідника за час t .
Одиниця сили струму в СІ - ампер: $I = 1 \text{ А}$.

Густина струму - це фізична величина, що характеризує розподіл струму по поперечному перерізу провідника і чисельно дорівнює силі струму, яка проходить через одиничний поперечний переріз провідника. Густина струму позначають символом $\vec{j}$ (векторна величина) та визначають за формулою:

$$j = \frac{I}{S}, \quad (1.2)$$

де S - площа поперечного перерізу провідника.

Електрична напруга на ділянці кола - це фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі електричного поля з переміщення одиничного позитивного заряду по цій ділянці. Напругу позначають символом U і в загальному випадку визначають за формулою:

$$U = \frac{A}{q}, \quad (1.3)$$

де A - робота, яку виконує (або може виконати) електричне поле з переміщення заряду q по даній ділянці кола.

Електричний опір – це фізична величина, яка характеризує властивість провідника протидіяти проходженню електричного струму. Одиниця електричного опору в СІ – Ом. Опір провідника, який має незмінний поперечний переріз, дорівнює:

$$R = \rho \cdot \left(\frac{l}{S}\right), \quad (1.4)$$

де ρ - питомий опір речовини, з якої виготовлений провідник; l - довжина провідника; S - площа поперечного перерізу провідника. Питомий опір провідника є величиною оберненою до питомої електропровідності провідника σ : $\rho = \frac{1}{\sigma}$. За законом Ома: $U = IR$.

Електроємність конденсатора - це фізична величина, яка показує, який електричний заряд може накопичити конденсатор при певній напрузі. Одиниця електричного опору в СІ – Ф (фарад). Електроємність позначають символом C і в загальному випадку визначають за формулою:

$$C = \frac{q}{U}, \quad (1.5)$$

де q – заряд однієї з обкладинок конденсатора; U – напруга між обкладинками.

Індуктивність котушки – це фізична величина, яка показує, наскільки котушка здатна створювати магнітне поле та протидіяти зміні струму. Одиниця індуктивності в СІ – Гн (генрі). Електроємність позначають символом C і в загальному випадку визначають за формулою:

$$L = \frac{\Phi}{I}, \quad (1.6)$$

де Φ – загальний магнітний потік.

Здатність речовини проводити струм пов'язана з двома обставинами. По-перше, вона залежить від того, скільки в 1 см³ речовини міститься частинок, що переносять заряди, – електронів чи іонів. Ця величина називається концентрацією носіїв заряду. По-друге, вона залежить від рухливості носіїв заряду, тобто від того, з якою швидкістю переміщуються носії при напруженості поля, що складає .

Чим більше концентрація носіїв і чим вони рухливіші, тим менше опір речовини. В металах концентрація носіїв (вільних електронів) дуже велика: приблизно на 1 атом метала приходить 1 вільний електрон. В електролітах концентрація носіїв – додатних і від'ємних іонів – набагато менша, ніж концентрація вільних електронів в металах. Крім того, рухливість електронів в металах (особливо, в чистих металах, кристалічна ґратка яких не спотворена атомами домішок), набагато більша рухливості іонів в електролітах. Тому питомий опір металів значно менше, ніж електролітів. В ізоляторах носії зарядів або відсутні (немає ні вільних електронів, ні іонів) або рухливість носіїв (іонів) близька до нуля.

Якщо наявність струму в речовині не впливає ні на концентрацію носіїв, ні на їх рухливість, то питомий опір речовини, а отже, і опір провідника не залежить від струму. В цьому випадку закон Ома добре справджується. Прикладами таких речовин є метали та електроліти [25].

1.2 Перехідні процеси в колах першого порядку.

У електричних колах під час зміни режиму роботи виникають перехідні процеси, які характеризуються зміною струмів та напруг у часі. Такі процеси виникають при комутації кіл, зміні параметрів джерел живлення або підключенні нових елементів до електричної схеми. Перехідний процес - це процес переходу електричного кола від одного усталеного режиму до іншого. Його тривалість визначається параметрами кола та характером джерел енергії.

До кіл першого порядку належать електричні кола, які містять лише один накопичувач енергії: індуктивність (L); або ємність (C). Такі кола описуються диференціальним рівнянням першого порядку. Найбільш поширеними колами першого порядку є: RL -коло; RC -коло.

Розглянемо послідовне коло, що складається з: джерела сталої напруги (U); резистора (R); котушки індуктивності (L). Після замикання ключа струм у колі не може миттєво досягти усталеного значення через явище електромагнітної самоіндукції.

Відповідно до другого закону Кірхгофа:

$$U = U_R + U_L, \quad (1.7)$$

де $U_R = IR$, $U_L = L di/dt$. Тоді

$$U = IR + L \frac{di}{dt}. \quad (1.8)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.8) із початковою умовою $I(0) = 0$ має наступний вигляд:

$$I(t) = \frac{U}{R} [1 - e^{-Rt/L}]. \quad (1.9)$$

Після відключення джерела живлення енергія, накопичена в магнітному полі котушки, підтримує струм у колі. Для цього випадку слід покласти у рівнянні (1.8) $U = 0$ та прийняти що $I(0) = U/R$. Тоді

$$I(t) = \frac{U}{R} e^{-Rt/L}. \quad (1.10)$$

При замиканні кола (зарядці конденсатора), що складається з джерела сталої напруги (U); резистора (R) та конденсатора (C), загальна напруга розподіляється між опором та ємністю:

$$U = U_R + U_C = IR + \frac{q}{C}. \quad (1.11)$$

Продиференціюємо рівняння (1.11) по часу:

$$\frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1.12)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.12) із початковою умовою $I(0) = U/R$ має наступний вигляд:

$$I(t) = \frac{U}{R} e^{-t/RC}. \quad (1.13)$$

Легко пересвідчитися і в тому, що при розмиканні кола (розрядці конденсатора) струм у колі змінюється з часом згідно рівняння (1.13). Таким чином, при всіх можливих перехідних процесах, струм у колі змінюється за експоненціальним законом.

1.3 Наближення гарного провідника

Рівняння Максвелла (ми обираємо одиниці СІ) для ізотропних середовищ з відносною електричною проникністю ε та відносною магнітною проникністю μ мають наступний вигляд:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.16)$$

де $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ – напруженість електричного поля та індукція магнітного поля; μ_0 та ε_0 – вакуумна магнітна та електрична ості; $\mathbf{j}$ – густина електричного струму.

Згідно з континуальною (диференціальною) формою закону Ома, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, де σ – питома електропровідність середовища. Отже, у випадку ізотропних провідників вектори $\mathbf{j}$ та $\mathbf{E}$ мають однаковий напрямок.

Систему рівнянь (1.14)-(1.16) записано у диференціальній формі, використовуючи оператор набла ∇ . Перше з рівнянь (1.14) показує, що при проходженні електричного струму по провіднику об'ємні заряди всередині нього не виникають. Друге рівняння (1.14) свідчить про те що в Природі не існує магнітних зарядів (магнітне поле є завжди вихровим). Рівняння (1.15)

демонструє, що джерелом вихрового електричного поля є змінне у часі магнітне поле. Нарешті, рівняння (1.16) показує, що джерелами магнітного поля є електричний струм та змінне у часі електричне поле.

З рівнянь (1.15) та (1.16) дістанемо:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.17)$$

Використовуючи рівняння (1.17) та (1.14), отримуємо рівняння телеграфного типу відносно вектору $\mathbf{E}$, яке справедливе для випадку довільної провідності σ :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.18)$$

Розглянемо нескінченно довгий, прямий, циліндричний дріт. Оберемо циліндричну систему координат так, щоб вісь z збігалася з віссю симетрії дроту. Існує лише одна ненульова компонента $\mathbf{j}$ (а саме, j_z). Через осьову симетрію задачі ця компонента може залежати лише від радіальної відстані ρ . У цьому випадку $E_z = j/\sigma$, $E_\rho = E_\phi = 0$. Застосувавши наближенні гарного провідника (електрична провідність $\sigma \rightarrow \infty$) та вираз для оператора Лапласа в циліндричних координатах, можна звести рівняння (1.18) до вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial j(r, t)}{\partial r} \right) - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial j(r, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.19)$$

1.4 Висновки

У оглядовій частині дипломної роботи було розглянуто теоретичні основи електротехніки та електродинаміки, необхідні для подальшого

дослідження процесів у провідниках і електричних колах. Проведено аналіз основних понять, що характеризують електричний струм, зокрема сили струму, густини струму, напруги, опору, електроємності та індуктивності. Встановлено взаємозв'язок між цими величинами та наведено основні співвідношення, які використовуються для опису електричних процесів у колах постійного та змінного струму.

Розглянуто фізичну природу електропровідності різних середовищ та показано вплив концентрації й рухливості носіїв заряду на електричний опір речовин. Проаналізовано умови застосування закону Ома та особливості провідності металів, електролітів і діелектриків.

Окрему увагу приділено перехідним процесам у колах першого порядку. На прикладі RL- та RC-кіл отримано диференціальні рівняння, що описують зміну струму в часі, та наведено їх розв'язки. Показано, що характерною особливістю перехідних процесів у таких колах є експоненціальний закон зміни струму та напруги, який визначається параметрами кола.

Також розглянуто основні рівняння електромагнітного поля — рівняння Максвелла, на основі яких отримано рівняння телеграфного типу для провідного середовища. У межах наближення гарного провідника виконано спрощення математичної моделі та отримано рівняння, що описує розподіл густини струму в циліндричному провіднику.

Таким чином, проведений огляд дозволив сформулювати необхідну теоретичну базу для подальшого дослідження електромагнітних процесів у провідниках та аналізу розподілу струму в умовах змінних електромагнітних полів.

2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Вступні зауваження

Конденсатори та котушки індуктивності є незамінними компонентами майже всіх електронних систем. Вони використовуються для накопичення енергії, фільтрації, зв'язку сигналів, придушення шумів, вимірювання та як коливальні елементи в пристроях, що досліджують речовину на мікроскопічних масштабах [1], [2]. Найпростіша ідеалізована теорія, заснована на використанні законів Кірхгофа, передбачає суто експоненціальне спадання струму під час перехідних процесів у колах першого порядку.

Проте, реальні схеми часто демонструють неекспоненціальну динаміку перехідних процесів. Наприклад, ідеальні схеми, що містять мемристор, зазнають неекспоненціального спаду заряду (струму) [3]. Струм через неомічну вольфрамову лампу, послідовно з'єднану із зарядним суперконденсатором, зменшується з часом відповідно до степеневого закону, на відміну від експоненціальної залежності від часу, що спостерігається в RC-ланцюгах з омичними резисторами [4]. Неоднорідний міжвитковий контактний опір спричиняє неекспоненціальні характеристики спаду високотемпературних надпровідних котушок без ізоляції [5].

Відхилення від експоненціального спаду струму в RC-ланцюгах спостерігалися ще в середині 19 століття в експериментах з Лейденськими банками та моделювалися за допомогою розтягнутих експоненціальних функцій [6]. Такий неідеальний спад пов'язують з діелектриком, який використовується для збільшення ємності [7], [8], нерівними струмами, що входять та виходять з конденсатора [9], та поверхневими зарядами [10], [11]. Було показано, що спад електричної енергії в колі резистор-вакуумний конденсатор включає кілька процесів релаксації з різко різними постійними часу [12].

Не ставлячи під сумнів обґрунтованість вищезазначених факторів, нижче ми детально розглянемо механізм, пов'язаний з тим, що електромагнітне поле всередині дроту під час швидкого перехідного процесу є не тільки нестационарним, але й неоднорідним по всьому поперечному перерізу провідника. Це можна зрозуміти за аналогією зі швидким перехідним процесом в електричному колі та випадком протікання змінного струму високої частоти, для якого має місце скін-ефект [7].

Ступінь неоднорідності поля безпосередньо залежить від малості сталої часу кола τ . Ця величина змінюється в широкому діапазоні значень: від наносекунд у високошвидкісних цифрових схемах до мілісекунд у схемах RC-таймерів або навіть секунд у біологічних мембранах [4] та окремих нейронах [9], залежно від значень питомого опору, ємності або індуктивності кола.

У цій роботі ми побудуємо модель, що описує часовий та просторовий розподіл густини струму в круглому провіднику для випадку скінченних значень постійної часу та застосуємо її до аналізу перехідних процесів у RC- та RL-ланцюгах. Ми покажемо, що скінченний час магнітної дифузії всередині провідника створює ефекти пам'яті, які загалом призводять до неекспоненціального спаду в ланцюгах першого порядку.

2.2 Загальна теорія

У наближенні гарного провідника (електрична провідність $\sigma \rightarrow \infty$), рівняння для радіальної та часової залежностей густини електричного струму в нескінченно довгому прямому циліндричному дроті радіуса r_0 має вигляд (1.19):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial j(r, t)}{\partial r} \right) - \frac{\tau_D}{r_0^2} \frac{\partial j(r, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

де $\tau_D = \mu\mu_0\sigma r_0^2$ - експоненціальний час релаксації заряду (дифузії) [11]; μ - відносна магнітна проникність; μ_0 - вакуумна проникність (тут і надалі обрано одиниці вимірювання СІ).

Це рівняння можна вивести з системи рівнянь Максвелла для ізотропного однорідного середовища, враховуючи, що густина вільних зарядів дорівнює нулю, а струм зміщення є незначним порівняно зі струмом провідності в наближенні гарного провідника, а також враховуючи осьову симетрію задачі [10].

Час дифузії τ_D являє собою:

- час, необхідний для встановлення магнітного поля по всьому поперечному перерізу провідника після його зміни на межі;
- еквівалентно, час, протягом якого профіль густини струму релаксує до рівномірного;
- характерний час, пов'язаний із внутрішнім накопиченням магнітної енергії в провіднику.

Якщо розглянути як приклад мідний дріт ($\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$) радіуса $r_0 = 1 \text{ мм}$, то $\tau_D \approx 74 \text{ мкс}$. Для ідентичного сталевого дроту ($\mu = 200$) цей час є на два порядки довшим.

Для перехідного процесу спаду струму розв'язок рівняння (2.1) повинен задовольняти двом умовам:

$$j(r, 0) = j_0, \quad (2.2)$$

$$j(r_0, t) = j_0 f(t), \quad (2.3)$$

де $j_0 = I_0/(\pi r_0^2)$ (I_0 – значення струму в початковий момент часу $t = 0$), $f(t)$, – деяка функція, така що $f(0) = 1$.

Рівняння (2.1) – це параболічне (дифузійного типу) рівняння в радіально симетричній двовимірній постановці. Його розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$j(r, t) = j_0 \left[f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_0} \right) \right], \quad (2.4)$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя нульового порядку першого роду; λ_n – n -й додатний корінь рівняння $J_0(x) = 0$ (тут n – натуральне число, яке нумерує ці додатні корені у порядку зростання їхніх значень).

Отже, розв'язок (2.4) відповідає умові (2.3). Щоб виконати умову (2.2), слід покласти всі $c_n(0) = 0$.

Підставляючи праву частину рівняння (2.4) у початкове рівняння (2.1), отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^2 c_n(t) + \tau_D \frac{dc_n(t)}{dt} \right) J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_0} \right) = -\tau_D \frac{df(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Тепер помножимо обидві частини рівняння (2.5) на $r J_0(\lambda_m r/r_0)$ та проінтегруємо отриману рівність по $r \in [0, r_0]$. Використовуючи співвідношення

$$\int_0^{r_0} r J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{r_0} \right) J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{r_0} \right) dr = \delta_{mn} \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\lambda_m) \quad (2.6)$$

де δ_{mn} – дельта Кронекера символ; $J_1(x)$ – функція Бесселя першого роду порядку 1,

$$\int_0^{r_0} r J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{r_0} \right) dr = \frac{r_0^2}{\lambda_m} J_1(\lambda_m), \quad (2.7)$$

дістанемо:

$$\frac{dc_m(t)}{dt} + \frac{\lambda_m^2}{\tau_D} c_m(t) = -\frac{2}{\lambda_m J_1(\lambda_m)} \frac{df(t)}{dt}. \quad (2.8)$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно коефіцієнта $c_m(t)$. Його розв'язок, що задовольняє вищезазначену початкову умову, має вигляд:

$$c_m(t) = -\frac{2g_m(t)}{\lambda_m J_1(\lambda_m)}, \quad (2.9)$$

де

$$g_m(t) = \int_0^t e^{-\lambda_m^2(t-s)/\tau_D} \frac{df(s)}{ds} ds, \quad (2.10)$$

s - фіктивна змінна інтегрування за часом. Тоді

$$j(r, t) = j_0 \left[f(t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{r_0}\right) g_n(t)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \right]. \quad (2.11)$$

Функція $g_n(t)$, визначена в рівнянні (2.10), являє собою згортку df/ds з експоненціальним ядром дифузії $e^{-\lambda_m^2(t-s)/\tau_D}$.

Загальний струм можна знайти як

$$I(t) = 2\pi \int_0^{r_0} r j(r, t) dr. \quad (2.12)$$

Використовуючи рівняння (2.12), (2.11) та (2.7), отримуємо:

$$I(t) = I_0 \left[f(t) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(t)}{\lambda_n^2} \right]. \quad (2.13)$$

2.3 Випадок резисторно-конденсаторного кола

Найпростіша резисторно-конденсаторна схема (RC-ланцюг) складається з резистора зі статичним опором R та зарядженого конденсатора з ємністю C , з'єднаних послідовно в один контур без зовнішнього джерела напруги. RC-ланцюги можна використовувати для фільтрації сигналу шляхом блокування певних частот та пропускання інших.

Під час розряду конденсатор вивільняє накопичену енергію через резистор. Застосування закону Ома для цього випадку дає:

$$\frac{j(r_0, t) l}{\sigma} = I_0 R - \frac{\int_0^t I(s) ds}{C}, \quad (2.14)$$

де l – довжина резистора; $R = l(\pi\sigma r_0^2)$.

Член у лівій частині рівняння (2.14) представляє миттєве значення падіння напруги. Перший член у правій частині рівняння (2.14) – це початкове падіння напруги. Другий член у правій частині рівняння (2.14) – це зміна напруги в момент часу t , що виникає внаслідок розряду конденсатора.

Об'єднуючи рівняння (2.3) та (2.14), отримуємо:

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{I(t)}{I_0 \tau}, \quad (2.15)$$

де $\tau = RC$ - стала часу для RC-ланцюга.

Перейдемо до безрозмірних змінних $\tilde{I} = I/I_0$, $\tilde{t} = t/\tau$ та розв'яжемо рівняння (2.15) відносно невідомої функції $f(t)$:

$$f(\tilde{t}) = 1 - \int_0^{\tilde{t}} \tilde{I}(\tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (2.16)$$

Використовуючи рівняння (2.10), (2.13), (2.15), (2.16), дістанемо:

$$\tilde{I}(\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}} K(\tilde{t} - \tilde{s}) \tilde{I}(\tilde{s}) d\tilde{s} = 1. \quad (2.17)$$

Це лінійне рівняння Вольтера другого роду для невідомої функції $\tilde{I}(\tilde{t})$ з ядром

$$K(\tilde{t} - \tilde{s}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta \lambda_n^2 (\tilde{t} - \tilde{s})}}{\lambda_n^2}, \quad (2.18)$$

де $\beta = \tau/\tau_D$.

Таким чином, динаміка затухання струму повністю контролюється співвідношенням між характерними часами τ та τ_D . Наприклад, поклавши $\tau_D = 100$ мкс, $R = 10$ Ом, $C = 1$ мкФ, матимемо: $\beta = 0,1$.

2.4 Випадок резисторно-індуктивного кола

Електричне коло першого порядку резистор-індуктор (RL-ланцюг) складається з одного резистора з опором R та однієї котушки індуктивності L , з'єднаних послідовно. Це один з найпростіших аналогових електронних фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою.

Нульова вхідна характеристика (ZIR), яку також називають природною характеристикою RL-кола, описує поведінку кола після досягнення ним постійних значень напруги та струму та відключення від будь-якого джерела

живлення. Застосовуючи закон електромагнітної індукції Фарадея, для цього випадку матимемо:

$$\frac{j(r_0, t) l}{\sigma} = -L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Рівняння (2.18) показує, що миттєве значення падіння напруги повністю визначається ЕРС самоіндукції. Використовуючи рівняння (2.3) та (2.19), дістанемо:

$$f(t) = -\frac{\tau}{I_0} \frac{dI(t)}{dt}, \quad (2.20)$$

де $\tau = L/R$ - стала часу для RL-контур. Припускаючи, що $\tau_D = 100$ мкс, $R = 10$ Ом, $L = 1$ мкГн, дістанемо: $\beta = 10^{-3}$.

Знову переходячи до безрозмірних змінних $\tilde{I} = I/I_0$, $\tilde{t} = t/\tau$, отримуємо:

$$f(\tilde{t}) = -\frac{d\tilde{I}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}. \quad (2.21)$$

Система рівнянь (2.13) та (2.21) дозволяє чисельно знайти результуючу залежність $\tilde{I}(\tilde{t})$ для випадку RL-контур.

2.5 Висновки

У методичній частині дипломної роботи було розглянуто фізичні передумови виникнення неекспоненціальних перехідних процесів у електричних колах першого порядку та побудовано математичну модель, що враховує просторову неоднорідність густини струму в провіднику. Показано,

що класична теорія RC- та RL-ланцюгів, заснована на припущенні рівномірного розподілу струму по перерізу провідника, не завжди здатна адекватно описати реальні швидкоплинні процеси.

На основі рівнянь Максвелла отримано дифузійне рівняння для густини струму в циліндричному провіднику, яке враховує скінченний час магнітної дифузії. Встановлено, що характер розподілу струму визначається не лише параметрами кола, а й електрофізичними властивостями матеріалу провідника та його геометричними розмірами. Особливу роль при цьому відіграє час дифузії $\beta = \tau/\tau_D$, який характеризує процес встановлення магнітного поля всередині провідника.

У ході розв'язання задачі було застосовано метод розкладу за функціями Бесселя, що дозволило отримати аналітичний вираз для просторово-часового розподілу густини струму. Отримані результати показали, що перехідні процеси мають виражений ефект пам'яті, оскільки поточний стан системи залежить від попередньої еволюції струму через згорткове інтегральне ядро.

Для RC- та RL-ланцюгів були виведені інтегральні рівняння, які описують динаміку струму з урахуванням внутрішньої магнітної дифузії. Встановлено, що ключовим параметром, який визначає характер затухання струму, є відношення $\beta = \tau/\tau_D$. При малих значеннях цього параметра спостерігаються суттєві відхилення від класичного експоненціального закону, що свідчить про важливість урахування неоднорідного розподілу струму в швидкодіючих електронних системах.

Таким чином, запропонована методика дозволяє більш точно описувати перехідні процеси в електричних колах та може бути використана для аналізу високошвидкісних електронних схем, імпульсних систем, мікроелектроніки й інших пристроїв, у яких вплив магнітної дифузії стає суттєвим.

3. ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА

3.1 Комп'ютерна програма для проведення числових розрахунків

Отримані у попередньому розділі рівняння не мають точного розв'язку у замкненій формі. Отже, ми вирішували їх числовим методом, використовуючи трапецієподібну квадратурну схему. Метод реалізується шляхом дискретизації часового інтервалу в рівномірну сітку та ітеративного обчислення розв'язку на кожному кроці. У кожному часовому вузлі інтегральний член апроксимується трапецієподібним правилом, яке вимагає попередньо обчислених значень розв'язку та функції ядра. Саме ядро виражається через усічений ряд, що включає власні значення, отримані як перші нулі функції Бесселя $J_0(x)$, що забезпечує збіжність апроксимації.

Для репрезентативних розрахунків ми використовували крок часової сітки, що дорівнює 10^{-4} . Для помірних та великих значень β було достатньо зберегти перші 30–50 нулів λ_n функції $J_0(x)$. Для малих β було включено до 150–200 мод, щоб забезпечити стабільність та збіжність розв'язку. Збіжність перевірялася шляхом одночасного збільшення (i) кількості збережених мод Бесселя та (ii) роздільної здатності часової сітки, доки відносна зміна обчисленого струму не залишалася нижче 10^{-3} протягом усього розглянутого інтервалу часу. Нижче наведено програмні коди, згенеровані для кожного з двох розглянутих випадків у середовищі Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import jn_zeros

# =====
# ПАРАМЕТРИ
# =====
```

```

betas = [1e-3, 1e-1, 1]

Tmax = 5.0
Nt = 1000

N_terms = 20

# =====
# CITKA
# =====

t = np.linspace(0, Tmax, Nt)
dt = t[1] - t[0]

# Корені Бесселя J0
lambdas = jn_zeros(0, N_terms)

# =====
# ЯДРО
# =====

def kernel(tau, beta):

    s = np.zeros_like(tau)

    for lam in lambdas:
        s += np.exp(-lam**2 * beta * tau) / lam**2

    return 1 - 4*s

```

```

# =====
# РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА
# МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ
# =====

def solve_rc(beta):

    I = np.zeros(Nt)

    I[0] = 1.0

    for i in range(1, Nt):

        integ = 0.0

        for j in range(i):

            tau1 = t[i] - t[j]
            tau2 = t[i] - t[j+1]

            K1 = kernel(tau1, beta)
            K2 = kernel(tau2, beta)

            integ += 0.5 * dt * (
                K1 * I[j] +
                K2 * I[j+1]
            )

    I[i] = 1 - integ

```

```

    return I

# =====
# ΓΡΑΦΙΚ
# =====

plt.figure(figsize=(9,6))

for beta in betas:

    I = solve_rc(beta)

    plt.plot(t, I, label=f" $\beta = \{beta\}$ ")

plt.xlabel(r'$\tilde{t}$')
plt.ylabel(r'$\tilde{I}(\tilde{t})$')
plt.title('RC-цепь')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import jn_zeros

# =====
# ΠΑΡΑΜΕΤΡΙ
# =====

```

```
betas = [1e-3, 1e-1, 1]
```

```
Tmax = 5.0
```

```
Nt = 1000
```

```
N_terms = 20
```

```
# =====
```

```
# CITKA
```

```
# =====
```

```
t = np.linspace(0, Tmax, Nt)
```

```
dt = t[1] - t[0]
```

```
lambdas = jn_zeros(0, N_terms)
```

```
# =====
```

```
# RL ПОЗВ'ЯЗОК
```

```
# =====
```

```
def solve_rl(beta):
```

```
    I = np.zeros(Nt)
```

```
    I[0] = 1.0
```

```
    for i in range(1, Nt):
```

```
        summ = 0.0
```

```
for n in lambdas:
```

```
    g = 0.0
```

```
    for j in range(1, i):
```

```
        dI1 = (I[j] - I[j-1]) / dt
```

```
        dI2 = (I[j+1] - I[j]) / dt
```

```
        tau1 = t[i] - t[j]
```

```
        tau2 = t[i] - t[j+1]
```

```
        e1 = np.exp(-n**2 * beta * tau1)
```

```
        e2 = np.exp(-n**2 * beta * tau2)
```

```
        g += 0.5 * dt * (
```

```
            e1 * (-dI1) +
```

```
            e2 * (-dI2)
```

```
        )
```

```
    summ += g / n**2
```

```
    dIdt = -(I[i-1] + 4*summ)
```

```
    I[i] = I[i-1] + dt * dIdt
```

```
return I
```

```
# =====
```

```
# ГРАФИК
```

```
# =====
```

```
plt.figure(figsize=(9,6))
```

```
for beta in betas:
```

```
    I = solve_rl(beta)
```

```
    plt.plot(t, I, label=f" $\beta = \{beta\}$ ")
```

```
plt.xlabel(r'$\tilde{t}$')
```

```
plt.ylabel(r'$\tilde{I}(\tilde{t})$')
```

```
plt.title('RL-цепь')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

3.2 Результати числових розрахунків

У граничному випадку $\beta \rightarrow \infty$ рівняння (2.17) має звичайний експоненціальний розв'язок: $\tilde{I}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}$. Для $\beta \rightarrow 0$, $\tilde{I}(\tilde{t}) \rightarrow 1$. Однак, у режимі $\tau \ll \tau_D$, ймовірний часовий масштаб може потрапити в область дуже високих частот, де додатковими фізичними факторами (випромінювання, паразитні ємності/індуктивності, неідеальні граничні умови, струм зміщення тощо) вже не можна нехтувати.

При $t \rightarrow \infty$ ми також маємо справу з експоненціальним спадом струму. Для малих значень t :

$$\tilde{I}(\tilde{t}) = 1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \tilde{t}^{\frac{3}{2}} + o\left(\tilde{t}^{\frac{3}{2}}\right). \quad (3.1)$$

Отже, для малих часів струм згасає тим повільніше, чим меншим є параметр β . Цей факт ілюструється на рис. 3.1, де показано залежність $\tilde{I}$, взятої при $\tilde{t} = 1$ (тобто при $t = \tau$), від параметра β для RC-ланцюга.

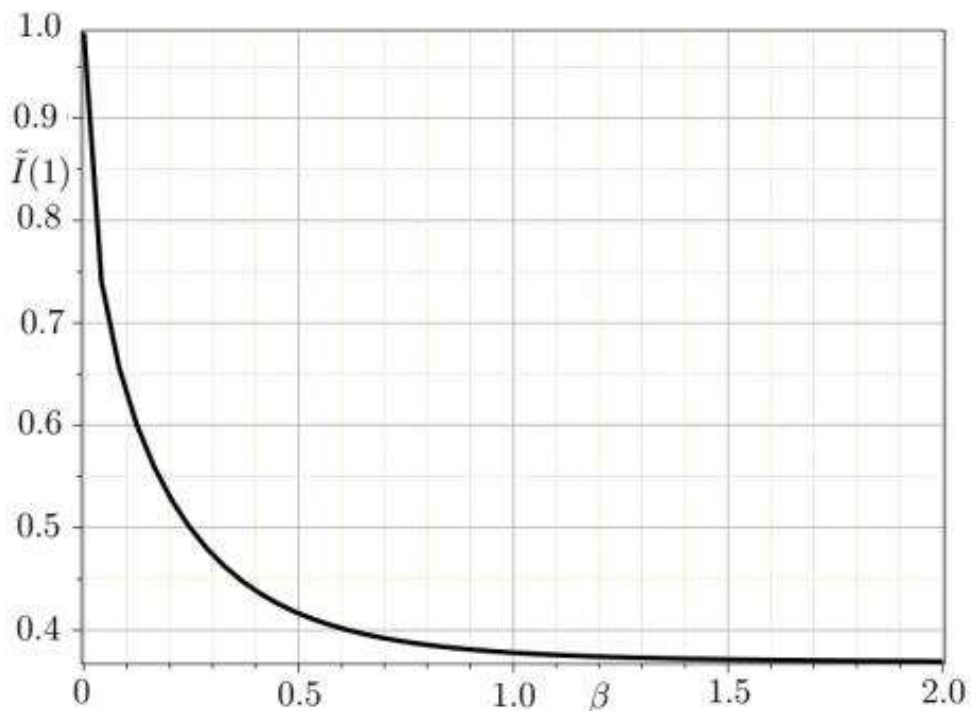


Рисунок 3.1 Залежність $\tilde{I}$, взятої при $\tilde{t} = 1$, від параметра β для RC-ланцюга

Уповільнення спаду струму для всіх скінченних значень β виникає через дифузійну природу проникнення магнітного поля всередині провідника, що вносить часову затримку в регулювання профілю густини струму поперек поперечного перерізу дроту. У класичній моделі RC-ланцюга ($\beta \rightarrow \infty$) спад струму є суто експоненціальним, визначається виключно розсіюванням енергії конденсатора через резистор. Проте, для скінчених значень β профіль густини струму всередині провідника не може миттєво змінюватися. Швидко спадаюче електричне поле на поверхні дроту, зумовлене розрядом конденсатора,

передуює спаду густини струму всередині провідника. Ця затримка визначається внутрішньою індуктивністю провідника, яка чинить опір зміні струму. Отже, енергія, що зберігається у внутрішньому магнітному полі, не розсіюється миттєво, а частково рециркулює назад у систему, ефективно протидіючи спаду, зумовленому RC , і призводячи до повільнішого, неекспоненціального спаду струму.

На рис. 3.2 представлено результати числових розрахунків залежностей $\tilde{I}(\tilde{t})$, побудованих при різних значеннях параметра β .

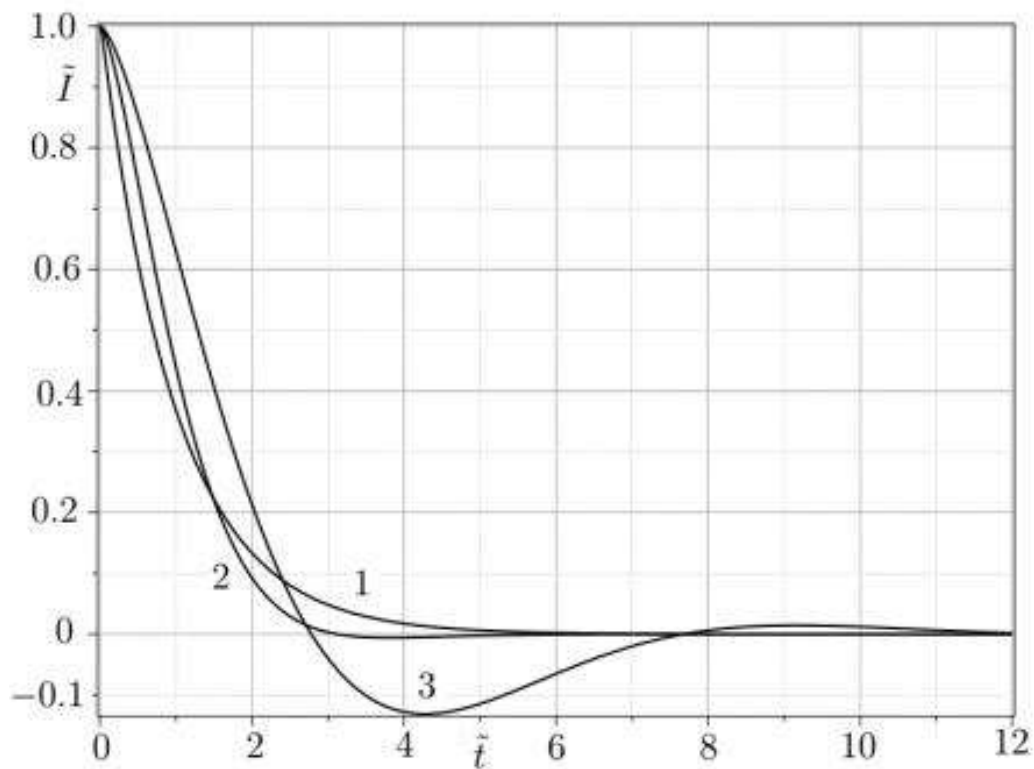


Рисунок 3.2 Залежність $\tilde{I}(\tilde{t})$ для RC -ланцюга. (1) - $\beta \rightarrow \infty$ ($\tilde{I}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}$);
(2) - $\beta = 0,4$; (3) - $\beta = 0,1$

Видно, що поряд з ефектом уповільнення затухання, відбувається перехід від режиму монотонного затухання до режиму затухаючих коливань, який відбувається при $\beta_{cr} \approx 0,4$. Щоб забезпечити аналітичну оцінку, узгоджену з числовими даними, знайдемо грубе наближене рішення рівняння Вольтерра (2.17).

Обмежимося у рівнянні (2.18) першим членом суми, тобто покладемо:

$$K(\tilde{t} - \tilde{s}) \approx 1 - \frac{e^{-\beta\lambda_1^2(\tilde{t}-\tilde{s})}}{\lambda_1^2}.$$

Тепер продиференціюємо вихідне рівняння (2.17):

$$\tilde{I}'(\tilde{t}) = -K(0)\tilde{I}(\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}} K'_{\tilde{t}}(\tilde{t} - \tilde{s})I(\tilde{s})d\tilde{s}. \quad (3.2)$$

З нелінійного рівняння вище

$$K'_{\tilde{t}} = 4\beta e^{-\beta\lambda_1^2(\tilde{t}-\tilde{s})} = \beta\lambda_1^2(1 - K(\tilde{t} - \tilde{s})). \quad (3.3)$$

Підставляючи рівняння (3.3) у рівняння (3.2) та використовуючи рівняння (2.17), матимемо:

$$\tilde{I}'(\tilde{t}) + K(0)\tilde{I}(\tilde{t}) + \beta\lambda_1^2(\tilde{I}(\tilde{t}) - 1) + \beta\lambda_1^2 \int_0^{\tilde{t}} I(\tilde{s})d\tilde{s} = 0. \quad (3.4)$$

Диференціюючи рівняння (3.4), отримуємо наступне диференціальне рівняння другого порядку для функції $\tilde{I}(\tilde{t})$:

$$\tilde{I}''(\tilde{t}) + (K(0) + \beta\lambda_1^2)\tilde{I}'(\tilde{t}) + \beta\lambda_1^2\tilde{I}(\tilde{t}) = 0. \quad (3.5)$$

Розв'язуючи відповідне характеристичне рівняння, можна знайти його корені (показники експонент):

$$k_{1,2} = \frac{-(K(0) + \beta\lambda_1^2) \pm \sqrt{(K(0) + \beta\lambda_1^2)^2 - 4\beta\lambda_1^2}}{2}. \quad (3.6)$$

Вираз (3.6) показує, що залежно від значення параметра β , розв'язок рівняння (3.5) може відповідати або затухаючим коливанням, або монотонному спаду. Врахування членів з $n > 1$ призводить до того, що кількість коливань стає скінченною, і вони виявляються нерегулярними на часовій шкалі. Зі зменшенням параметра β кількість коливань збільшується.

Нерегулярні особливості, передбачені нашою моделлю, мають якісну схожість з експериментальними спостереженнями, про які повідомляв Ковальський [9]. Однак у цій роботі були запропоновані альтернативні пояснення, включаючи нерівні струми, що входять і виходять з конденсатора, та роль перерозподілу поверхневого заряду. Тому наш механізм магнітної дифузії слід розглядати не як пряме спростування цих інтерпретацій, а радше як додатковий фізичний внесок, який стає актуальним у граничному випадку малих β (тобто, коли стала часу кола порівнянна або коротша за час магнітної дифузії провідника).

Зокрема, механізм, що обговорюється тут, є власне властивим самому провідному дроту та не залежить від неідеальних діелектричних властивостей чи контактних ефектів. Він виникає навіть в ідеалізованому контурі першого порядку та контролюється виключно співвідношенням τ/τ_D . У реалістичній експериментальній установці можуть співіснувати кілька механізмів, і їх відносна важливість залежатиме від геометрії, параметрів матеріалу та часових шкал.

Можливим засобом експериментального сепарування цих внесків було б незалежно змінювати: (i) радіус провідника та магнітну проникність (таким чином змінюючи τ_D), зберігаючи при цьому фіксованими зовнішні параметри RC, та (ii) геометрію діелектрика або конденсатора, зберігаючи при цьому провідник незмінним. Систематична залежність неекспоненціальних характеристик від τ_D підтверджувала б сценарій магнітної дифузії, тоді як

чутливість, головним чином, до властивостей конденсатора сприяла б механізмам поверхневого заряду або неоднакових струмів.

Перехід до немонотонного, коливального спаду струму за малих значеннях β означає фундаментальний зсув у динаміці системи від надмірно затухлого до недостатньо затухлого режиму. Коли стала часу RC-контур τ стає значно меншою за час магнітної дифузії τ_D , індуктивні властивості провідника, пов'язані з його внутрішнім магнітним полем, починають домінувати в початковій перехідній характеристиці. Система фактично поводить як RLC-контур із втратами. Тому наша модель враховує лише внутрішній індуктивний внесок. Додаткове врахування зовнішньої індуктивності геометрії контуру повинно призвести до деякого збільшення значення β_{cr} .

На рис. 3.3 наведено результати числових розрахунків залежностей $\tilde{I}(\tilde{t})$, побудованих при різних значеннях параметра β для RL-кіл.

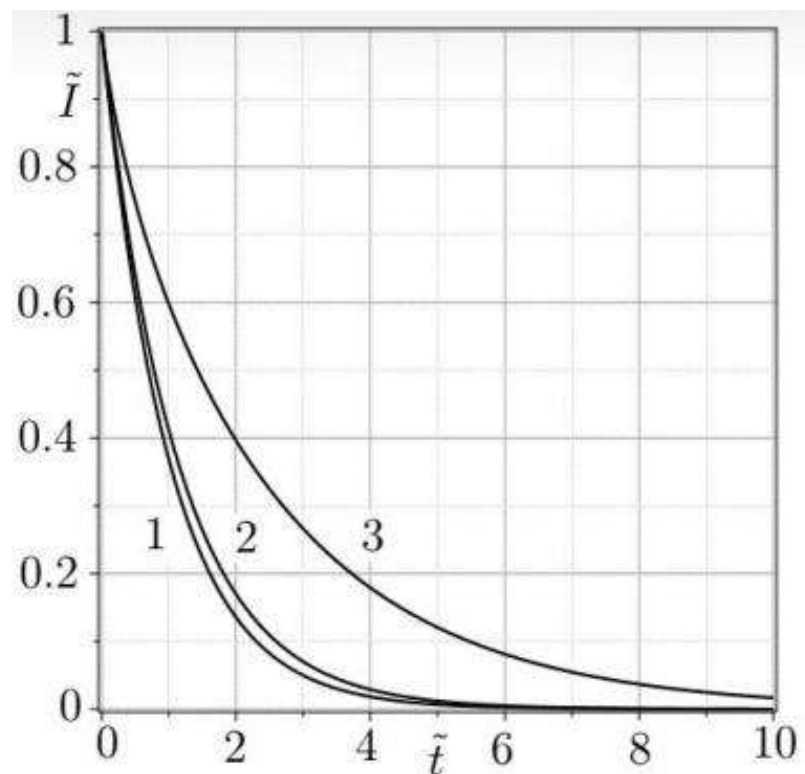


Рисунок 3.3. Залежність $\tilde{I}(\tilde{t})$ для RL-ланцюга. (1) - $\beta \rightarrow \infty$ ($\tilde{I}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}$);
(2) - $\beta = 1,0$; (3) - $\beta = 0,1$

Як і в попередньому випадку, спостерігається уповільнення спаду струму для всіх скінченних значень β (рис. 3.4) порівняно з ідеалізованим ($\beta \rightarrow \infty$) розглядом, яке має те саме походження, що й для RC-ланцюгів. Проте, тепер відбувається лише монотонний спад струму, оскільки в колі відсутня ємність.

Зазначимо також, що на обох рисунках 3.1 та 3.4 криві наближаються до значення, близького до 0,38, на одному краю вертикальної осі. Це пояснюється тим, що у граничному випадку $\beta \rightarrow \infty$ наша модель зводиться до класичного результату зосереджених елементів, $\tilde{I}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}$. Обчислення цього виразу при $\tilde{t} = 1$ дає $\tilde{I}(1) = \frac{1}{e} \approx 0,38$, що пояснює, чому крива наближається до значення, близького до 0,38, на відповідному краю графіків.

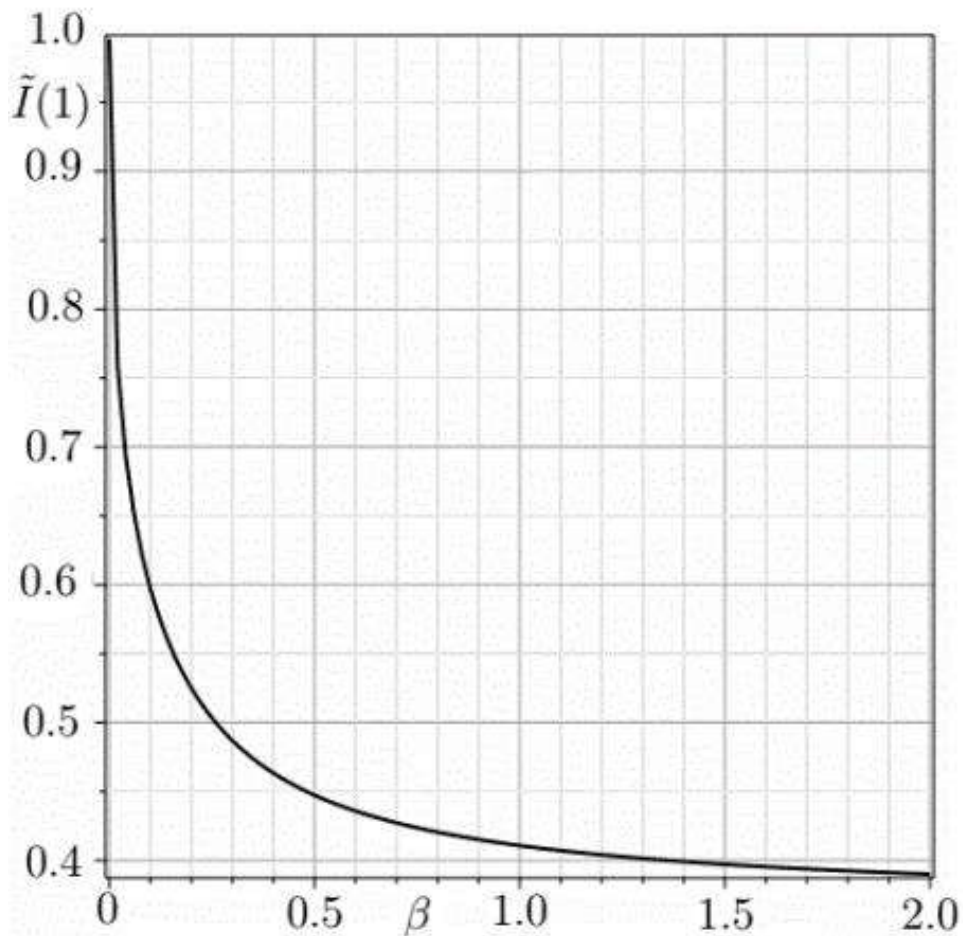


Рисунок 3.4. Залежність $\tilde{I}$, взятої при $\tilde{t} = 1$, від параметра β для RL-ланцюга

3.3 Висновки

У даному розділі було проведено числове дослідження динаміки струму в RC- та RL-ланцюгах з урахуванням дифузії магнітного поля всередині провідника. Оскільки отримані інтегральні рівняння не мають точного аналітичного розв'язку у замкненій формі, для їх дослідження було реалізовано числовий алгоритм у середовищі Python на основі трапецієподібної квадратурної схеми. Запропонований метод забезпечив стійке та збіжне обчислення розв'язків у широкому діапазоні значень параметра β .

У процесі моделювання встановлено, що характер часової еволюції струму істотно залежить від співвідношення між сталою часу електричного кола τ та часом магнітної дифузії τ_D . Для великих значень параметра β результати переходять до класичного експоненціального закону затухання, який відповідає моделі зосереджених параметрів. Натомість при скінченних та малих значеннях β спостерігається суттєве уповільнення спаду струму, що зумовлене інерційністю перебудови профілю густини струму всередині провідника та накопиченням енергії у внутрішньому магнітному полі.

Числові розрахунки для RC-ланцюга показали існування критичного значення параметра $\beta_{cr} \approx 0,4$, нижче якого система переходить від монотонного затухання до режиму затухаючих коливань. Було показано, що цей ефект має індуктивну природу та пов'язаний із магнітною дифузією у провіднику. Отримане наближене аналітичне рівняння другого порядку підтвердило можливість виникнення коливального режиму та дало якісне пояснення спостережуваного переходу.

Для RL-ланцюга також виявлено уповільнення затухання струму порівняно з класичним експоненціальним законом. Проте, на відміну від RC-випадку, у системі зберігається лише монотонний характер спаду струму, що пояснюється відсутністю ємнісного механізму накопичення енергії.

Отримані результати демонструють, що навіть у найпростішому контурі першого порядку внутрішня структура провідника та магнітна дифузія можуть суттєво впливати на перехідні процеси. Запропонована модель дозволяє описати неекспоненціальні особливості затухання струму та може бути корисною для аналізу швидкоплинних електромагнітних процесів у системах, де характерні часові масштаби є порівняними з часом магнітної дифузії провідника.

4 ОХОРОНА ПРАЦІ

4.1 Загальні положення

Охорона праці є системою правових, соціально-економічних, організаційно-технічних та санітарно-гігієнічних заходів, спрямованих на збереження життя, здоров'я та працездатності людини в процесі трудової діяльності [13]. Забезпечення безпечних умов праці є обов'язковою складовою підготовки фахівців технічних спеціальностей, зокрема у галузі електротехніки.

При виконанні розрахунків електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом основна діяльність пов'язана з обробкою текстової та графічної інформації, роботою з формулами, схемами та програмними засобами моделювання. Такий вид роботи характеризується підвищеним зоровим навантаженням, тривалим перебуванням за комп'ютером та високими вимогами до точності виконання операцій.

У зв'язку з цим особливого значення набуває організація раціонального освітлення робочого місця, оскільки саме освітлення є одним із ключових факторів виробничого середовища, що впливає на функціональний стан організму людини, продуктивність праці та якість виконання роботи [13]. Недостатній рівень освітленості або його нерівномірність можуть призводити до швидкої втомлюваності, зниження концентрації уваги, збільшення кількості помилок, а також до розвитку професійних захворювань органів зору.

Відповідно до вимог державних будівельних норм України ДБН В.2.5-28:2018 «Природне і штучне освітлення», для приміщень, у яких виконуються роботи середньої точності (зокрема робота з документами, кресленнями та комп'ютерною технікою), нормована освітленість повинна становити 300–

500 лк [13]. Дотримання цих норм є необхідною умовою забезпечення безпечних та комфортних умов праці.

Крім того, організація робочого місця повинна відповідати вимогам нормативних документів з охорони праці при роботі з електронно-обчислювальними машинами, що регламентують параметри освітлення, розташування обладнання, а також режими праці та відпочинку [14].

Таким чином, правильне проєктування системи освітлення є важливим етапом забезпечення охорони праці та створення оптимальних умов для виконання інженерних розрахунків.

4.2 Вплив безпечних умов праці на якість продукції (інженерних розрахунків)

У контексті виконання кваліфікаційної роботи (інженерні розрахунки, моделювання електричних кіл, аналіз даних) «продукцією» є результати інтелектуальної праці – правильність розрахунків, відсутність помилок, достовірність висновків. Дослідження [5, 9] показують, що:

- недостатня освітленість (нижче 300 лк) збільшує кількість помилок при читанні цифр та графіків на 25–35%;
- високий рівень шуму (>55 дБА) знижує концентрацію уваги та підвищує ймовірність пропуску критичних даних на 18–22%;
- неоптимальний мікроклімат (температура >25°C або <19°C) збільшує кількість арифметичних помилок до 40% після другої години роботи;
- наявність відблисків на екрані монітора подовжує час зчитування інформації в 1,5–2 рази.

Таким чином, створення безпечних та комфортних умов праці безпосередньо підвищує точність розрахунків, знижує ймовірність помилок у проєктуванні електричних схем та інтерпретації результатів чисельного моделювання, що є критичним для електротехнічних розробок.

Основні шляхи вирішення проблем безпеки праці в промисловості (огляд)

Сучасна система управління охороною праці в Україні базується на Законі України «Про охорону праці» [13] та низці підзаконних актів.

Основними шляхами вирішення проблем безпеки праці є:

1. Організаційно-правові заходи:

- розроблення та впровадження системи управління охороною праці (СУОП) на підприємствах;
- проведення атестації робочих місць за умовами праці;
- навчання та інструктажі з охорони праці (вступний, первинний, позаплановий, цільовий);
- призначення відповідальних осіб за електробезпеку, пожежну безпеку тощо.

2. Технічні та інженерні рішення:

- огороження рухомих частин обладнання, блокування, сигналізація;
- влаштування захисного заземлення та занулення електроустановок;
- використання світильників із закритими лампами (вибухозахищених у відповідних зонах);
- екранування джерел електромагнітних полів;
- впровадження систем місцевої витяжної вентиляції (для виробництв з хімічними речовинами).

3. Санітарно-гігієнічні заходи:

- підтримання оптимальних параметрів мікроклімату (опалення, вентиляція, кондиціонування) згідно з ДСН 3.3.6.042-99;
- забезпечення нормованого природного та штучного освітлення згідно з ДБН В.2.5-28:2018;
- зниження рівня шуму та вібрації до допустимих величин;
- очищення повітря від пилу та газів (пило-відсмоктувачі, фільтри).

4. Лікувально-профілактичні заходи:

- попередні (при прийнятті на роботу) та періодичні медичні огляди;
- безкоштовна видача спеціального одягу, взуття та засобів індивідуального захисту (ЗІЗ);
- санітарно-побутове забезпечення (кімнати відпочинку, пункти харчування, аптечки);
- додаткові відпустки за роботу у шкідливих умовах (за результатами атестації).

5. Психофізіологічні та ергономічні рішення:

- наукова організація робочих місць (раціональна поза, доступність органів управління);
- регламентовані перерви в роботі з ПЕОМ (через кожну годину – 5–10 хв, через 2 години – 15–20 хв);
- гімнастика для очей, виробнича гімнастика;
- чергування видів діяльності для зниження монотонності.

6. Заходи з пожежної профілактики:

- обладнання приміщень автоматичною пожежною сигналізацією та системами оповіщення;
- укомплектування первинними засобами пожежогасіння (вогнегасники, пожежні щити);
- проведення протипожежних тренувань;
- заборона куріння у невстановлених місцях та використання несправних електроприладів.

4.3 Характеристика приміщення

Для виконання інженерних розрахунків електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом розглядається робоче приміщення, яке відповідає умовам навчального або офісного середовища.

Основні геометричні параметри приміщення:

- площа приміщення –

$$S = 20 \text{ м}^2$$

- висота приміщення –

$$H = 3 \text{ м}$$

- довжина приміщення –

$$l = 5 \text{ м}$$

- ширина приміщення –

$$l(1) = 4 \text{ м}$$

Приміщення призначене для виконання робіт, пов'язаних із використанням персонального комп'ютера, обробкою текстової інформації, розрахунками, побудовою графіків та аналізом електротехнічних процесів. Такий вид діяльності характеризується високим рівнем зорового навантаження та потребує забезпечення належних умов освітлення [14].

Згідно з класифікацією зорових робіт, даний вид діяльності відноситься до робіт середньої точності, що передбачає роботу з об'єктами розміром понад 0,5 мм. Для таких умов нормативні документи встановлюють відповідний рівень освітленості.

Нормована освітленість робочої поверхні визначається відповідно до ДБН В.2.5-28:2018 і приймається $E = 400$ лк, що знаходиться в межах допустимого діапазону 300–500 лк для приміщень з використанням комп'ютерної техніки [15].

Крім геометричних параметрів, важливими характеристиками приміщення є коефіцієнти відбиття поверхонь, які впливають на ефективність використання світлового потоку:

- стеля – 0,7;
- стіни – 0,5;
- підлога – 0,3.

Ці значення відповідають типовим умовам експлуатації та враховуються при подальшому розрахунку системи штучного освітлення.

Таким чином, задані параметри приміщення є вихідними даними для проведення розрахунку штучного освітлення та дозволяють забезпечити відповідність умов праці встановленим нормативним вимогам.

4.4 Аналіз небезпечних та шкідливих виробничих факторів

Під час роботи з комп'ютерною технікою та електричними схемами можуть мати місце такі фактори (згідно з [8]):

- Підвищена напруга в електричній мережі (небезпека ураження струмом).
- Підвищений рівень електромагнітних випромінювань (дисплей, блок живлення).
- Недостатня або нерівномірна освітленість робочої зони.
- Пряма та відбита блискість від екранів та поверхонь.
- Статична електрика та запиленість повітря.
- Пожежна небезпека (несправна електропроводка, перегрів обладнання).

4.5 Оптимальні параметри мікроклімату

Відповідно до [13] та ДСН 3.3.6.042-99, для приміщень з ПЕОМ (категорія робіт – легка – 1б, оскільки виконується сидячи, без переміщення вантажів) встановлюються такі оптимальні параметри мікроклімату (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Оптимальні параметри мікроклімату для приміщення з ПЕОМ

Період року	Категорія робіт	Температура, °C	Відносна вологість, %	Швидкість руху повітря, м/с
Холодний	Легка – 1б	21 – 23	40 – 60	≤ 0,1
Теплий	Легка – 1б	22 – 24	40 – 60	≤ 0,2

4.6 Метод розрахунку освітлення

Освітлення виробничих, навчальних і житлових приміщень є одним із найважливіших факторів, що визначають комфортність перебування людини, ефективність виконання роботи та рівень безпеки. Недостатній рівень освітленості може призводити до перевтоми, зниження працездатності та погіршення зору [17].

Для визначення параметрів освітлювальних установок застосовуються різні методи, серед яких найбільш поширеним є метод світлового потоку (люмен-метод). Цей метод дозволяє визначити необхідний світловий потік для забезпечення нормованої освітленості в приміщенні [18].

Сутність методу світлового потоку

Метод світлового потоку базується на визначенні загального світлового потоку, який повинен створюватися джерелами світла для досягнення заданого рівня освітленості на робочій поверхні [19].

Даний метод є ефективним для розрахунку загального рівномірного освітлення і широко використовується при проектуванні освітлення навчальних та адміністративних приміщень [20].

Основна формула розрахунку

$$\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta},$$

де Φ – необхідний світловий потік, лм;

E – освітленість, лк;

S – площа приміщення, м²;

K – коефіцієнт запасу;

η – коефіцієнт використання світлового потоку [21].

Характеристика параметрів

Освітленість (E) є основною нормованою величиною, що визначає рівень освітлення робочої поверхні. Вона встановлюється відповідно до нормативних документів і залежить від характеру виконуваних робіт [21]. Наприклад, для навчальних аудиторій освітленість становить 300–500 лк [7].

Площа приміщення (S) визначається як добуток довжини та ширини приміщення. Цей параметр безпосередньо впливає на загальну потребу в освітленні [7].

Коефіцієнт запасу (K) враховує зниження освітленості в процесі експлуатації освітлювальної установки, зокрема через забруднення світильників і старіння ламп [8].

Коефіцієнт використання світлового потоку (η) показує частку світлового потоку, яка досягає робочої поверхні. Його значення залежить від конструкції світильників і відбивних властивостей поверхонь [21].

Фактори, що впливають на ефективність освітлення

Ефективність освітлення залежить від ряду факторів, серед яких:

- геометричні параметри приміщення;
- висота підвісу світильників;
- коефіцієнти відбиття стелі, стін і підлоги;
- тип джерела світла;
- рівномірність розподілу світлового потоку [21].

Світлі поверхні приміщення сприяють кращому використанню світлового потоку, тоді як темні – знижують ефективність освітлення [21].

Алгоритм розрахунку освітлення

Розрахунок методом світлового потоку виконується за наступною послідовністю:

1. Визначення площі приміщення;
2. Вибір нормованої освітленості;
3. Визначення коефіцієнтів K та η ;
4. Розрахунок загального світлового потоку;
5. Вибір типу джерела світла;

6. Визначення кількості світильників;
7. Перевірка відповідності нормативним вимогам [5].

Приклад розрахунку.

Нехай задано: $S = 20 \text{ м}^2$; $E = 300 \text{ лк}$; $K = 1,3$; $\eta = 0,5$.

Підставляємо у формулу:

$$\Phi = (300 \times 20 \times 1,3) / 0,5 = 15600 \text{ лм.}$$

Отже, необхідний світловий потік становить 15600 лм.

Якщо використовується лампа зі світловим потоком 1500 лм:

$$N = 15600 / 1500 \approx 10,4 \approx 11 \text{ ламп [8].}$$

Переваги та недоліки методу

Переваги:

- простота використання;
- універсальність;
- достатня точність [8].

Недоліки:

- не враховує локальне освітлення;
- не визначає точний розподіл світла;
- потребує уточнень для складних умов [9].

Висновок

Метод світлового потоку є одним із основних методів розрахунку освітлення, який дозволяє визначити необхідний світловий потік та кількість освітлювальних приладів. Його застосування забезпечує створення комфортних та безпечних умов праці відповідно до нормативних вимог [18].

4.6 Визначення коефіцієнтів

При розрахунку освітлення методом світлового потоку важливе значення мають допоміжні коефіцієнти, які враховують реальні умови експлуатації освітлювальної установки. До таких коефіцієнтів належать коефіцієнт запасу та коефіцієнт використання світлового потоку [19].

Коефіцієнт запасу (K)

Коефіцієнт запасу враховує зниження освітленості в процесі експлуатації освітлювальної установки. Це зниження обумовлене рядом факторів:

- старінням джерел світла (зменшення світлового потоку з часом);
- забрудненням світильників та поверхонь;
- зниженням прозорості розсіювачів;
- погіршенням відбивних властивостей стін і стелі [18].

Врахування цього коефіцієнта є необхідним для забезпечення нормативного рівня освітленості протягом усього терміну експлуатації освітлювальної установки.

Згідно з нормативними рекомендаціями, значення коефіцієнта запасу залежить від умов середовища:

- для чистих приміщень – 1,2;
- для звичайних умов – 1,3–1,4;
- для запилених або виробничих приміщень – до 1,5 [19].

У даному випадку приймається:

$K = 1,5$, що відповідає умовам можливого забруднення та необхідності забезпечення стабільного рівня освітлення [18].

Коефіцієнт використання світлового потоку (η)

Коефіцієнт використання світлового потоку показує, яка частина світлового потоку від джерел світла досягає робочої поверхні. Його значення залежить від ряду факторів:

- геометричних параметрів приміщення (довжина, ширина, висота);

- висоти підвісу світильників;
- типу та конструкції світильників;
- коефіцієнтів відбиття стелі, стін і підлоги [17].

Чим світліші поверхні приміщення, тим більшим є коефіцієнт використання світлового потоку, оскільки світло краще відбивається і розподіляється в просторі.

Зазвичай значення коефіцієнта η знаходиться в межах 0,4–0,6 для більшості стандартних приміщень [17].

У даному розрахунку приймається:

$\eta = 0,6$, що відповідає сприятливим умовам освітлення та достатньо високим відбивним властивостям поверхонь.

Прийняті значення коефіцієнтів $K = 1,5$ та $\eta = 0,6$ дозволяють врахувати експлуатаційні втрати світлового потоку та ефективність його використання. Це забезпечує більш точний розрахунок освітлення та відповідність нормативним вимогам [18].

4.7 Розрахунок світлового потоку

На основі прийнятих вихідних даних та визначених коефіцієнтів виконується розрахунок необхідного світлового потоку для забезпечення нормативного рівня освітленості в приміщенні.

Для розрахунку використовується формула методу світлового потоку [19]:

$$\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta}$$

де: Φ – необхідний світловий потік, лм;

E – нормована освітленість, лк;

S – площа приміщення, м²;

K – коефіцієнт запасу;

η – коефіцієнт використання світлового потоку.

Підстановка значень

Для даного приміщення прийнято: $E = 400$ лк; $S = 20$ м²; $K = 1,5$; $\eta = 0,6$.

Підставляємо значення у формулу:

$$\Phi = (400 \times 20 \times 1,5) / 0,6 = 20000 \text{ лм.}$$

Отже, для забезпечення необхідного рівня освітленості в приміщенні потрібно забезпечити загальний світловий потік 20000 лм.

Аналіз отриманого результату

Отримане значення світлового потоку враховує як нормативну освітленість, так і експлуатаційні втрати, пов'язані із забрудненням світильників та старінням джерел світла [7]. Це дозволяє забезпечити стабільний рівень освітлення протягом тривалого часу.

Знаючи загальний світловий потік, на наступному етапі розрахунку визначається кількість світильників або ламп, необхідних для освітлення приміщення, шляхом ділення Φ на світловий потік одного джерела світла [17].

Розрахунок показав, що для приміщення площею 20 м² необхідний світловий потік становить 20000 лм. Це значення є основою для подальшого підбору освітлювальних приладів та організації системи освітлення відповідно до нормативних вимог [8].

4.8 Висновки

У результаті виконаних розрахунків встановлено:

- освітленість — 400 лк;
- світловий потік — 20000 лм;
- кількість світильників — 10.

Загальна оцінка

Отримані результати свідчать про те, що:

- система освітлення відповідає нормативним вимогам;

- забезпечується комфортне середовище для роботи;
- досягнуто оптимального співвідношення ефективності та економічності.

Практичне значення

- покращує умови праці;
- знижує втому;
- підвищує продуктивність;
- відповідає вимогам безпеки.

Загальний висновок

Запропонована система освітлення є ефективною, безпечною та відповідає вимогам ДБН, що дозволяє рекомендувати її до практичного застосування базується на методі світлового потоку (коефіцієнта використання), який є класичним для розрахунку загального рівномірного освітлення.

Ключові параметри та результати

- Об'єкт: Приміщення 20 м² інженерних робіт (середня точність).
- Норма: Відповідно до ДБН В.2.5-28:2018, прийнято $E = 400$ лк.
- Коефіцієнти: Вибрано коефіцієнт запасу $K = 1,5$ (враховує старіння ламп та забруднення) та коефіцієнт використання $\eta = 0,6$ (світлі стіни/стеля).

- Формула:
$$\Phi = \frac{E \cdot S \cdot K}{\eta}$$

- Результат: Необхідний потік 20 000 лм, що забезпечується 10 світильниками по 2 000 лм кожен.

ВИСНОВКИ

У ході виконання дипломної роботи було проведено комплексне дослідження перехідних процесів в електричних колах першого порядку з урахуванням просторової неоднорідності розподілу густини струму в провідниках. Особливу увагу приділено впливу магнітної дифузії на характер затухання струму в RC- та RL-ланцюгах, а також розробці математичної моделі, що дозволяє враховувати внутрішні електромагнітні процеси у провіднику. Отримані результати мають практичне значення для аналізу швидкоплинних електромагнітних процесів у сучасних електронних та електротехнічних системах.

У першому розділі було розглянуто теоретичні основи електротехніки та електродинаміки, необхідні для дослідження процесів перенесення електричного заряду в провідниках. Проведено аналіз основних характеристик електричного струму, розглянуто особливості провідності різних середовищ, а також досліджено перехідні процеси в RC- та RL-колах на основі класичної теорії. Окрему увагу приділено рівнянням Максвелла та їх застосуванню для опису електромагнітних процесів у провідних середовищах. У межах наближення гарного провідника отримано рівняння, що описує просторово-часовий розподіл густини струму в циліндричному провіднику.

У методичному розділі розроблено математичну модель, яка враховує скінченний час магнітної дифузії всередині провідника та дозволяє досліджувати неекспоненціальні перехідні процеси в колах першого порядку. На основі рівнянь Максвелла отримано дифузійне рівняння для густини струму та побудовано його розв'язок методом розкладу за функціями Бесселя. Для RC- та RL-ланцюгів виведено інтегральні рівняння, які враховують ефекти пам'яті, зумовлені внутрішньою структурою електромагнітного поля в провіднику. Показано, що характер процесів визначається співвідношенням між сталою часу кола τ та часом магнітної дифузії τ_D .

У дослідницькій частині дипломної роботи реалізовано числове розв'язання отриманих інтегральних рівнянь у середовищі Python із використанням трапецієподібної квадратурної схеми. Проведено моделювання перехідних процесів для різних значень безрозмірного параметра $\beta = \tau / \tau_D$. Результати показали, що для великих значень β поведінка системи наближається до класичного експоненціального закону затухання струму. Водночас при зменшенні β спостерігається суттєве уповільнення спаду струму, пов'язане з інерційністю перебудови розподілу густини струму всередині провідника. Для RC-ланцюга встановлено існування критичного значення $\beta_{cr} \approx 0,4$, нижче якого виникає режим затухаючих коливань. Для RL-ланцюга також виявлено неекспоненціальний характер процесів, однак затухання струму залишається монотонним у всьому дослідженому діапазоні параметрів.

Окремий розділ роботи присвячено питанням охорони праці. Проведено аналіз умов праці під час виконання інженерних розрахунків та роботи з комп'ютерною технікою. Розглянуто вимоги до організації освітлення робочого місця відповідно до чинних нормативних документів. Виконано розрахунок системи штучного освітлення приміщення методом світлового потоку, визначено необхідний світловий потік, кількість світильників та перевірено відповідність отриманої освітленості нормативним вимогам. Також проаналізовано питання електробезпеки, пожежної безпеки та впливу освітлення на безпеку й ефективність праці.

У результаті виконаної роботи підтверджено, що врахування магнітної дифузії та просторової неоднорідності розподілу струму дозволяє більш точно описувати перехідні процеси в електричних колах першого порядку. Розроблена математична модель дає можливість прогнозувати неекспоненціальні особливості затухання струму та може бути використана для аналізу високошвидкісних електронних схем, імпульсних пристроїв, систем автоматизації та інших технічних об'єктів, у яких характерні часові масштаби процесів є порівняними з часом магнітної дифузії провідника.

Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень впливу внутрішніх електромагнітних процесів на динаміку електричних кіл та вдосконалення методів їх математичного моделювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Capelli F., Riba J.-R. Analysis of formulas to calculate the AC inductance of different configurations of nonmagnetic circular conductors. *Electr. Eng.* 2017. Vol. 99. P. 827–837.
2. Coufal O. One hundred and fifty years of skin effect. *Appl. Sci.* 2023. Vol. 13. Duffie J. A., Beckman W. A. Solar Engineering of Thermal Processes. 4th ed. Wiley, 2013. 928 p.
3. EnergySage – Solar Learning Center. URL: (дата звернення: 22.05.2025). Frei A. H., Strutt M. J. O. Skin effect in semiconductors. *Proceedings of the IRE.* 1960. Vol. 48. P. 1272–1277.
4. Gatous O. M. O., Filho J. P. A new formulation for skin-effect resistance and internal inductance frequency-dependent of a solid cylindrical conductor. *IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America.* 2004. P. 919–924.
5. Greenmatch: How Do Solar Panels Work? URL: (дата звернення: 22.05.2025). International Electrotechnical Commission (IEC). Standard 61215: Terrestrial photovoltaic (PV) modules – Design qualification and type approval. IEC, 2021. International Renewable Energy Agency. Global Renewables Outlook, 2023. URL: (дата звернення: 28.05.2025).
6. Masters G. M. Renewable and Efficient Electric Power Systems. Wiley, 2013. 720 p. MATLAB Simulink Documentation. URL: (дата звернення: 15.05.2025). National Renewable Energy Laboratory. URL: (дата звернення: 28.05.2025). PV Education – Photovoltaic Solar Energy Resources. URL: (дата звернення: 20.05.2025).
7. Raven M. S. Experimental measurements of the skin effect and internal inductance at low frequencies. *Acta Technica CSAV.* 2015. Vol. 60. P. 51–69.
8. Rudnev V., Loveless D., Cook R. L. Handbook of Induction Heating. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2017.

9. Simscape Electrical Toolbox – MathWorks Documentation. URL: (дата звернення: 28.05.2025).
10. Solar Power World – Technical Articles. URL: (дата звернення: 28.05.2025).
11. Sera D., Teodorescu R., Hantschel J., Knoll M. Optimized Maximum Power Point Tracker for Fast-Changing Environmental Conditions. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2008. Vol. 55(7). P. 2629–2637.
12. Villalva M. G., Gazoli J. R., Filho E. R. Comprehensive approach to modeling and simulation of photovoltaic arrays. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2009. Vol. 24(5). P. 1198–1208.
13. Закон України «Про охорону праці». - К.: 1993. - 40 с.
14. Закон України «Про внесення змін до закону України «Про охорону праці». Журнал «Охорона праці» 1/2003 С.3-11.
15. Кельберт Д.Л. Охорона праці в текстильній промисловості. - М.: "Лёгкая индустрия", 1977. -196с.
16. Санітарні норми проектування промислових підприємств (СН245-71). - М.: Стройиздат, 1971.
17. Охорона праці. Збірник офіційних матеріалів.
18. Юдін Е.Н. Охорона праці в машинобудуванні, - Машинобудування, 1976.
19. СНиП П-33-75. ДБН В.2.5-67:2013 Опалення, вентиляція та кондиціонування.
20. Кнорринг Г.М. Довідкова книга для проектування електричного освітлення. Л.: Енергія, 1976.
21. ДБН В.2.5-28:2018 Природне і штучне освітлення.
22. ГОСТ 13828-74. Світильники. Види і позначення.
23. Бурлак Г.М. Безпечна робота на комп'ютері: Організація праці на підприємствах інформаційного обслуговування: Навчальний посібник. - М.: Фінанси і статистика, 1998.