

ХЕРСОНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

(повне найменування вищого навчального закладу)

ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА ТРАНСПОРТУ

(назва факультету)

КАФЕДРА ЕНЕРГЕТИКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ І ФІЗИКИ

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної роботи
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
(рівень вищої освіти)

на тему Дослідження електричних властивостей Г-подібної провідної
пластини

Виконав: студент 4 курсу групи 4зЕЛ
спеціальності 141. Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка
(код і назва спеціальності)

освітньо-
професійної Електротехніка та електротехнології.
програми (назва ОПП)

_____ Ткаченко Р. І. _____
(прізвище та ініціали)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Івченко В.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент к.т.н., доц. Мешков Ю.Є. ..
(прізвище та ініціали)

Хмельницький – 2026 р.

РЕФЕРАТ

Дипломна робота на тему «Дослідження електричних властивостей Г-подібної провідної пластини» включає в себе пояснювальну записку та графічну частину.

Пояснювальна записка містить 63 сторінки формату А4, 4 рисунків, 20 формул, 21 використане джерело.

Ключові слова: електричний опір, провідник, змінний поперечний переріз, електродинаміка, математичне моделювання, метод скінченних елементів.

Дипломна робота присвячена розрахунку та дослідженню електричного опору провідників зі змінним поперечним перерізом із використанням сучасних теоретичних і чисельних методів.

Проведено аналіз основних положень теорії електропровідності та електродинаміки. Розглянуто вплив геометричних параметрів провідника на розподіл електричного поля та густини струму. Проаналізовано існуючі аналітичні та чисельні методи визначення електричного опору, зокрема інтегральні підходи, методи розв'язання рівняння Лапласа та метод еквівалентних схем.

Побудовано математичні моделі провідників зі змінним поперечним перерізом та виконано розрахунки для різних геометричних конфігурацій. Для дослідження складних систем використано чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів, що дозволяє враховувати неоднорідність електричного поля та складну геометрію об'єктів.

За допомогою сучасних програмних засобів моделювання реалізовано чисельні експерименти для аналізу розподілу потенціалу, густини струму та визначення ефективного електричного опору провідників. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів на величину опору та встановлено закономірності його зміни.

У розділі «Охорона праці» розглянуто комплекс заходів щодо забезпечення безпечних умов праці при роботі з комп'ютерною технікою. Наведено характеристику робочого місця, проаналізовано шкідливі та небезпечні фактори (електромагнітне випромінювання, напруження зору, шум, статична електрика), а також оцінено параметри мікроклімату та забезпечення електробезпеки.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА.....	7
1.1 Поняття про електричне поле	7
1.2 Рівняння Лапласа	8
1.3 Властивості гармонічних функцій	9
1.4 Електричний струм та його характеристики	11
1.5 Висновки.....	13
2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА.....	15
2.1 Вступні зауваження.....	15
2.2 Постановка задачі. Двовимірне рівняння Лапласа та крайові умови.....	17
2.3 Методика розрахунку електричного опору пластинки.....	19
2.4 Метод скінчених елементів.....	20
2.5 Висновки.....	24
3 ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА.....	26
3.1 Комп'ютерна програма для проведення числових розрахунків.....	26
3.2 Результати числових розрахунків.....	43
3.3 Висновки.....	47
4 ОХОРОНА ПРАЦІ.....	49
4.1 Загальні положення.....	49
4.2 Вимоги до штучного освітлення.....	50
4.3 Штучне освітлення. Системи і види освітлення	51
4.4 Розрахунок штучного освітлення виробничого приміщення.....	54

4.5 Висновки до розділу охорони праці.....	58
ВИСНОВКИ.....	60
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	62

ВСТУП

У сучасних умовах розвитку електротехніки, мікроелектроніки та комп'ютерного моделювання особливого значення набуває дослідження електричних процесів у провідниках складної геометричної форми. Сучасні електронні пристрої, друковані плати, інтегральні схеми та тонкоплівкові структури часто містять провідні елементи з різкими вигинами, кутовими переходами та неоднорідною конфігурацією. У таких системах класичні аналітичні формули для визначення електричного опору прямолінійних провідників стають недостатньо точними, оскільки не враховують двовимірний характер розподілу електричного поля та густини струму.

Особливий інтерес становлять Г-подібні провідні пластини, які широко використовуються у друкованих платах, мікроелектронних компонентах, сенсорних системах та електротехнічних пристроях. У подібних структурах електричне поле є неоднорідним, а лінії струму викривляються поблизу внутрішніх і зовнішніх кутів. Це призводить до локальної концентрації густини струму, зміни ефективного електричного опору та виникнення областей підвищених теплових втрат. Тому дослідження впливу геометричних параметрів Г-подібної пластини на її електричні характеристики є важливим як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Для опису розподілу електричного потенціалу в беззарядних областях використовується рівняння Лапласа, розв'язки якого дозволяють визначити структуру електричного поля та густину струму в провіднику. Однак для областей складної форми отримання аналітичного розв'язку є надзвичайно складним або неможливим. У зв'язку з цим особливого значення набувають числові методи, зокрема метод скінченних елементів, який забезпечує можливість точного моделювання електропровідності в неоднорідних геометричних областях та дозволяє враховувати локальні особливості розподілу поля.

Актуальність теми полягає у необхідності дослідження електричного

опору провідників складної форми з урахуванням неоднорідності електричного поля та двовимірного перерозподілу струму. Отримані результати мають практичне значення для проєктування друкованих плат, інтегральних схем, тонкоплівкових резистивних елементів і контактних структур, де геометричні особливості суттєво впливають на електричні характеристики системи.

Метою даної дипломної роботи є дослідження електричного опору Г-подібної провідної пластини в режимі постійного струму на основі рівняння Лапласа та чисельного моделювання методом скінченних елементів.

Об'єктом дослідження є електричне поле та електричний струм у провідниках складної геометричної форми.

Предмет дослідження – закономірності розподілу електричного потенціалу, густини струму та електричного опору в Г-подібній провідній пластині.

Задачі дослідження:

- проаналізувати теоретичні основи електричного поля, рівняння Лапласа та властивості гармонічних функцій;
- дослідити фізичну природу електричного струму та електричного опору провідників;
- сформулювати математичну модель розподілу потенціалу в Г-подібній провідній пластині;
- визначити граничні умови задачі електропровідності;
- реалізувати числове розв'язання задачі методом скінченних елементів;
- розробити програмний комплекс мовою Python для проведення числових розрахунків;
- дослідити розподіл електричного поля та екіпотенціальних ліній у пластині;
- проаналізувати вплив геометричних параметрів на величину електричного опору;

- порівняти результати числового моделювання з класичними одновимірними оцінками опору.

Методи дослідження: методи математичної фізики, теорія електричного поля, числові методи розв'язування диференціальних рівнянь, метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання та аналіз отриманих результатів.

Практичне значення роботи полягає у можливості застосування отриманих результатів для розрахунку електричних параметрів провідних елементів складної геометрії, оптимізації друкованих плат, мікроелектронних структур та тонкоплівкових провідників, а також для вдосконалення методів комп'ютерного моделювання електропровідності.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного з них, загальних висновків та списку використаних джерел.

1 ОГЛЯДОВА ЧАСТИНА

1.1 Поняття про електричне поле

Електричне поле є однією з фундаментальних форм матерії, за допомогою якої здійснюється взаємодія між електрично зарядженими тілами та частинками. Воно виникає навколо електричних зарядів і передає електромагнітну взаємодію у просторі. Наявність електричного поля проявляється через його дію на інші заряджені тіла, які потрапляють у зону його впливу.

Поняття електричного поля було введено у фізику для пояснення процесу взаємодії між зарядами без безпосереднього контакту між ними. Якщо два заряджені тіла розташовані на певній відстані, то кожне з них створює навколо себе електричне поле, яке діє на інше тіло. Таким чином, взаємодія між зарядами здійснюється не миттєво, а через поле, що існує у просторі.

Основною характеристикою електричного поля є його напруженість. Напруженість електричного поля визначається як фізична величина, що дорівнює відношенню сили, з якою поле діє на пробний позитивний заряд, до величини цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.1)$$

Напрямок вектора напруженості збігається з напрямком сили, що діє на позитивний заряд. Одиницею вимірювання напруженості електричного поля в міжнародній системі одиниць SI є вольт на метр (В/м) або ньютон на кулон (Н/Кл).

Електричне поле може бути однорідним і неоднорідним. Однорідним називають поле, у якому в усіх точках простору напруженість має однакове

значення та напрямок. Прикладом такого поля є поле між двома паралельними зарядженими пластинами. У неоднорідному полі величина або напрямок напруженості змінюються залежно від положення точки у просторі.

Для наочного зображення електричного поля використовують силові лінії. Силові лінії – це уявні лінії, дотична до яких у кожній точці збігається з напрямком вектору напруженості поля. Лінії виходять із позитивно заряджених тіл і входять у негативно заряджені. Густина силових ліній характеризує величину напруженості поля: чим густіше розташовані лінії, тим сильніше поле.

Важливою характеристикою електричного поля є його потенціал. Потенціал показує, яку роботу виконує поле під час переміщення одиничного позитивного заряду з однієї точки простору в іншу. Різниця потенціалів між двома точками називається електричною напругою.

Електричні поля широко використовуються в сучасній техніці та електроніці. Принципи їх дії лежать в основі роботи конденсаторів, електродвигунів, генераторів, електронних приладів, систем передачі електроенергії та багатьох інших пристроїв. Дослідження властивостей електричного поля має важливе значення для розвитку електротехніки, радіoeлектроніки та енергетики.

Отже, електричне поле є невід’ємною складовою електромагнітних явищ і відіграє важливу роль у процесах передачі та перетворення енергії. Розуміння основних властивостей електричного поля є необхідним для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін та принципів роботи електричних систем.

1.2 Рівняння Лапласа

Рівняння Лапласа є одним із основних диференціальних рівнянь математичної фізики, яке широко застосовується в електростатиці, теплопровідності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки. У теорії

електричного поля рівняння Лапласа використовується для опису розподілу потенціалу в областях простору, де відсутні електричні заряди.

Між напруженістю електричного поля та потенціалом існує залежність:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.2)$$

З іншого боку, за теорією Максвелла

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1.3)$$

де ρ – густина електричного заряду. Припускаючи що у досліджуваній області заряди відсутні та беручи до уваги вирази (1.2), (1.3), матимемо:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.4)$$

Це рівняння зветься рівнянням Лапласа і описує потенціал у кожній точці простору за умови відсутності внутрішніх джерел поля. Функції, які задовольняють рівняння Лапласа, називаються гармонічними функціями.

1.3 Властивості гармонічних функцій

Гармонічні функції відіграють важливу роль у математичній фізиці, електростатиці, теорії потенціалу, гідродинаміці та багатьох інших галузях науки. Вони є розв'язками рівняння Лапласа та використовуються для опису фізичних процесів у середовищах, де відсутні внутрішні джерела або стоки енергії.

Однією з основних властивостей гармонічних функцій є властивість середнього значення. Вона полягає в тому, що значення гармонічної функції в

будь-якій точці області дорівнює середньому арифметичному значенню функції на поверхні сфери з центром у цій точці.

Ця властивість має важливе фізичне значення. Наприклад, потенціал електростатичного поля у беззарядній області визначається не локальними джерелами, а розподілом потенціалу на межах області.

Гармонічна функція не може мати локального максимуму або мінімуму всередині області, якщо вона не є сталою функцією. Найбільше та найменше значення гармонічної функції досягаються лише на межі області.

Ця властивість називається принципом максимуму. Вона широко використовується під час аналізу електричних полів і перевірки правильності чисельних розрахунків.

Рівняння Лапласа є лінійним диференціальним рівнянням. Тому будь-яка лінійна комбінація гармонічних функцій також буде гармонічною. Ця властивість дозволяє будувати складні розв'язки на основі простіших функцій і широко використовується в методах математичного моделювання.

Гармонічні функції є аналітичними, тобто вони можуть бути представлені у вигляді степеневого ряду. Це означає, що функція є нескінченно диференційованою в області гармонічності. Аналітичність забезпечує високу точність чисельних методів та спрощує дослідження поведінки функції у складних геометричних областях.

У двовимірному випадку гармонічна функція може бути дійсною частиною аналітичної функції комплексної змінної. При цьому існує спряжена гармонічна функція, градієнти якої взаємно ортогональні. Ця властивість широко застосовується у методах конформних перетворень для розрахунку електричних і магнітних полів у складних областях.

Теорема єдиності розв'язку є однією з основних теорем теорії потенціалу та математичної фізики. Вона має важливе значення при розв'язуванні задач електростатики, оскільки гарантує, що за заданих граничних умов існує лише один розподіл потенціалу, який задовольняє рівняння Лапласа або Пуассона.

Властивості гармонічних функцій мають велике значення для інженерних розрахунків та комп'ютерного моделювання. На їх основі створюються математичні моделі електричних полів, систем теплообміну та інших фізичних процесів.

Отже, гармонічні функції є важливим елементом математичного апарату теорії потенціалу та електростатики. Їхні властивості забезпечують можливість точного опису фізичних полів і створюють основу для аналітичних та чисельних методів розв'язування прикладних задач у сучасній науці та техніці.

1.4 Електричний струм та його характеристики

Електричний струм - це напрямлений рух заряджених частинок. Для виникнення й існування електричного струму необхідна наявність вільних заряджених частинок та електричного поля, дія якого створює й підтримує їхній напрямлений рух.

Основними умовами існування електричного струму є: наявність вільних заряджених частинок; наявність джерела струму, що створює електричне поле, дія якого зумовлює впорядкований рух вільних заряджених частинок; замкненість електричного кола, що забезпечує циркуляцію вільних заряджених частинок.

Сила струму - це фізична величина, що характеризує електричний струм і чисельно дорівнює заряду, який проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу. Силу струму позначають символом I та визначають за формулою:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (1.5)$$

де q - заряд, який проходить через поперечний переріз провідника за час t .
Одиниця сили струму в СІ - ампер: $I = 1 \text{ А}$.

Електрична напруга на ділянці кола - це фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі електричного поля з переміщення одиничного позитивного заряду по цій ділянці. Напругу позначають символом U і в загальному випадку визначають за формулою:

$$U = \frac{A}{q}, \quad (1.6)$$

де A - робота, яку виконує (або може виконати) електричне поле з переміщення заряду q по даній ділянці кола.

Електричний опір – це фізична величина, яка характеризує властивість провідника протидіяти проходженню електричного струму. Одиниця електричного опору в СІ – Ом. Опір провідника, який має незмінний поперечний переріз, дорівнює:

$$R = \rho \cdot \left(\frac{l}{S} \right), \quad (1.7)$$

де ρ - питомий опір речовини, з якої виготовлений провідник; l - довжина провідника; S - площа поперечного перерізу провідника.

Здатність речовини проводити струм пов'язана з двома обставинами. По-перше, вона залежить від того, скільки в 1 см³ речовини міститься частинок, що переносять заряди, – електронів чи іонів. Ця величина називається концентрацією носіїв заряду. По-друге, вона залежить від рухливості носіїв заряду, тобто від того, з якою швидкістю переміщуються носії при напруженості поля, що складає .

Чим більше концентрація носіїв і чим вони рухливіші, тим менше опір речовини. В металах концентрація носіїв (вільних електронів) дуже велика: приблизно на 1 атом метала приходить 1 вільний електрон. В електролітах концентрація носіїв – додатних і від'ємних іонів – набагато менша, ніж концентрація вільних електронів в металах. Крім того, рухливість електронів

в металах (особливо, в чистих металах, кристалічна гратка яких не спотворена атомами домішок), набагато більша рухливості іонів в електролітах. Тому питомий опір металів значно менше, ніж електролітів. В ізоляторах носії зарядів або відсутні (немає ні вільних електронів, ні іонів) або рухливість носіїв (іонів) близька до нуля.

Якщо наявність струму в речовині не впливає ні на концентрацію носіїв, ні на їх рухливість, то питомий опір речовини, а отже, і опір провідника не залежить від струму. В цьому випадку закон Ома добре справджується. Прикладами таких речовин є метали та електроліти [1].

1.5 Висновки

У оглядовій частині дипломної роботи було розглянуто основні теоретичні положення, що стосуються електричного поля, рівняння Лапласа, властивостей гармонічних функцій та електричного струму. Проведений аналіз показав, що електричне поле є однією з фундаментальних форм матерії, через яку здійснюється взаємодія між зарядженими частинками. Основними характеристиками електричного поля є напруженість і потенціал, які визначають енергетичні та силові властивості поля.

Було встановлено, що для опису електростатичних процесів у беззарядних областях використовується рівняння Лапласа, яке є одним із базових рівнянь математичної фізики. Розв'язки цього рівняння – гармонічні функції – мають важливі властивості, зокрема властивість середнього значення, принцип максимуму, лінійність та аналітичність. Дані властивості забезпечують можливість точного математичного опису електростатичних полів і створюють основу для застосування аналітичних та чисельних методів моделювання.

Розглянута теорема єдиності розв'язку підтверджує, що за заданих граничних умов розподіл потенціалу визначається однозначно. Це має важливе практичне значення для інженерних розрахунків, оскільки гарантує

достовірність результатів моделювання електричних полів.

Також у роботі було проаналізовано поняття електричного струму та його основні характеристики: силу струму, напругу та електричний опір. Встановлено, що проходження струму в провідниках залежить від концентрації та рухливості носіїв заряду, а електричний опір визначається фізичними властивостями матеріалу та геометричними параметрами провідника. Розглянуто фізичну природу провідності металів, електролітів та ізоляторів, а також умови виконання закону Ома.

Отже, проведений огляд теоретичних основ дозволяє сформулювати необхідну наукову базу для подальшого дослідження електричних процесів, математичного моделювання електричних полів та аналізу характеристик електротехнічних систем. Отримані теоретичні відомості є основою для виконання практичної та розрахункової частин дипломної роботи.

2 МЕТОДИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Вступні зауваження

Г-подібна провідна пластина є геометричною конфігурацією, що часто трапляється в інженерних застосуваннях, де розподіл струму, тепловідведення та електричний опір є критично важливими чинниками. Точне обчислення її опору постійному струму (DC) є необхідним для моделювання протікання струму в нерегулярних геометріях, для яких стандартні аналітичні формули для прямолінійних провідників є непридатними. Зазвичай, це потребує застосування чисельних методів, таких як метод скінченних елементів, конформне відображення або моделювання методом Монте-Карло [2].

Г-подібні провідні доріжки широко використовуються для передавання сигналів і розподілу живлення в компактних електронних схемах. Знання величини DC-опору дає змогу оцінювати падіння напруги, теплові втрати та загальну надійність системи. У застосуваннях із великими струмами такий аналіз допомагає запобігати локальному перегріванню та електроміграції в кутових ділянках із підвищеною густиною струму [3].

У мікроелектроніці Г-подібні резистори з полікремнію або металевих плівок застосовують для оптимізації використання площі кристала. Точний розрахунок опору є вкрай важливим для налаштування параметрів аналогових схем і сенсорів, а також для контролю технологічного процесу під час виробництва напівпровідників, де поверхневий опір є одним із ключових показників якості тонких плівок. Подібні міркування стосуються й вбудованих резисторів у LTCC-підкладках (low-temperature co-fired ceramic - низькотемпературна сумісно випалювана кераміка), що використовуються в конструкціях сенсорів та підсилювачів.

Г-подібна пластина також слугує базовою моделлю для дослідження впливу геометричних параметрів, таких як кут і довжина сегментів, на контактний опір. У прикладному електромагнетизмі Г-подібні заземлювальні

електроди використовуються для поліпшення розтікання струму в ґрунті. Крім того, Г-подібні конфігурації електродів зустрічаються в електростатичних системах - наприклад, у компактних відхилювальних масивах синхронних струменевих принтерів, де перекривні Г-подібні межі визначають розподіл електричного поля [4,5].

З теоретичного точки зору Г-подібні області є еталонною задачею для перевірки чисельних та аналітичних методів теорії потенціалу. Задача Лапласа в такій області може бути розв'язана за допомогою інтегральних формулювань із сингулярними функціями, тоді як розподіл заряду може аналізуватися за допомогою алгоритмів Монте-Карло останнього проходження. Електрокінетичний транспорт у Г-подібних мікроканалах під дією постійного електричного поля також був предметом численних експериментальних і теоретичних досліджень, що демонструє широку релевантність цієї геометрії в різних фізичних та інженерних контекстах [6, 7].

Дуже часто неосвічені науковці намагаються обчислити опір Г-подібної пластини, замінюючи її випрямленим аналогом і застосовуючи відомі формули для прямолінійного провідника зі струмом. Насправді ж електричне поле в такій пластині є неоднорідним і змінюється від точки до точки як за величиною, так і за напрямком. Водночас, часто лунають питання про те, яким чином відхилення від однорідності поля мають впливати на обчислення електричного опору. Деякі аспекти цієї проблеми вже розглядалися в науково-технічній літературі [8, 9, 10].

Нижче ми дослідимо електричні властивості Г-подібної провідної пластини. Розгляд цієї задачі є актуальним для реальних друкованих плат (РСВ) та інтегральних схем, де провідні доріжки часто мають прямі кути. Це також важливо для розрахунків опору тонкоплівкових контактів [11, 12, 13].

2.2 Постановка задачі. Двовимірне рівняння Лапласа та крайові умови

Розглянемо Г-подібну провідну пластину сталої товщини t з однорідним питомим опором ρ . Кожне з двох однакових плечей має довжину $L/2$ і ширину a ($a \leq L/2$). Між двома кінцями пластини прикладено сталу напругу V , як показано на рис. 2.1. Оскільки товщина пластини є малою порівняно з її розмірами в площині, задачу можна розглядати як двовимірну.

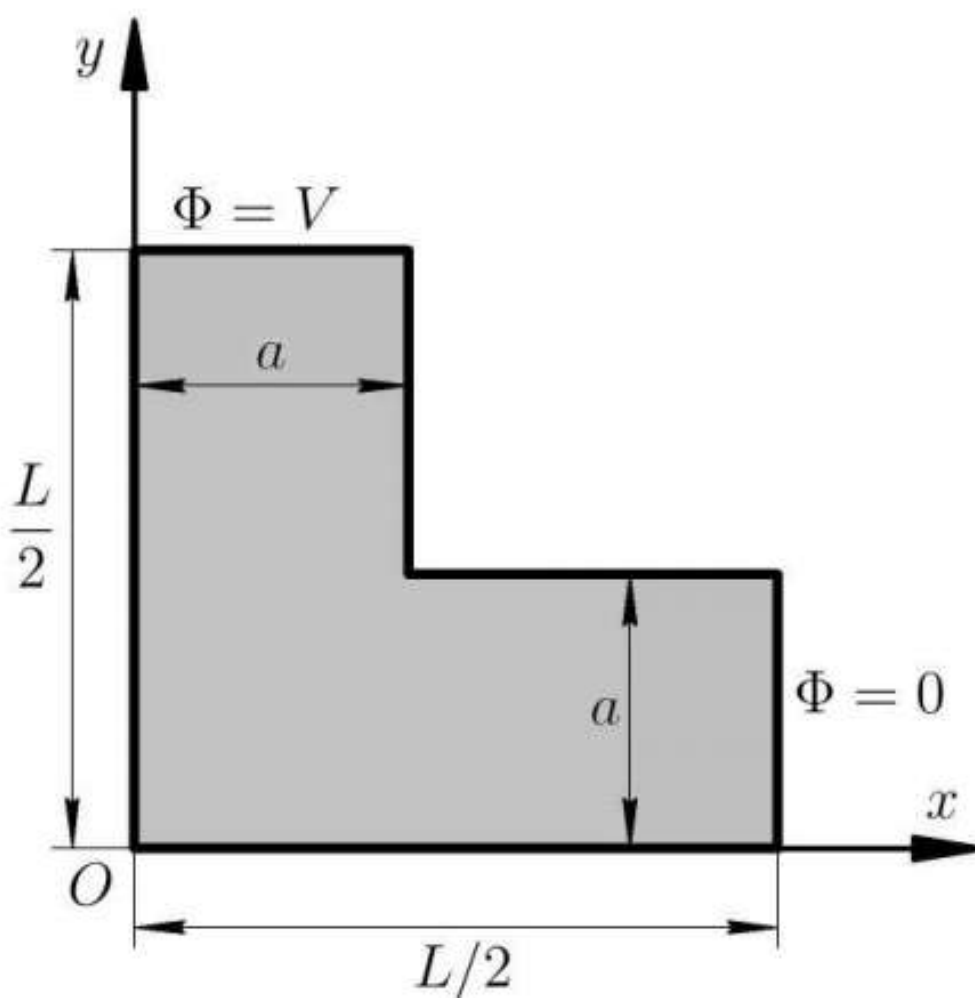


Рисунок 2.1 – Геометрія задачі

У стаціонарному режимі постійного струму накопичення заряду всередині провідника відсутнє. Тому електричний потенціал $\Phi(x, y)$ задовольняє двовимірному рівнянню Лапласа:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Граничні умови безпосередньо впливають із фізичних обмежень, накладених на систему. Два кінці пластини підтримуються при фіксованих значеннях електричного потенціалу, що призводить до граничних умов Діріхле:

$$\Phi(L/2, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq a), \quad (2.2)$$

$$\Phi(x, L/2) = V \quad (0 \leq x \leq a), \quad (2.3)$$

Усі інші межі є електрично ізолюваними. Це означає, що через бічні поверхні не протікає струм і, відповідно, нормальна компонента напруженості електричного поля на цих межах обертається в нуль. Використовуючи співвідношення $\vec{E} = -\nabla\Phi$, цю умову можна записати у вигляді граничної умови Неймана:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = 0, \quad (2.4)$$

де $\vec{n}$ – зовнішній нормальний вектор до межі.

Хоча наш аналіз стосується двовимірного наближення, отримані результати однаковою мірою є застосовними й до товстої провідної пластини з електрично ізолюваними верхньою та нижньою поверхнями. У цьому випадку граничні умови Неймана забезпечують однорідність потенціалу вздовж товщини, а тривимірна задача точно зводиться до двовимірної.

2.3 Методика розрахунку електричного опору пластинки

Після визначення електричного потенціалу електричне поле всередині пластини знаходиться як:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (2.5)$$

Його модуль задається виразом:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.6)$$

Густина струму пов'язана з електричним полем диференціальною формою закону Ома:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (2.7)$$

Повний струм, що протікає через пластину, можна отримати інтегруванням нормальної компоненти густини струму за довільним поперечним перерізом, який з'єднує два електроди:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.8)$$

У стаціонарному режимі постійного струму закон збереження заряду приводить до умови $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, а отже, повний струм I не залежить від конкретного вибору поперечного перерізу S .

Для зручності обчислимо струм на межі $x = L/2$ де електричний потенціал є фіксованим і дорівнює нулю. У цій області екіпотенціальні лінії

перпендикулярні до межі, а електричне поле є строго паралельним до осі x . Внаслідок цього внесок у струм дає лише x -компонента електричного поля.

Беручи до уваги сталу товщину пластини t , вираз для струму набуває вигляду:

$$I = -\frac{t}{\rho} \int_0^a \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} dy. \quad (2.9)$$

Тоді електричний опір Γ -подібної пластини знайдеться як:

$$R = \frac{V}{I}. \quad (2.10)$$

2.4 Метод скінчених елементів

Метод скінчених елементів (МСЕ) – це популярний метод числового розв'язання диференціальних рівнянь, що виникають в інженерії та математичному моделюванні. Типові проблемні області, що представляють інтерес, включають традиційні галузі структурного аналізу, теплопередачі, потоку рідини, масо-переносу та електромагнітного потенціалу. Для виконання необхідних розрахунків зазвичай використовуються комп'ютери. Завдяки високошвидкісним суперкомп'ютерам можна досягти кращих рішень, і вони часто потрібні для вирішення найбільших і найскладніших проблем.

МСЕ – це загальний числовий метод розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними у дво- або три-просторових змінних (тобто деяких крайових задач). Також існують дослідження щодо використання МСЕ для розв'язання багатовимірних задач. Для розв'язання задачі МСЕ поділяє велику систему на менші, простіші частини, які називаються скінченими елементами. Це досягається за допомогою певної дискретизації простору у вимірах простору, яка реалізується шляхом побудови сітки об'єкта: числової

області для розв'язку, яка має скінченну кількість точок. Формулювання крайової задачі за допомогою МСЕ зрештою призводить до системи алгебраїчних рівнянь. Метод апроксимує невідому функцію над областю визначення.[3] Прості рівняння, що моделюють ці скінченні елементи, потім збираються в більшу систему рівнянь, яка моделює всю задачу. Потім МСЕ апроксимує розв'язок, мінімізуючи пов'язану з нею функцію похибки за допомогою варіаційного числення.

Поділ цілої області на простіші частини має кілька переваг:

- точне відображення складної геометрії;
- включення різномірних властивостей матеріалів;
- легке представлення повного рішення;
- захоплення локальних ефектів.

Типовий підхід щодо використання методу включає такі кроки:

1. Розділення області задачі на набір під-доменів, причому кожна під-домен представлений набором рівнянь елементів для вихідної задачі.
2. Систематичне рекомбінування всіх наборів рівнянь елементів у глобальну систему рівнянь для остаточного розрахунку.

Глобальна система рівнянь використовує відомі методи розв'язання та може бути обчислена з початкових значень вихідної задачі для отримання числової відповіді.

На першому кроці вище, елементарні рівняння – це прості рівняння, які локально апроксимують вихідні складні рівняння, що досліджуються, де вихідні рівняння часто є диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДЧП). Для пояснення апроксимації цього процесу зазвичай вводиться метод скінченних елементів (МСЕ) як окремий випадок методу Гальоркіна. Процес, мовою математики, полягає в побудові інтеграла від скалярного добутку залишку та вагових функцій; потім встановленні інтеграла рівним нулю. Простими словами, це процедура, яка мінімізує похибку апроксимації шляхом підгонки пробних функцій до ДЧП. Залишок – це

похибка, спричинена пробними функціями, а вагові функції – це поліноміальні апроксимаційні функції, які проєктують залишок. Процес виключає всі просторові похідні з ДЧП, таким чином апроксимуючи ДЧП локально за допомогою наступного:

- набір алгебраїчних рівнянь для задач стаціонарного стану;
- набір звичайних диференціальних рівнянь для задач перехідних процесів.

Ці набори рівнянь є елементарними рівняннями. Вони є лінійними, якщо базове диференціальне рівняння в часткових похідних є лінійним, і навпаки. Набори алгебраїчних рівнянь, що виникають у стаціонарних задачах, розв'язуються за допомогою числових лінійно-алгебраїчних методів. На відміну від цього, набори звичайних диференціальних рівнянь, що виникають у перехідних задачах, розв'язуються числовим інтегруванням з використанням стандартних методів, таких як метод Ейлера або методи Рунге-Кутти.

На другому кроці, описаному вище, глобальна система рівнянь генерується з рівнянь елементів шляхом перетворення координат з локальних вузлів під-доменів у глобальні вузли домену. Це просторове перетворення включає відповідні коригування орієнтації, що застосовуються стосовно опорної системи координат. Процес часто виконується за допомогою програмного забезпечення МСЕ з даними координат, згенерованими з під-доменів.

Хоча важко назвати дату винаходу методу скінченних різниць (МСЕ), цей метод виник з необхідності вирішення складних задач пружності та структурного аналізу в цивільному та авіаційному будівництві.[7] Його розвиток можна простежити до робіт Олександра Хреннікова та Річарда Куранта на початку 1940-х років. Ще одним піонером був Іоанніс Аргіріс. У СРСР впровадження практичного застосування МСЕ зазвичай пов'язують з Леонардом Оганесяном. Він також був незалежно перевідкритий у Китаї Фен Кангом наприкінці 1950-х та на початку 1960-х років на основі розрахунків

конструкцій дамб, де його називали «методом скінченних різниць», що базується на принципах варіації. Хоча підходи, що використовуються цими піонерами, різні, вони мають одну спільну суттєву характеристику: дискретизацію сітки безперервної області на набір дискретних під-доменів, які зазвичай називають елементами.

Різні спеціалізації в рамках дисципліни машинобудування (такі як авіаційна, біомеханічна та автомобільна промисловість) зазвичай використовують інтегрований метод скінченних елементів (МСЕ) у проектуванні та розробці своєї продукції. Кілька сучасних пакетів МСЕ включають специфічні компоненти, такі як теплові, електромагнітні, рідинні та структурні робочі середовища. У структурному моделюванні МСЕ надзвичайно допомагає у створенні візуалізації жорсткості та міцності, а також мінімізації ваги, матеріалів та витрат.

Цей потужний інструмент проектування значно покращив як стандарт інженерних конструкцій, так і методологію процесу проектування в багатьох промислових застосуваннях. Впровадження методу скінченних елементів (МСЕ) суттєво скоротило час проходження продукції від концепції до виробничої лінії. Тестування та розробка були прискорені головним чином завдяки вдосконаленню початкових прототипів за допомогою МСЕ. Таким чином, переваги МСЕ включають підвищену точність, покращене проектування та краще розуміння критичних параметрів проектування, віртуальне прототипування, меншу кількість прототипів обладнання, швидший та менш дорогий цикл проектування, підвищення продуктивності та збільшення доходів.

У 1990-х роках метод скінченних елементів (МСЕ) був запропонований для використання в стохастичному моделюванні для чисельного розв'язання моделей ймовірностей [14], а пізніше для оцінки надійності. МСЕ широко застосовується для апроксимації диференціальних рівнянь, що описують фізичні системи. Цей метод дуже популярний у середовищі обчислювальної гідродинаміки, і існує багато застосувань для розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса

за допомогою МСЕ.[15, 16, 17] Останнім часом застосування МСЕ зростає в дослідженнях обчислювальної плазми. Були запропоновані перспективні числові результати з використанням МСЕ для магнітогідродинаміки, рівняння Власова та рівняння Шрьодінгера.

2.5 Висновки

У цьому розділі розглянуто методичні основи дослідження електричного опору Г-подібної провідної пластини в режимі постійного струму. Показано, що через складну геометрію провідника розподіл електричного потенціалу та густини струму є неоднорідним, тому використання спрощених формул для прямолінійних провідників не забезпечує достатньої точності результатів.

Сформульовано математичну постановку задачі на основі двовимірного рівняння Лапласа для електричного потенціалу з відповідними граничними умовами Діріхле та Неймана. Обґрунтовано застосування двовимірного наближення для тонкої провідної пластини та наведено вирази для визначення електричного поля, густини струму, повного струму й електричного опору досліджуваної структури.

Встановлено, що визначення повного струму через інтегрування нормальної компоненти густини струму дозволяє коректно врахувати неоднорідність електричного поля в області прямого кута. Отримані співвідношення створюють основу для подальшого чисельного аналізу розподілу потенціалу та опору Г-подібної пластини.

Окрему увагу приділено методу скінченних елементів як ефективному чисельному інструменту для розв'язання крайових задач електропровідності. Розглянуто основні принципи МСЕ, етапи дискретизації області, побудови системи алгебраїчних рівнянь та отримання наближеного розв'язку. Показано, що метод скінченних елементів забезпечує можливість точного врахування

складної геометрії, локальних ефектів і неоднорідного розподілу фізичних величин.

Таким чином, сформована методична база дозволяє перейти до чисельного моделювання Г-подібної пластини та дослідження впливу її геометричних параметрів на величину електричного опору.

3. ДОСЛІДНИЦЬКА ЧАСТИНА

3.1 Комп'ютерна програма для проведення числових розрахунків

Оскільки для системи рівнянь (2.1)-(2.4) не існує замкненого аналітичного розв'язку, ми розв'язували її числовим методом. Числову оцінку електричного потенціалу та розподілу поля в L-подібній провідній пластині було проведено за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), застосованого до рівняння Лапласа (2.1) з граничними умовами Діріхле та Неймана. Обчислювальна область була визначена як квадрат з вирізом, а сітка була адаптивно уточнена поблизу ре-ентрантного кута та вздовж меж з фіксованими потенціалами для забезпечення числової стабільності та точності обчислення потоку. Для генерації неструктурованої сітки було використано триангуляцію Делоне, після чого для кожного трикутного елемента було зібрано локальні матриці жорсткості на основі градієнтів лінійних базисних функцій.

Глобальну розріджену лінійну систему було розв'язано за допомогою розрідженого солвер SciPy з додаванням додаткового малого діагонального члена регуляризації для запобігання сингулярності матриці жорсткості. Вся реалізація була розроблена на Python з використанням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib, що забезпечує гнучкість у роздільній здатності сітки та повну відтворюваність числових експериментів [3]. Нижче наведено програмний код, згенерований у середовищі Python:

```
Enhanced FEM solution of Laplace equation for an L-shaped conducting
plate.
```

```
Computes R* vs a/(2l) and visualizes potential distributions.
```

```
Domain: Omega = [0,1]x[0,1] \ (a,1]x(a,1]
```

```
Author: Improved version, 2025
```

```
"""
```

```

from dataclasses import dataclass
from typing import Tuple, Dict, List
import time
from pathlib import Path

```

```

import numpy as np
import scipy.sparse as sp
import scipy.sparse.linalg as spla
from scipy.spatial import Delaunay
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.tri as mtri
from matplotlib.figure import Figure

```

```

@dataclass
class MeshParams:
    """Parameters for mesh generation."""
    base_n: int = 150
    strip_n: int = 150
    corner_n: int = 120
    strip_width: float = 0.08
    corner_size: float = 0.07
    tolerance: float = 1e-9

```

```

@dataclass
class SimulationParams:
    """Global simulation parameters."""
    l: float = 0.5 # half total length (2l = 1)
    a_plot_values: List[float] = None

```

```
a_curve_values: np.ndarray = None
mesh_params: MeshParams = None
```

```
def __post_init__(self):
    if self.a_plot_values is None:
        self.a_plot_values = [0.05, 0.1, 0.3]
    if self.a_curve_values is None:
        self.a_curve_values = np.linspace(0.001, 0.15, 30)
    if self.mesh_params is None:
        self.mesh_params = MeshParams()
```

```
class LShapedMesh:
```

```
    """L-shaped domain mesh generator."""
```

```
    def __init__(self, a: float, l: float, params: MeshParams):
        self.a = a
        self.l = l
        self.params = params
        self.points: np.ndarray = None
        self.triangles: np.ndarray = None
```

```
    def generate(self) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
```

```
        """Generate refined triangular mesh."""
```

```
        points_list = []
```

```
        # Coarse background grid
```

```
        points_list.append(self._create_background_grid())
```

```
        # Vertical refinement strip near  $x = l$ 
```

```

points_list.append(self._create_vertical_strip())

# Horizontal refinement strip near y = l
points_list.append(self._create_horizontal_strip())

# Corner refinement around (a, a)
points_list.append(self._create_corner_refinement())

# Combine and clean points
points = np.vstack(points_list)
points = self._remove_invalid_points(points)
points = self._remove_duplicates(points)

# Generate triangulation
triangles = self._triangulate(points)

self.points = points
self.triangles = triangles
return points, triangles

def _create_background_grid(self) -> np.ndarray:
    """Create coarse background grid."""
    xs = np.linspace(0.0, self.l, self.params.base_n)
    ys = np.linspace(0.0, self.l, self.params.base_n)
    X, Y = np.meshgrid(xs, ys)
    return np.column_stack([X.ravel(), Y.ravel()])

def _create_vertical_strip(self) -> np.ndarray:
    """Create vertical refinement strip near x = l."""
    x0 = max(0.0, self.l - self.params.strip_width)

```

```

x_strip = np.linspace(x0, self.l, self.params.strip_n)
y_max = min(self.l, self.a + 0.03 + 0.25 * self.a)
n_y = max(40, int(self.params.strip_n * 0.6))
y_strip = np.linspace(0.0, y_max, n_y)
X, Y = np.meshgrid(x_strip, y_strip)
return np.column_stack([X.ravel(), Y.ravel()])

```

```

def _create_horizontal_strip(self) -> np.ndarray:
    """Create horizontal refinement strip near y = l."""
    y0 = max(0.0, self.l - self.params.strip_width)
    y_strip = np.linspace(y0, self.l, self.params.strip_n)
    x_max = min(self.l, self.a + 0.03 + 0.25 * self.a)
    n_x = max(40, int(self.params.strip_n * 0.6))
    x_strip = np.linspace(0.0, x_max, n_x)
    X, Y = np.meshgrid(x_strip, y_strip)
    return np.column_stack([X.ravel(), Y.ravel()])

```

```

def _create_corner_refinement(self) -> np.ndarray:
    """Create refinement near corner (a, a)."""
    cx0 = max(0.0, self.a - self.params.corner_size)
    cx1 = min(self.l, self.a + self.params.corner_size)
    cy0 = max(0.0, self.a - self.params.corner_size)
    cy1 = min(self.l, self.a + self.params.corner_size)
    x_corner = np.linspace(cx0, cx1, self.params.corner_n)
    y_corner = np.linspace(cy0, cy1, self.params.corner_n)
    X, Y = np.meshgrid(x_corner, y_corner)
    return np.column_stack([X.ravel(), Y.ravel()])

```

```

def _remove_invalid_points(self, points: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Remove points inside the removed square (a,l]x(a,l]."""

```



```

tol = self.params.tolerance
mask = ~((points[:, 0] > self.a + tol) & (points[:, 1] > self.a + tol))
return points[mask]

```

```

def _remove_duplicates(self, points: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Remove duplicate points."""
    points_rounded = np.round(points, decimals=10)
    _, unique_idx = np.unique(points_rounded, axis=0, return_index=True)
    return points[np.sort(unique_idx)]

```

```

def _triangulate(self, points: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Generate Delaunay triangulation and filter invalid triangles."""
    tri = Delaunay(points).simplices

    # Remove triangles with centroids in removed square
    centers = points[tri].mean(axis=1)
    tol = self.params.tolerance
    mask = ~((centers[:, 0] > self.a + tol) & (centers[:, 1] > self.a + tol))
    return tri[mask]

```

```

class FEMSolver:

```

```

    """Finite Element Method solver for Laplace equation."""

```

```

    def __init__(self, points: np.ndarray, triangles: np.ndarray,
                  a: float, l: float, tol: float = 1e-8):
        self.points = points
        self.triangles = triangles
        self.a = a
        self.l = l

```

```

self.tol = tol
self.n_points = points.shape[0]

def assemble_stiffness_matrix(self) -> sp.csr_matrix:
    """Assemble global stiffness matrix."""
    I, J, V = [], [], []

    for element in self.triangles:
        Ke = self._element_stiffness(element)
        for i_local, i_global in enumerate(element):
            for j_local, j_global in enumerate(element):
                I.append(i_global)
                J.append(j_global)
                V.append(Ke[i_local, j_local])

    return sp.coo_matrix((V, (I, J)),
                        shape=(self.n_points, self.n_points)).tocsr()

def _element_stiffness(self, element: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Compute element stiffness matrix."""
    p = self.points[element]

    # Compute area using determinant
    mat = np.column_stack([np.ones(3), p])
    area = 0.5 * abs(np.linalg.det(mat))

    if area <= 0.0:
        return np.zeros((3, 3))

    # Shape function gradients

```

```

b = np.array([p[1, 1] - p[2, 1],
              p[2, 1] - p[0, 1],
              p[0, 1] - p[1, 1]])
c = np.array([p[2, 0] - p[1, 0],
              p[0, 0] - p[2, 0],
              p[1, 0] - p[0, 0]])

grad = np.column_stack([b, c]) / (2.0 * area)
return area * (grad @ grad.T)

def solve(self) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray, np.ndarray]:
    """Solve the system with Dirichlet boundary conditions."""
    K = self.assemble_stiffness_matrix()

    # Identify boundary nodes
    idx_phi0, idx_phi1 = self._find_boundary_nodes()
    dir_idx = np.concatenate([idx_phi0, idx_phi1])
    dir_vals = np.concatenate([
        np.zeros(len(idx_phi0)),
        np.ones(len(idx_phi1))
    ])

    # Solve reduced system
    phi = self._solve_reduced_system(K, dir_idx, dir_vals)

    return phi, idx_phi0, idx_phi1

def _find_boundary_nodes(self) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    """Find nodes on Dirichlet boundaries."""
    # phi = 0 on x = l, 0 <= y <= a

```

```

idx_phi0 = np.where(
    (np.isclose(self.points[:, 0], self.l, atol=self.tol)) &
    (self.points[:, 1] <= self.a + self.tol)
)[0]

# phi = 1 on y = l, 0 <= x <= a
idx_phi1 = np.where(
    (np.isclose(self.points[:, 1], self.l, atol=self.tol)) &
    (self.points[:, 0] <= self.a + self.tol)
)[0]

return idx_phi0, idx_phi1

def _solve_reduced_system(self, K: sp.csr_matrix,
                          dir_idx: np.ndarray,
                          dir_vals: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Solve system after eliminating Dirichlet DOFs."""
    free = np.setdiff1d(np.arange(self.n_points), dir_idx)

    if free.size == 0:
        phi = np.zeros(self.n_points)
        phi[dir_idx] = dir_vals
        return phi

    Kff = K[free][:, free].tocsr()
    Kfd = K[free][:, dir_idx].tocsr()
    rhs_f = -Kfd @ dir_vals

    phi_f = spla.spsolve(Kff, rhs_f)

```

```

phi = np.zeros(self.n_points)
phi[free] = phi_f
phi[dir_idx] = dir_vals
return phi

```

```

class FluxIntegrator:

```

```

    """Compute flux integrals on boundaries."""

```

```

    def __init__(self, points: np.ndarray, triangles: np.ndarray,
                  phi: np.ndarray):
        self.points = points
        self.triangles = triangles
        self.phi = phi
        self.gradients, self.areas = self._compute_gradients()
        self.edge_map = self._build_edge_map()

```

```

    def _compute_gradients(self) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:

```

```

        """Compute gradient per triangle."""

```

```

        n_tri = self.triangles.shape[0]
        grads = np.zeros((n_tri, 2))
        areas = np.zeros(n_tri)

```

```

        for k, element in enumerate(self.triangles):

```

```

            p = self.points[element]

```

```

            mat = np.column_stack([np.ones(3), p])
            area = 0.5 * abs(np.linalg.det(mat))
            areas[k] = area

```

```
if area <= 0.0:
```

```
    continue
```

```
b = np.array([p[1, 1] - p[2, 1],
```

```
              p[2, 1] - p[0, 1],
```

```
              p[0, 1] - p[1, 1]])
```

```
c = np.array([p[2, 0] - p[1, 0],
```

```
              p[0, 0] - p[2, 0],
```

```
              p[1, 0] - p[0, 0]])
```

```
gradN = np.column_stack([b, c]) / (2.0 * area)
```

```
grads[k] = self.phi[element] @ gradN
```

```
return grads, areas
```

```
def _build_edge_map(self) -> Dict[Tuple[int, int], List[int]]:
```

```
    """Map edges to adjacent triangles."""
```

```
    edge_map = {}
```

```
    for t_idx, element in enumerate(self.triangles):
```

```
        edges = [(element[0], element[1]),
```

```
                  (element[1], element[2]),
```

```
                  (element[2], element[0])]
```

```
        for i, j in edges:
```

```
            key = (min(i, j), max(i, j))
```

```
            edge_map.setdefault(key, []).append(t_idx)
```

```
    return edge_map
```

```
def integrate_on_boundary(self, a: float, l: float,
```

```
    boundary: str = 'x_equals_l') -> float:
```

```
    """Integrate flux on specified boundary."""
```

```

if boundary == 'x_equals_l':
    return self._integrate_x_boundary(a, l)
raise ValueError(f"Unknown boundary: {boundary}")

def _integrate_x_boundary(self, a: float, l: float) -> float:
    """Integrate normal flux on  $x = l$ ,  $0 \leq y \leq a$ ."""
    total_flux = 0.0
    tol = 1e-8

    for (i, j), adj_tris in self.edge_map.items():
        xi, yi = self.points[i]
        xj, yj = self.points[j]

        # Check if edge is on  $x = l$ 
        if not (np.isclose(xi, l, atol=tol) and
                np.isclose(xj, l, atol=tol)):
            continue

        # Check if edge is in valid  $y$  range
        mid_y = 0.5 * (yi + yj)
        if mid_y < -tol or mid_y > a + tol:
            continue

        if not adj_tris:
            continue

        edge_length = np.hypot(xj - xi, yj - yi)
        grad_phi = self.gradients[adj_tris[0]]
        normal = np.array([1.0, 0.0]) # outward normal

```

```
total_flux += np.dot(grad_phi, normal) * edge_length
```

```
return total_flux
```

```
class ResistanceCalculator:
```

```
    """Calculate dimensionless resistance R*."""
```

```
    def __init__(self, sim_params: SimulationParams):
```

```
        self.params = sim_params
```

```
    def compute(self, a: float) -> Tuple[float, dict]:
```

```
        """Compute R* for given a."""
```

```
        t0 = time.time()
```

```
        # Generate mesh
```

```
        mesh_gen = LShapedMesh(a, self.params.l, self.params.mesh_params)
```

```
        points, triangles = mesh_gen.generate()
```

```
        # Solve FEM system
```

```
        solver = FEMSolver(points, triangles, a, self.params.l)
```

```
        phi, idx_phi0, idx_phi1 = solver.solve()
```

```
        # Compute flux
```

```
        integrator = FluxIntegrator(points, triangles, phi)
```

```
        flux = integrator.integrate_on_boundary(a, self.params.l)
```

```
        # Calculate R*
```

```
        Rstar = -a / flux if abs(flux) > 1e-16 else np.nan
```



```
elapsed = time.time() - t0
```

```
results = {
    'Rstar': Rstar,
    'flux': flux,
    'points': points,
    'triangles': triangles,
    'phi': phi,
    'n_nodes': points.shape[0],
    'n_elements': triangles.shape[0],
    'time': elapsed
}
```

```
return Rstar, results
```

```
class Visualizer:
```

```
    """Visualization utilities."""
```

```
    @staticmethod
```

```
    def plot_potential(points: np.ndarray, triangles: np.ndarray,
```

```
                        phi: np.ndarray, a: float, Rstar: float,
```

```
                        save_path: Path = None) -> Figure:
```

```
        """Plot potential distribution."""
```

```
        triang = mtri.Triangulation(points[:, 0], points[:, 1], triangles)
```

```
        fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 6))
```

```
        contour = ax.tricontourf(triang, phi, levels=60, cmap='viridis')
```

```
        cbar = plt.colorbar(contour, ax=ax, label='Φ')
```

```

ax.set_title(f'Potential  $\Phi$  for  $a/(2l)={a:.3f}$ \n $R^*={Rstar:.6f}$ ',
             fontsize=12, weight='bold')
ax.set_xlabel('x', fontsize=11)
ax.set_ylabel('y', fontsize=11)
ax.set_aspect('equal')
ax.grid(True, alpha=0.3)

```

```

plt.tight_layout()

```

```

if save_path:
    plt.savefig(save_path, dpi=300, bbox_inches='tight')

```

```

return fig

```

```

@staticmethod

```

```

def plot_resistance_curve(a_values: np.ndarray, R_values: List[float],
                          save_path: Path = None) -> Figure:

```

```

    """Plot  $R^*$  vs  $a/(2l)$  curve."""

```

```

    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

```

```

    ax.plot(a_values, R_values, '-o', markersize=5, linewidth=2,
            color='#2E86AB', markerfacecolor='#A23B72')

```

```

    ax.set_xlabel('a / (2l)', fontsize=12, weight='bold')

```

```

    ax.set_ylabel('R*', fontsize=12, weight='bold')

```

```

    ax.set_title('Dimensionless Resistance  $R^*$  vs Geometric Parameter',
                 fontsize=13, weight='bold')

```

```

    ax.grid(True, alpha=0.3, linestyle='--')

```

```

plt.tight_layout()

```

```

if save_path:
    plt.savefig(save_path, dpi=300, bbox_inches='tight')

return fig

```

```

def main():
    """Main execution function."""
    # Initialize parameters
    params = SimulationParams()
    calculator = ResistanceCalculator(params)

    # Compute and visualize sample potential fields
    print("=" * 60)
    print("Computing sample potential fields")
    print("=" * 60)

    for a_plot in params.a_plot_values:
        Rstar, results = calculator.compute(a_plot)

        print(f"\na = {a_plot:.6f}")
        print(f" R* = {Rstar:.6e}")
        print(f" Flux integral = {results['flux']:.6e}")
        print(f" Nodes = {results['n_nodes']}")
        print(f" Elements = {results['n_elements']}")
        print(f" Time = {results['time']:.2f}s")

    Visualizer.plot_potential(
        results['points'],

```

```

        results['triangles'],
        results['phi'],
        a_plot,
        Rstar
    )
    plt.show()

# Compute R*(a) curve
print("\n" + "=" * 60)
print("Computing R*(a) curve")
print("=" * 60)

R_list = []
for a in params.a_curve_values:
    Rstar, results = calculator.compute(a)
    R_list.append(Rstar)

    print(f"a = {a:.6f} -> R* = {Rstar:.6e} "
          f"(nodes={results['n_nodes']}, time={results['time']:.2f}s)")

# Plot and display curve
Visualizer.plot_resistance_curve(params.a_curve_values, R_list)
plt.show()

# Print summary
print("\n" + "=" * 60)
print("First 6 control points:")
print("=" * 60)
for a, R in zip(params.a_curve_values[:6], R_list[:6]):
    print(f"a = {a:.6f} -> R* = {R:.6e}")

```

```
if __name__ == "__main__":
    main()
```

3.2 Результати числових розрахунків

Розподіл електричного поля всередині Г-подібної пластини для різних співвідношень a/L показано на рис. 3.1.

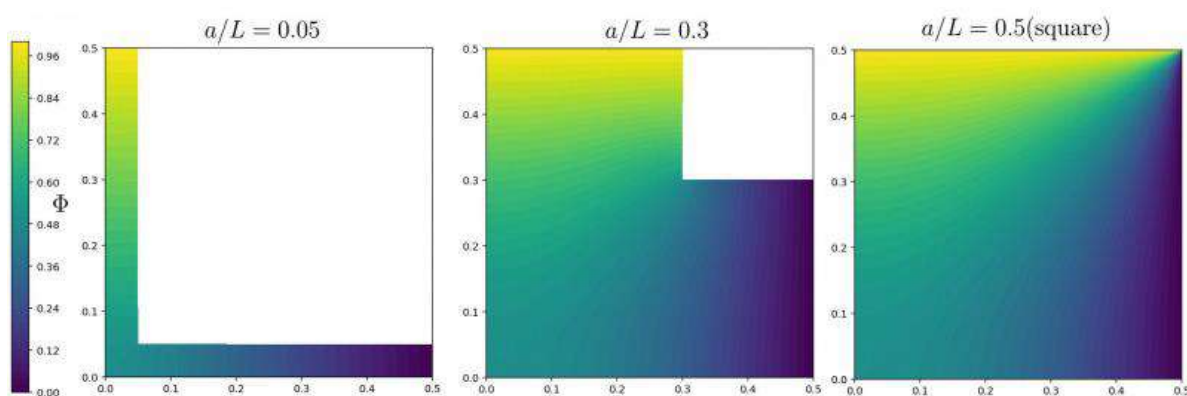


Рисунок 3.1 Результат моделювання методом скінченних елементів (МСЕ) для електричного поля в Г-подібній провідній пластині.

На рис. 3.2 зображено набір екіпотенціальних електричних ліній для тих самих випадків.

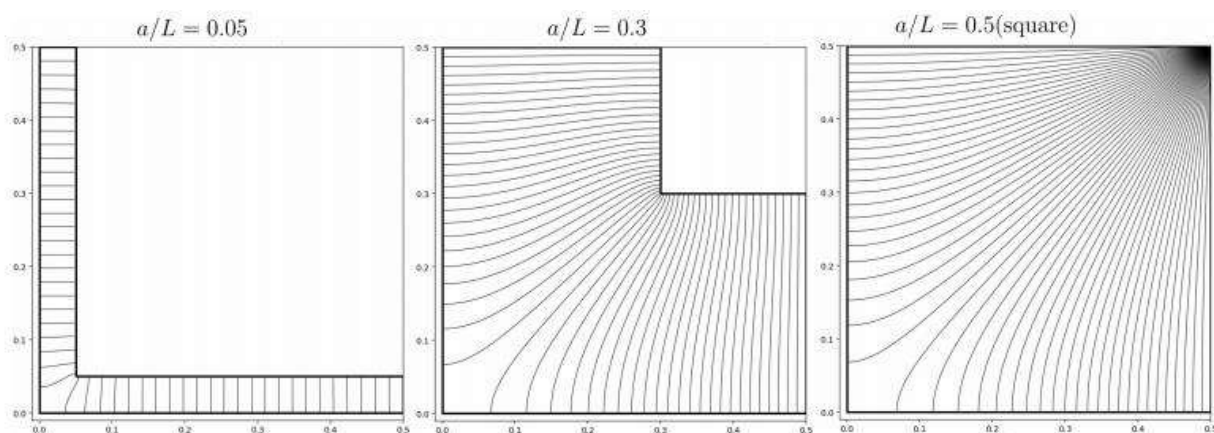


Рисунок 3.2 Набір екіпотенціальних електричних ліній у Г-подібній провідній пластині.

З рис. 3.2 слідує, що найвищі значення напруженості електричного поля відповідають внутрішньому прямому куту пластини, тоді як найнижчі значення спостерігаються для зовнішнього прямого кута. Відповідно, скупчення струму відбувається поблизу внутрішнього кута [18].

Відомо, що локальна поведінка розв'язків двовимірного рівняння Лапласа поблизу гострого кута визначається степеневою сингулярністю. У плоскій кутовій області з кутом розкриття α головний член електричного потенціалу масштабується як $\Phi \sim r^{\pi/\alpha}$, де r позначає радіальну відстань від вершини кута. Отже, величина електричного поля поводить себе як $E \sim r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ [19].

У межах нашої задачі однорідні граничні умови Неймана (2.4) накладаються на бічні ребра, а внутрішній прямий кут відповідає куту розкриття $\alpha = 3\pi/2$, що дає $E \sim r^{-1/3}$ і, отже, сингулярне електричне поле поблизу внутрішнього кута. Навпаки, зовнішній прямий кут відповідає $\alpha = \pi/2$, для якого $E \sim r$, що означає, що електричне поле зникає при наближенні до цієї вершини.

У реальних фізичних системах (наприклад, доріжках друкованої плати) дивергенцію електричного поля можна регуляризувати шляхом заокруглення внутрішнього кута. Якщо радіус кривизни внутрішнього кута стає порівнянним з товщиною пластини, перерозподіл струму стає повністю тривимірним, і двовимірна асимптотика кута більше не застосовується.

Варто порівняти вищезгадану поведінку з електростатичним випадком зарядженої провідної пластини, для якої застосовуються граничні умови Діріхле. У цій ситуації ролі двох кутів є протилежними до нашого випадку: зовнішнє електричне поле розходиться поблизу зовнішнього (опуклого) кута ($\alpha = 3\pi/2$, $E \sim r^{-1/3}$), і зникає поблизу внутрішнього (увігнутого) кута ($\alpha = \pi/2$, $E \sim r$). Це порівняння підкреслює принципово різні фізичні причини підсилення поля в стаціонарному стані протікання струму та в електростатичній рівновазі, незважаючи на те, що обидві проблеми регулюються рівнянням Лапласа.

Введемо опір випрямленої пластини, що відповідає заданій L-подібній пластині:

$$R_0 = \rho \frac{L}{at}. \quad (3.1)$$

Опорний опір R_0 відповідає значенню, яке було б отримано, розглядаючи Г-подібну пластину як еквівалентну пряму смугу шириною a та загальною довжиною L , що дорівнює сумі двох зовнішніх плечей. Цей вибір не представляє альтернативну фізичну геометрію, а скоріше наївну одновимірну оцінку, яка нехтує двовимірним перерозподілом струму. У цьому сенсі R_0 забезпечує верхню межу опорного значення, що відповідає найдовшому геометричному шляху між виводами. У будь-якому випадку, зручно нормалізувати фактичне значення опору в числових розрахунках до деякого опорного значення (наприклад, R_0).

Виявляється, що справжній опір (2.10) завжди менший за відповідний опір (3.1) (рис. 3.3).

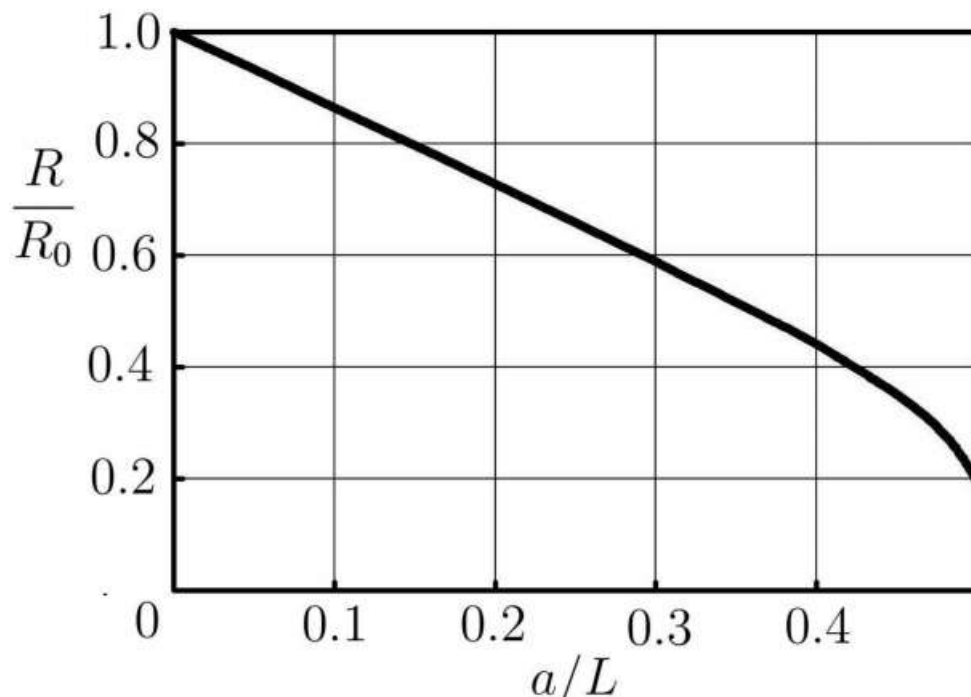


Рисунок 3.3. Залежність відносного опору R/R_0 від співвідношення сторін a/L .

$R = R_0$ лише в граничному випадку $a/L \rightarrow 0$. Зі збільшенням a/L відношення R/R_0 монотонно зменшується (рис. 3.3). Монотонне зменшення нормалізованого опору R/R_0 зі збільшенням співвідношення сторін a/L можна зрозуміти з точки зору якісної зміни структури протікання струму, викликаной геометрією. У прямому провіднику лінії електричного поля та лінії струму паралельні, а опір добре описується класичним виразом (3.1), який припускає однорідну густину струму та фіксовану довжину провідності.

На відміну від цього випадку, у Г-подібній пластині лінії електричного поля сильно викривлені, і струм розподіляється по кількох непаралельних шляхах. Це дозволяє частині струму протікати вздовж траєкторій, які фактично коротші ніж загальна геометрична довжина L , тоді як інші області діють як паралельні канали провідності. З точки зору схеми, Г-подібна геометрія поводить як комбінація паралельних шляхів струму, а не як єдиний одновимірний резистор, що природно призводить до зменшення загального опору.

Граничний випадок $a/L \rightarrow 0.5$ заслуговує на особливу увагу. У цій межі два виводи стають суміжними, а не протилежними, і конфігурація більше не відповідає звичайному двовивідному провіднику. Хоча ця ситуація фізично не реалізується як стандартне вимірювання опору, вона, тим не менш, є показовою з концептуальної точки зору. Лінії електричного поля в цій межі більше не є приблизно паралельними в будь-якій точці області, що чітко вказує на якісно інший режим протікання струму. Виражене відхилення від припущень, що лежать в основі класичної формули опору, пояснює сильне зменшення $\frac{R}{R_0}$, що спостерігається на рис. 3.3, і підкреслює, чому прості наближення для прямих провідників не працюють для провідників з різкими вигинами та великими поперечними розмірами.

3.3 Висновки

У дослідницькій частині роботи було розроблено та реалізовано числову модель розподілу електричного потенціалу і струму в Г-подібній провідній пластині на основі методу скінченних елементів. Для розв’язання рівняння Лапласа з граничними умовами Діріхле та Неймана створено програмний комплекс мовою Python із використанням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib. Реалізований алгоритм забезпечує автоматичну генерацію неструктурованої трикутної сітки з локальним адаптивним згущенням поблизу внутрішнього кута пластини, що дозволило коректно описати сингулярну поведінку електричного поля.

У результаті числового моделювання було отримано розподіли електричного потенціалу, еквіпотенціальні лінії та залежність нормалізованого опору від геометричного параметра $\frac{a}{L}$. Показано, що внутрішній увігнутий кут Г-подібної пластини спричиняє концентрацію електричного поля та густини струму, тоді як поблизу зовнішнього кута напруженість поля зменшується. Отримані результати узгоджуються з відомими асимптотичними властивостями розв’язків рівняння Лапласа у кутових областях.

Числові розрахунки показали, що фактичний електричний опір Г-подібної пластини є меншим за відповідний опір еквівалентної прямої смуги. Встановлено, що зі збільшенням співвідношення $\frac{a}{L}$ величина $\frac{R}{R_0}$ монотонно зменшується, що пояснюється двовимірним перерозподілом струму та появою множини паралельних шляхів провідності. Таким чином, класичні одновимірні оцінки опору стають недостатніми для провідників зі складною геометрією та різкими вигинами.

Отримані результати підтверджують ефективність застосування методу скінченних елементів для дослідження електропровідності областей складної форми та можуть бути використані при аналізі провідних елементів

мікроелектроніки, друкованих плат і тонкоплівкових структур, де геометричні особливості суттєво впливають на розподіл струму та локальні значення електричного поля.

4 ОХОРОНА ПРАЦІ

4.1 Загальні положення

Охорона праці – це система правових, соціально-економічних, організаційно-технічних, санітарно-гігієнічних і лікувально-профілактичних заходів та засобів, спрямованих на збереження життя, здоров'я та працездатності людини у процесі трудової діяльності.

Освітлення виробничих приміщень. Серед чинників зовнішнього середовища, що впливають на організм людини в процесі праці, світло посідає одне з перших місць. Адже відомо, що майже 90 % усієї інформації про довкілля людина одержує через органи зору. Під час здійснення будь-якої трудової діяльності втомлюваність очей, в основному, залежить від напруженості процесів, що супроводжують зорове сприйняття. До таких процесів належать адаптація, акомодация та конвергенція. Адаптація - пристосування ока до зміни умов освітлення (рівня освітленості) у полі зору.

Акомодация – пристосування ока до зрозумілого бачення предметів, що знаходяться від нього на неоднаковій відстані, за рахунок зміни кривизни кришталика.

Конвергенція – здатність ока при розгляданні близьких предметів набувати положення, при якому зорові осі обох очей перетинаються на предметі.

Часте пристосування ока до зміни умов освітлення (адаптація), наявність різких тіней у полі зору, засліплювальна дія яскравих джерел світла втомлюють око, знижують його захисну реакцію - око втрачає контрастну чутливість і гостроту зору. Це може спричинити професійні захворювання та сприяти зростанню кількості нещасних випадків, оскільки тривалість процесу адаптації ока залежно від різниці яскравостей може тривати 2-3 хв, при цьому в перший момент людина практично нічого не бачить.

Світло впливає не лише на функцію органів зору, а й на діяльність

організму в цілому. У разі поганого освітлення людина швидко втомлюється, працює менш продуктивно, зростає потенційна небезпека помилкових дій і нещасних випадків. Згідно зі статистичними даними, до 5 % травм можна пояснити недостатнім або нераціональним освітленням, а в 20% воно сприяло виникненню травм. Врешті, погане освітлення може призвести до професійних захворювань, наприклад, таких як робоча міопія (короткозорість, спазм акомодатції).

Для створення оптимальних умов зорової роботи слід урахувати не лише кількість та якість освітлення, а й кольорове оточення. Так, при світлому пофарбуванні інтер'єру завдяки збільшенню кількості відбитого світла рівень освітленості підвищується на 20-40 % (при тій же потужності джерел світла), різкість тіней зменшується, покращується рівномірність освітлення. При надмірній яскравості джерел світла та предметів, що знаходяться у полі зору, може статися засліплення працівника. Нерівномірність освітлення та неоднакова яскравість навколишніх предметів призводять до частоті переадаптації очей під час виконання роботи і, як наслідок цього, - до швидкого втомлення органів зору.

Тому поверхні, що добре освітлюються і перебувають у полі зору, краще фарбувати в кольори середньої світлості, коефіцієнт відбиття яких знаходиться в межах 0,3-0,6; бажано, щоб вони мали матову або напівматову поверхню [20].

4.2 Вимоги до штучного освітлення

Для створення сприятливих умов для здорової роботи, які б запобігали швидкій втомлюваності очей, виникненню професійних захворювань, нещасних випадків і сприяли підвищенню продуктивності праці та якості продукції, освітлення повинно відповідати наступним вимогам:

- створювати на робочій поверхні освітленість, що відповідає характеру зорової роботи і не є нижчою за встановлені норми;

- забезпечити достатню рівномірність та постійність рівня освітленості у виробничих приміщеннях, щоб уникнути частої переадаптації органів зору;
- не створювати засліплювальної дії як від самих джерел освітлення, так і від інших предметів, що знаходяться в полі зору;
- не створювати на робочій поверхні різних та глибоких тіней (особливо рухомих);
- повинен бути достатній для розрізнення деталей контраст поверхонь, що освітлюються;
- не створювати небезпечних та шкідливих виробничих чинників (шум,
- теплові випромінювання, небезпека уражений струмом, пожежо- та
- вибухонебезпеки світильників);
- повинно бути надійним і простим у експлуатації, економічним та
- естетичним.

4.3. Штучне освітлення. Системи і види освітлення

Системи освітлення. Залежно від способу розміщення світильників розрізняють системи загального і комбінованого освітлення. Система загального освітлення призначена для освітлення всього приміщення в цілому. При цьому використовують два способи розміщення світильників - рівномірне і локалізоване. При рівномірному розміщенні світильники встановлюються рядами з однаковими відстанями між ними. При локальному освітленні, коли необхідно створити підвищену освітленість окремих ділянок, світильники тут встановлюються більш зосереджено, причому допускається зміна типу світильників, зменшення висоти їх підвішування, збільшення потужності ламп, тощо. Локалізоване освітлення застосовується в цехах, де робота вимагає підвищеної напруги зорової роботи. На ділянках цеху, де виконуються допоміжні операції, освітленість може бути значно знижена. Перевага локалізованого освітлення полягає в скороченні загальної потужності

освітлювальних установок, можливості створити необхідні напрямки: світлового потоку, уникнути на робочих місцях тіней від виробничого обладнання та самих працюючих. До недоліків слід віднести нерівномірність розподілу яскравості освітлюваних поверхонь.

З рівномірно розподіленим по площі обладнанням, в більшості цехів застосовується рівномірне освітлення. При комбінованому освітленні в приміщеннях передбачаються загальне і місцеве освітлення з установкою світильників на робочих місцях в безпосередній близькості від робочої зони. Застосування одного місцевого освітлення в приміщенні без загального забороняється з огляду на те, що при цьому створюється вкрай несприятливий розподіл яскравості, що приводить до погіршення умов зорової роботи, стомленню і псуванню зору. Система комбінованого освітлення застосовується в приміщеннях, де виконуються зорові роботи, що характеризуються розрядами I-IV, Va і Vб (ДБН В.2.5-28:2018).

Освітлення вважається комбінованим, якщо освітлення є тільки на окремих ізольовано розташованих місцях.

Види освітлення. На промислових підприємствах застосовують два види освітлення - робоче і аварійне. Робоче освітлення створює необхідні умови роботи при нормальному режимі експлуатації будівлі.

Аварійне освітлення проектується для того, щоб в разі виходу з ладу робочого освітлення дати можливість в одних приміщеннях продовжувати роботу при зниженій освітленості, в інших - здійснити евакуацію людей. З огляду на високі капітальні та експлуатаційні витрати аварійного освітлення встановлена найменша допустима освітленість робочих поверхонь, що вимагають обслуговування при аварійному освітленні. Аварійне освітлення має становити не менше 5% від робочого освітлення, але не менше 2 лк.

Аварійне освітлення встановлюється в приміщеннях, в яких раптове відхилення робочого освітлення може призвести до тяжких наслідків для людей і виробничого обладнання, а також в цехах з безперервним технологічним циклом, порушення якого неприпустимо.

Джерела світла. Для джерел світла, які використовують у виробничих будівлях, найбільш важливе значення мають такі показники:

- Світлова віддача, тобто випромінюючий світловий потік на одиницю споживаної потужності, лм/Вт, світлова віддача характеризує енергетичну економічність джерела світла
- Тривалість горіння ламп.
- Одинична потужність ламп.
- Кольоровість випромінювання (тобто спектральний склад світла) має вирішальне значення при виборі джерел світла, де потрібна правильна передача кольору.

Джерела світла, що застосовуються для штучних освітлень, поділяються на дві групи - газорозрядні лампи та лампи розжарювання.

У газорозрядних лампах видиме випромінювання викликається електричним розрядом в атмосфері різних газів і парів при різноманітному тиску з використанням в деяких типах спеціальних складів - люмінофорів, що перетворюють невидиме ультрафіолетове випромінювання газового розряду в видиме світло.

Світлова віддача (50-60 лм/Вт) і тривалість горіння (4-10 тис.год.) газорозрядних ламп значно вище, ніж у ламп розжарювання, завдяки чому вони отримали широке застосування в промисловості. Близько 80% світового потоку освітлювальних установок виробничих будівель в країні створюється газорозрядними лампами.

У той же час вони мають і недоліки:

- газорозрядні лампи не можна включати в мережу безпосередньо, а тільки зі спеціальними пуско-регулюючими пристосуваннями;
- при горінні усі газорозрядні лампи створюють перешкоди радіоприйому і точним електричним вимірам;
- усі газорозрядні лампи чутливі до зниження напруги в мережі.

Найбільшого поширення набули люмінесцентні лампи ЛБ, ЛХБ, ЛД,

ЛДЦ, ЛБР потужністю від 40, 65, 80 і 150 Вт. і лампи типу ДРЛ потужністю 250, 400, 700, 1000 і 2000 Вт. В стадії розробки і освоєння знаходяться більш економічні газорозрядні металогалоїдні лампи типу ДРІ та натрієві лампи високого тиску типу ДНаТ. Вони випускаються потужністю 250, 400, 700, 1000 і потужністю 2000 Вт. Світлова віддача цих ламп становить 90-120 лм/Вт.

Лампи розжарювання. У лампах розжарювання видиме випромінювання виходить в результаті нагрівання електричним струмом вольфрамової нитки. Лампа розжарювання відрізняється відносно невисокою світловою віддачею (від 7 до 22 лм/Вт) і невеликою тривалістю горіння (1-2 тис. год.);

Найбільше поширення мають лампи розжарювання загального призначення напругою 127 і 220 В, потужністю від 15 до 1500 Вт.

В останні роки набувають все більшого поширення галогенні лампи розжарювання. Вони відрізняються великою світловою віддачею (22 лм/Вт) і тривалістю роботи (до 2000 год). Випускаються галогенні лампи типів КГ 220-1000, КГ 220-1500 і КГ 220-2000. Ці лампи відрізняються великою стабільністю світлового потоку.

Таким чином, при виборі джерела світла для виробничих приміщень необхідно керуватися двома рекомендаціями:

- віддавати перевагу газорозрядним лампам, як енергетично більш економічним та володіючими більшою тривалістю горіння;
- застосовувати лампи найбільшої потужності з метою зниження капітальних і експлуатаційних витрат, але без погіршення при цьому якості освітлення.

4.4. Розрахунок штучного освітлення виробничого приміщення

Метою даного розрахунку є визначення необхідної кількості, потужності та схеми розміщення світильників для забезпечення нормованої освітленості робочої зони виробничого цеху згідно з вимогами ДБН В.2.5-

28:2018. Розрахунок виконується методом коефіцієнта використання світлового потоку, який рекомендований для приміщень із рівномірним розташуванням обладнання та світлими поверхнями стін, стелі та підлоги.

Вихідні дані для розрахунку:

- Розміри приміщення: довжина $A = 24$ м, ширина $B = 12$ м, висота $H = 4,5$ м;
- Висота робочої поверхні $h_p = 0,8$ м від підлоги;
- Нормована освітленість $E = 300$ лк (для робіт середньої точності, розряд IV, підрозряд в);
- Коефіцієнт запасу $K = 1,2$ (для люмінесцентних ламп);
- Коефіцієнт нерівномірності $z = 1,1$;
- Коефіцієнти відбиття: стеля $\rho_s = 70\%$, стіни $\rho_{st} = 50\%$, підлога $\rho_p = 30\%$;
- Тип світильника: з люмінесцентними лампами типу ЛБ-40, світловий потік однієї лампи $\Phi_l = 2800$ лм.

Етап 1. Визначення розрахункової висоти підвісу світильників:

$$h = H - h_c - h_p = 4,5 - 0,5 - 0,8 = 3,2 \text{ м}, \quad (4.1)$$

де $h_c = 0,5$ м -звис світильника від стелі.

Етап 2. Розрахунок індексу приміщення:

$$i = \frac{A \cdot B}{h \cdot (A + B)} = \frac{24 \cdot 12}{3,2 \cdot (24 + 12)} = 288 / 115,2 = 2,5. \quad (4.2)$$

Етап 3. Визначення коефіцієнта використання світлового потоку η :

За таблицями [21] для індексу приміщення $i = 2,5$ та заданих коефіцієнтів відбиття приймаємо $\eta = 0,52$ (52%).

Етап 4. Розрахунок необхідного світлового потоку ламп у кожному світильнику за формулою:

$$\Phi = \frac{(E \cdot K \cdot S \cdot z)}{N \cdot \eta}, \quad (4.3)$$

де $S = A \cdot B = 24 \cdot 12 = 288 \text{ м}^2$ - площа приміщення.

Попередньо встановимо, що кількість світильників $N = 24$ шт. (схема розміщення 6 рядів по 4 світильники). Тоді світловий потік буде:

$$\Phi = \frac{300 \cdot 1,2 \cdot 288 \cdot 1,1}{24 \cdot 0,52} = \frac{114048}{12,48} = 9140 \text{ лм} \quad (4.4)$$

Етап 5. Вибір стандартної лампи:

Оскільки один світильник міститиме $m = 2$ лампи, необхідний потік однієї лампи:

$$\Phi_{\text{л.розр}} = \frac{9140}{2} = 4570 \text{ лм.} \quad (4.5)$$

За каталогом обираємо люмінесцентну лампу ЛБ-65 зі світловим потоком $\Phi_{\text{л.станд}} = 4600 \text{ лм.}$

Відхилення: $\Delta = \frac{4600 - 4570}{4570} \cdot 100\% = +0,65\%$, що входить у допустимий діапазон $-10\% \dots +20\%$.

Етап 6. Перевірка відстані між світильниками:

Для люмінесцентних світильників з кривою сили світла типу Л рекомендована відстань:

$$L' = k \cdot h \quad (4.6)$$

де k - 1,4–1,6 - коефіцієнти для світильників із кривою сили світла типу «Л» (люмінесцентні), що визначають оптимальне співвідношення відстані між світильниками до висоти їх підвісу; h - розрахункова висота підвісу,

Тоді маємо, що нижня межа:

$$L'_{\text{ниж}} = 1,4 \cdot 3,2 = 4,48 \text{ м.} \quad (4.7)$$

Верхня межа:

$$L'_{\text{верх}} = 1,4 \cdot h = 1,6 \cdot 3,2 = 5,12 \text{ м.} \quad (4.8)$$

Отже, рекомендований діапазон відстані між світильниками або рядами становить 4,48–5,12 м.

Приймаємо крок розміщення 4,8 м по довжині та 4,0 м по ширині, що забезпечить рівномірність штучного освітлення.

Етап 7. Розрахунок потужності освітлювальної установки:

$$P_y = P_l \cdot N \cdot t = 65 \text{ Вт} \cdot 24 \cdot 2 = 3120 \text{ Вт} = 3,12 \text{ кВт} \quad (4.9)$$

Етап 8. Техніко-економічна оцінка або річні експлуатаційні витрати:

При тарифі $q=4,5 \frac{\text{грн}}{\text{кВт}\cdot\text{год}}$ та часі роботи $T = 2000 \frac{\text{год}}{\text{рік}}$:

$$E_{\text{експ}} = P_y \cdot T \cdot q = 3,12 \cdot 2000 \cdot 4,5 = 28\,080 \frac{\text{грн}}{\text{рік}}. \quad (4.10)$$

Отже для забезпечення нормованої освітленості 300 лк у виробничому приміщенні площею 288 м² потрібно встановити 24 дво-лампові світильники з люмінесцентними лампами типу ЛБ-65 загальною потужністю 3,12 кВт. Схема розміщення - 6 рядів по 4 світильники з кроком 4,8·4,0 м. Запропоноване рішення відповідає вимогам ДБН В.2.5-28:2018 та забезпечує достатнє освітлення робочої зони.

4.5 Висновки до розділу охорони праці

1. У розділі виконано комплексний аналіз умов праці та потенційних небезпечних і шкідливих виробничих факторів, які можуть виникати під час експлуатації та обслуговування досвідної електротехнічної установки. Зроблено перелік організаційних та технічних заходів для забезпечення електробезпеки, нормалізації мікроклімату та зниження рівнів шуму у робочій зоні.

2. Відповідно до чинних нормативних вимог ДБН В.2.5-28:2018, для виробничого приміщення цеху розмірами 24х12х4,5 м, у якому виконуються роботи малої точності, було розроблено систему штучного загального рівномірного освітлення.

3. На основі методу коефіцієнта використання світлового потоку виконано світлотехнічний розрахунок, за результатами якого визначено необхідну кількість джерел світла. Для забезпечення нормативних параметрів робочого середовища обрано 24 світильники типу ОД з люмінесцентними лампами ЛБ-65 (по дві лампи у кожному світильнику), які забезпечують необхідний світловий потік.

4. Запропонована схема розміщення світильників (3 ряди по 8

світильників у кожному) з оптимальною висотою підвісу забезпечує достатню рівномірність розподілу світлового потоку, відсутність стробоскопічного ефекту та різких тіней, що суттєво знижує втому органів зору персоналу, підвищує продуктивність праці та мінімізує ризик виробничого травматизму.

ВИСНОВКИ

У ході виконання дипломної роботи було проведено комплексне дослідження електричного опору Г-подібної провідної пластини в умовах неоднорідного розподілу електричного поля. Робота поєднує теоретичний аналіз електростатичних процесів, математичне моделювання та числові методи розрахунку, що дозволило отримати результати як фундаментального, так і прикладного характеру.

У першому розділі узагальнено основні теоретичні положення електростатики та електропровідності. Розглянуто поняття електричного поля, його основні характеристики та фізичний зміст електричного потенціалу. Проаналізовано рівняння Лапласа як базове рівняння теорії потенціалу для беззарядних областей. Досліджено властивості гармонічних функцій, зокрема принцип максимуму, властивість середнього значення та теорему єдиності розв'язку. Також розглянуто фізичну природу електричного струму та електричного опору, встановлено залежність провідності від концентрації та рухливості носіїв заряду, а також визначено умови застосовності закону Ома для провідників.

У методичному розділі сформульовано математичну модель Г-подібної провідної пластини в режимі постійного струму. На основі двовимірного рівняння Лапласа визначено граничні умови Діріхле та Неймана, що описують фіксовані потенціали на електродах та електричну ізоляцію бічних поверхонь. Отримано співвідношення для визначення електричного поля, густини струму та повного струму через провідник. Показано, що через складну геометрію пластини електричне поле є неоднорідним, а класичні одновимірні формули для прямолінійних провідників не забезпечують достатньої точності. Окрему увагу приділено методу скінченних елементів як ефективному інструменту числового моделювання електропровідності в областях складної форми.

У дослідницькій частині виконано числове моделювання електричного поля та електричного опору Г-подібної провідної пластини за допомогою

методу скінченних елементів. Для розв'язання двовимірного рівняння Лапласа було розроблено програмний комплекс мовою Python із використанням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib. Проведено числові розрахунки розподілу електричного потенціалу, густини струму та еквіпотенціальних ліній для різних співвідношень геометричних параметрів. Встановлено, що поблизу внутрішнього увігнутого кута пластини виникає концентрація електричного поля та густини струму, тоді як поблизу зовнішнього кута напруженість поля зменшується. Показано, що фактичний електричний опір Г-подібної пластини є меншим за опір еквівалентного прямолінійного провідника. Виявлено, що зі збільшенням співвідношення a/L величина нормалізованого опору R/R_0 монотонно зменшується, що пояснюється двовимірним перерозподілом струму та утворенням паралельних шляхів провідності.

У результаті виконаної роботи підтверджено, що електричний опір провідників складної геометричної форми суттєво залежить від конфігурації області, граничних умов та характеру розподілу електричного поля. Продемонстровано ефективність застосування методу скінченних елементів для дослідження електропровідності Г-подібних структур. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні друкованих плат, мікроелектронних компонентів, тонкоплівкових резистивних елементів та інших електротехнічних систем, у яких геометричні особливості суттєво впливають на електричні характеристики. У розділі з охорони праці виконано розрахунок штучного освітлення робочого приміщення. Визначено необхідний світловий потік, кількість та схему розміщення світильників. Підтверджено відповідність отриманих параметрів нормативним вимогам. Показано, що забезпечення раціонального освітлення, а також дотримання вимог електро- та пожежної безпеки є важливими чинниками створення безпечних і комфортних умов праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Jackson J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – 3rd ed. – New York : John Wiley & Sons, 1999.
2. Ohm G. S. Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet / G. S. Ohm. – Berlin : T.H. Riemann, 1827.
3. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics / D. J. Griffiths. – 4th ed. – Boston : Pearson, 2017.
4. Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. 1 / J. C. Maxwell. – Oxford : Clarendon Press, 1873.
5. Ashcroft N. W. Solid State Physics / N. W. Ashcroft, N. D. Mermin. – New York : Holt, Rinehart and Winston, 1976.
6. Joule J. P. On the Mechanical Equivalent of Heat / J. P. Joule // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1845.
7. Landau L. D. Electrodynamics of Continuous Media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – 2nd ed. – Oxford : Pergamon Press, 1984.
8. Jackson J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – 3rd ed. – New York : Wiley, 1999.
9. Sedra A. S. Microelectronic Circuits / A. S. Sedra, K. C. Smith. – 7th ed. – Oxford : Oxford University Press, 2015.
10. Datta S. Electronic Transport in Mesoscopic Systems / S. Datta. – Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
11. Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism / J. C. Maxwell. – Oxford, 1873.
12. Ohm G. S. Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet / G. S. Ohm. – Berlin, 1827.
13. Jackson J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – New York : Wiley, 1999.

14. Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics / J. Jin. – 3rd ed. – Hoboken : Wiley-IEEE Press, 2014.
15. Sadiku M. N. O. Elements of Electromagnetics / M. N. O. Sadiku. – 6th ed. – Oxford : Oxford University Press, 2014.
16. Silvester P. P. Finite Elements for Electrical Engineers / P. P. Silvester, R. L. Ferrari. – Cambridge : Cambridge University Press, 1996.
17. Harrington R. F. Field Computation by Moment Methods / R. F. Harrington. – New York : Macmillan, 1968.
18. Landau L. D. Electrodynamics of Continuous Media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – Oxford : Pergamon Press, 1984.
19. Jackson J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – New York : Wiley, 1999.
20. Охорона праці. Освітлення [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: https://www.ztec.com.ua/ztec/e-lib/%D0%9E%D1%85%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B0%20%D0%BF%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%96/%D0%A2%D0%B5%D0%BC%D0%B0%209%20%D0%9E%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.pdf?__cf_chl_tk=2D3nY3SrhMfIJ9SOvb7BxbY3iWG0F2HVRtq4nQJtBLQ-1780140627-1.0.1.1-MeDOiHdODGbF20cOrbiT82COKppHgbwE7jLy03SDWgI (дата звернення 20.05.2026). – Назва з екрану.
21. Кнорринг Г. М. Довідкова книга для проектування електричного освітлення / Г. М. Кнорринг. – Л. : Енергія, 1976.