

ХЕРСОНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ І ТЕХНІЧНОГО СЕРВІСУ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему: **«Оптимізація процесу доставки вантажу у випадку
неоднорідного складу автопарку»**

Виконав: студент 3 курсу, групи 3ТТс3
спеціальності

275.03 – Транспортні технології (на
автомобільному транспорті)

Гурбін В. І.

Керівник к.т.н., доц. Славич В. П.

Рецензент к.т.н., доц. Луб'яний П. В.

Херсон – 2026 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО

Наказ Міністерства освіти і науки,
молоді та спорту України
29 березня 2012 року № 384

Форма № Н-9.01

ХЕРСОНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ.

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут, факультет, відділення _____ Інженерії та транспорту
Кафедра, циклова комісія _____ Транспортних систем і технічного сервісу
Рівня вищої освіти _____ бакалавр
спеціальність _____ 275 Транспортні технології
спеціалізація 275.03 на автомобільному транспорті

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ТСТС

к.т.н., доц. _____

П. В. Луб'яний

“ ____ ” _____ 2026 року

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ БАКАЛАВРА

СТУДЕНТУ

Гурбін Валерій Ігорович

1. Тема проєкту (роботи) «Оптимізація процесу доставки вантажу у випадку неоднорідного складу автопарку»

керівник проєкту (роботи) к.т.н., доцент Славич В. П.

затверджені наказом вищого навчального закладу від 26.01.2026 року № 122-с

2. Строк подання студентом проєкту (роботи) 03.06.2026 р.

3. Вихідні дані до проєкту (роботи): обсяги запасів вантажу у постачальників, потреби споживачів, матриця транспортних витрат, рівні пріоритетів постачальників, обмеження транспортної системи.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вступ,

1 Аналіз підходів до врахування пріоритетності у транспортних задачах,

2 Математичне моделювання процесу доставки вантажу з урахуванням пріоритетів постачальників,

3 Числова реалізація та аналіз результатів розв'язання транспортної задачі з пріоритетами постачальників,

Висновки, Список використаних джерел.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

матеріали демонстраційної графічної частини формату А4

6. Консультанти розділів проєкту (роботи)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1	Славич В. П.		
2	Славич В. П.		
3	Славич В. П.		

7. Дата видачі завдання 02.02.2026**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи магістра	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Вступ	10.02.2026	
2	Аналіз підходів до врахування пріоритетності у транспортних задачах	10.03.2026	
3	Математичне моделювання процесу доставки вантажу з урахуванням пріоритетів постачальників	10.04.2026	
4	Числова реалізація та аналіз результатів розв'язання транспортної задачі з пріоритетами постачальників	10.05.2026	
5	Висновки	01.06.2026	

Студент _____ Гурбін В. І.
(підпис)

Керівник проєкту (роботи) _____ Славич В. П.
(підпис)

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота присвячена оптимізації процесу доставки вантажу у випадку неоднорідного складу автопарку. У роботі проведено аналіз існуючих підходів до розв'язання транспортних задач з пріоритетами постачальників. Розроблено математичну модель транспортної задачі та побудовано лексикографічну цільову функцію. Запропоновано модифіковані методи побудови опорного та оптимального планів перевезень. Виконано числову реалізацію запропонованої моделі та проведено аналіз отриманих результатів. Показано ефективність запропонованого підходу для планування вантажних перевезень з урахуванням пріоритетності постачальників.

ANNOTATION

The qualification work is devoted to the optimization of the cargo delivery process in the case of a heterogeneous fleet composition. The work analyzes existing approaches to solving transport problems with supplier priorities. A mathematical model of the transport problem is developed and a lexicographic objective function is constructed. Modified methods for constructing reference and optimal transportation plans are proposed. The numerical implementation of the proposed model is performed and the results obtained are analyzed. The effectiveness of the proposed approach for planning cargo transportation taking into account supplier priorities is shown.

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра на тему „Оптимізація процесу доставки вантажу у випадку неоднорідного складу автопарку” містить 78 стор., 15 використаних джерел.

Запропоновано лексикографічну постановку задачі, яка дозволяє поєднати вимогу першочергового обслуговування постачальників із критерієм мінімізації сумарних транспортних витрат.

Представлено модель транспортної задачі з дискретними рівнями пріоритету постачальників, сформовано цільову функцію у вигляді лексикографічного вектора та запропоновано модифікований метод побудови опорного плану. Також удосконалено метод потенціалів шляхом введення обмежень, що забезпечують збереження ієрархії пріоритетів під час оптимізації.

Наведено числову реалізацію, виконано побудову опорного та оптимального планів перевезень, а також проведено аналіз результатів. Показано, що врахування пріоритетів впливає на структуру вантажопотоків і забезпечує першочергове обслуговування більш важливих постачальників.

Отримані результати підтверджують працездатність запропонованого підходу та його практичну доцільність для використання у транспортно-логістичних системах.

ЗМІСТ

ВСТУП

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО ВРАХУВАННЯ ПРІОРИТЕТНОСТІ У ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧАХ

1.1. Особливості прийняття рішень у транспортних системах за наявності пріоритетів

1.2. Класифікація транспортних задач з пріоритетними елементами

1.3. Моделі з пріоритетами постачальників вантажу

1.4. Моделі з пріоритетами споживачів вантажу

1.5. Багатокритеріальні та лексикографічні транспортні задачі

1.6. Методи побудови допустимих і оптимальних планів у пріоритетних транспортних задачах

1.7. Аналіз існуючих підходів та постановка задачі дослідження

1.8 Висновки до розділу 1

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДОСТАВКИ ВАНТАЖУ З УРАХУВАННЯМ ПРІОРИТЕТІВ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ

2.1 Постановка транспортної задачі з пріоритетами постачальників

2.2 Формування математичної моделі транспортної задачі

2.3 Побудова лексикографічної цільової функції

2.4 Метод побудови опорного плану з урахуванням пріоритетів постачальників

2.5 Модифікований метод потенціалів для знаходження оптимального плану

2.6 Висновки до розділу 2

РОЗДІЛ 3. ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З ПРІОРИТЕТАМИ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ

3.1 Вихідні дані задачі

3.2 Побудова опорного плану за модифікованим методом найменшої вартості

3.3 Побудова оптимального плану модифікованим методом потенціалів

3.4 Аналіз результатів та оцінка впливу пріоритетів постачальників на структуру плану перевезень

3.5 Висновки до розділу 3

ВИСНОВКИ

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

ВСТУП

Сучасні транспортно-логістичні системи функціонують в умовах зростаючої складності, що зумовлено необхідністю одночасного врахування економічних, організаційних та стратегічних чинників при плануванні вантажних перевезень. Однією з ключових проблем у цій сфері є оптимізація процесу доставки вантажів за умов обмежених ресурсів транспортної системи та неоднорідності її елементів.

Під неоднорідністю складу автопарку у даній роботі розуміється не лише різноманітність транспортних засобів, але й різнорівнева значущість джерел вантажу, яка проявляється у вигляді пріоритетів постачальників. Такі пріоритети можуть визначатися стратегічною важливістю вантажів, терміновістю їх доставки, соціальною значущістю або умовами функціонування логістичної системи. Саме врахування цієї ієрархії є ключовим чинником при побудові ефективних транспортних моделей.

Метою кваліфікаційної роботи є розробка математичної моделі та алгоритму оптимізації процесу доставки вантажу в умовах неоднорідного складу транспортної системи, що інтерпретується як наявність різнорівневих пріоритетів постачальників, а також побудова методів знаходження опорного та оптимального планів перевезень із урахуванням зазначеної ієрархії та мінімізації сумарних транспортних витрат.

Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються такі завдання:

1. Проаналізувати особливості прийняття рішень у транспортних системах за наявності пріоритетів та узагальнити існуючі підходи до моделювання таких задач.
2. Виконати класифікацію транспортних задач із пріоритетними елементами та визначити основні типи пріоритетів.
3. Дослідити математичні моделі транспортних задач з пріоритетами постачальників вантажу.

4. Проаналізувати моделі з пріоритетами споживачів вантажу та особливості їх врахування.

5. Розглянути багатокритеріальні та лексикографічні постановки транспортних задач.

6. Дослідити методи побудови допустимих та оптимальних планів у транспортних задачах з пріоритетами.

7. Виконати аналіз існуючих підходів та сформулювати постановку задачі дослідження.

8. Розробити математичну модель транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників та побудувати лексикографічну цільову функцію.

9. Розробити модифікований метод побудови опорного плану з урахуванням пріоритетів.

10. Удосконалити метод потенціалів для знаходження оптимального плану перевезень з урахуванням ієрархії постачальників.

11. Виконати числову реалізацію запропонованої моделі та проаналізувати результати її застосування.

Об'єктом дослідження є процеси організації та управління вантажними перевезеннями у транспортно-логістичних системах.

Предметом дослідження є математичні моделі транспортної задачі та методи оптимізації перевезень за умов неоднорідності постачальників, що виражається через систему їх пріоритетів.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості їх застосування для планування вантажних перевезень у логістичних системах з неоднорідною структурою джерел вантажу, де необхідно забезпечити як економічну ефективність, так і пріоритетне обслуговування критично важливих постачальників.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО ВРАХУВАННЯ ПРІОРИТЕТНОСТІ У ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧАХ

1.1. Особливості прийняття рішень у транспортних системах за наявності пріоритетів

У сучасних транспортно-логістичних системах процес прийняття рішень дедалі частіше виходить за межі класичних задач мінімізації витрат перевезення. Зростання складності транспортних мереж, підвищення вимог до швидкості доставки та необхідність забезпечення безперервності функціонування критично важливих об'єктів обумовлюють потребу врахування додаткових факторів, серед яких важливе місце займає пріоритетність окремих вантажів, постачальників, споживачів або транспортних маршрутів.

У традиційних моделях транспортного планування всі учасники системи вважаються рівнозначними. За таких умов оптимальний план перевезень визначається виключно на основі економічного критерію, найчастіше мінімізації сукупних транспортних витрат. Проте в реальних умовах функціонування транспортних систем окремі перевезення можуть мати різний рівень важливості, що безпосередньо впливає на порядок їх виконання.

Особливо помітною ця проблема стає в умовах обмеженості транспортних ресурсів. Якщо доступна кількість транспортних засобів, водіїв, пального або часу є недостатньою для одночасного виконання всіх перевезень, виникає необхідність визначення черговості обслуговування заявок. Саме в таких ситуаціях формуються пріоритети, які фактично визначають порядок розподілу наявних ресурсів.

До основних причин виникнення пріоритетів у транспортних системах належать:

- обмеженість транспортних ресурсів;

- нерівнозначна важливість вантажів;
- часові обмеження доставки;
- стратегічна значущість окремих споживачів;
- необхідність забезпечення безперервності виробничих процесів;
- соціальна або гуманітарна важливість перевезень;
- підвищені вимоги до надійності логістичних операцій.

В умовах функціонування сучасних логістичних систем пріоритетність може формуватися на різних рівнях управління. У загальному випадку об'єктами пріоритетного обслуговування можуть бути як окремі учасники транспортного процесу, так і самі перевезення.

Таблиця 1.1

Основні види пріоритетів у транспортних системах

Вид пріоритету	Об'єкт пріоритетності	Приклад
Постачальника	Пункт відправлення	Вивезення гуманітарного вантажу
Споживача	Пункт призначення	Забезпечення лікарень
Вантажу	Тип продукції	Медикаменти, паливо
Маршруту	Напрямок перевезення	Евакуаційні маршрути
Часовий	Термін доставки	Швидкопсувні продукти
Комплексний	Декілька факторів одночасно	Військова логістика

З точки зору математичного моделювання пріоритетність являє собою додаткову характеристику об'єкта, яка впливає на процедуру вибору оптимального рішення. Формально кожному елементу транспортної системи може бути поставлене у відповідність певне числове значення пріоритету:

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

де p_i характеризує рівень важливості відповідного об'єкта.

При цьому більші значення p_i відповідають вищому рівню пріоритетності.

На практиці найбільш поширеними є три способи задання пріоритетів:

1. Ранговий підхід.
2. Бальна система оцінювання.
3. Вагові коефіцієнти.

Ранговий підхід передбачає впорядкування об'єктів за рівнем важливості без визначення абсолютної величини переваги між ними. У цьому випадку формується певна ієрархія, в якій кожний елемент має своє місце відносно інших.

Бальна система оцінювання ґрунтується на присвоєнні об'єктам певної кількості балів залежно від рівня їх значущості. Такий підхід часто використовується у логістичних інформаційних системах, де рішення приймаються автоматизовано на основі великої кількості критеріїв.

Вагові коефіцієнти застосовуються переважно в багатокритеріальних моделях оптимізації. У цьому випадку кожному об'єкту або критерію ставиться у відповідність певна вага, яка характеризує його відносну важливість у загальній системі оцінювання.

Особливістю транспортних систем є те, що пріоритети можуть бути як статичними, так і динамічними. Статичні пріоритети визначаються до початку процесу планування та залишаються незмінними протягом усього періоду виконання перевезень. Динамічні пріоритети, навпаки, можуть змінюватися залежно від поточної ситуації, зміни попиту, виникнення надзвичайних подій або появи нових замовлень.

Для багатьох практичних задач характерною є ситуація, коли одночасно існують декілька різних видів пріоритетів. Наприклад, вантаж може мати високий рівень терміновості, але транспортуватися до споживача зі звичайним

рівнем важливості. У таких випадках виникає необхідність погодження різних критеріїв та побудови складніших механізмів прийняття рішень.

Схематично процес прийняття рішень у транспортній системі за наявності пріоритетів може бути представлений у вигляді послідовності етапів.

Таблиця 1.2

Загальна схема прийняття транспортних рішень

Етап	Зміст
1	Формування множини заявок на перевезення
2	Визначення критеріїв пріоритетності
3	Присвоєння рівнів пріоритету
4	Формування системи обмежень
5	Побудова допустимих планів
6	Оптимізація перевезень
7	Вибір остаточного плану

У випадку використання пріоритетів змінюється сама структура задачі оптимізації. Якщо для класичної транспортної задачі критерієм є лише мінімізація витрат:

$$F = \sum \sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

то для пріоритетних транспортних задач необхідно одночасно враховувати як економічні показники, так і рівень важливості окремих перевезень. У результаті задача набуває багатокритеріального характеру та потребує використання спеціальних методів оптимізації.

Таким чином, наявність пріоритетів суттєво змінює процес прийняття рішень у транспортних системах. Поряд із традиційними економічними

критеріями виникає необхідність врахування стратегічних, часових, виробничих та соціальних факторів. Це обумовлює потребу розроблення спеціалізованих математичних моделей і алгоритмів, здатних забезпечити узгодження економічної ефективності перевезень із вимогами пріоритетного обслуговування окремих об'єктів транспортної системи.

1.2 Класифікація транспортних задач з пріоритетними елементами

Розвиток сучасних транспортно-логістичних систем супроводжується постійним ускладненням процесів планування перевезень. Якщо класична транспортна задача передбачає оптимальний розподіл вантажопотоків між постачальниками та споживачами за критерієм мінімізації транспортних витрат, то практичні умови функціонування транспортних систем часто потребують врахування додаткових факторів, пов'язаних із нерівнозначною важливістю окремих учасників перевізного процесу. Саме тому в останні десятиліття значного розвитку набули транспортні задачі з пріоритетними елементами.

Під транспортною задачею з пріоритетними елементами будемо розуміти задачу оптимального планування перевезень, у якій окремим елементам транспортної системи ставиться у відповідність певний рівень важливості, що впливає на формування допустимих або оптимальних планів перевезень.

На відміну від класичних моделей, у таких задачах критерій мінімізації витрат не є єдиним. Рішення повинно забезпечувати не лише економічну ефективність перевезень, а й виконання вимог щодо черговості або ступеня задоволення потреб окремих об'єктів.

У загальному випадку пріоритетність може бути пов'язана з різними елементами транспортної системи. Залежно від об'єкта, якому призначається пріоритет, транспортні задачі доцільно поділити на декілька основних груп.

Таблиця 1.3

Класифікація транспортних задач за об'єктом пріоритетності

Група задач	Об'єкт пріоритетності
Задачі з пріоритетами постачальників	Пункти відправлення
Задачі з пріоритетами споживачів	Пункти призначення
Задачі з пріоритетами вантажів	Види продукції
Задачі з пріоритетами маршрутів	Напрямки перевезень
Задачі з часовими пріоритетами	Терміни доставки
Комбіновані задачі	Декілька об'єктів одночасно

Найбільш поширеними є задачі з пріоритетами постачальників. У таких моделях окремі пункти відправлення мають різний рівень важливості, що визначає порядок використання їх запасів у процесі побудови транспортного плану. Подібні ситуації виникають під час перевезення гуманітарної допомоги, евакуації матеріальних ресурсів із небезпечних територій, доставки продукції стратегічного призначення або забезпечення безперервності роботи критично важливих підприємств.

Особливістю задач цього типу є необхідність забезпечення максимально можливого вивезення вантажів від постачальників з вищим рівнем пріоритету навіть у випадках, коли таке рішення не забезпечує мінімальних транспортних витрат.

Іншу групу становлять транспортні задачі з пріоритетами споживачів. У таких моделях головною метою є першочергове задоволення потреб найбільш важливих пунктів призначення. Подібні задачі виникають під час розподілу медикаментів між лікарнями, постачання продовольства у кризових ситуаціях, забезпечення військових підрозділів або обслуговування підприємств безперервного циклу виробництва.

У цьому випадку критерій оптимальності може бути пов'язаний із максимізацією рівня забезпечення споживачів відповідно до встановленої ієрархії важливості.

Окрему групу формують задачі з пріоритетами вантажів. На практиці різні види продукції можуть мати різний рівень критичності. Наприклад, швидкопсувні товари, медичні препарати або небезпечні вантажі потребують особливих умов перевезення та мають пріоритет над звичайними вантажами.

У подібних випадках транспортна система повинна забезпечувати не лише доставку вантажу, а й дотримання встановленого порядку його обслуговування.

Важливе місце займають також задачі з пріоритетами маршрутів. У сучасних транспортних мережах окремі напрямки перевезень можуть мати стратегічне значення. До таких маршрутів належать транспортні коридори міжнародного значення, шляхи постачання критично важливих ресурсів, маршрути евакуації населення або напрями перевезення гуманітарної допомоги.

У цьому випадку пріоритетність визначається не характеристиками постачальників чи споживачів, а особливостями транспортної мережі.

Окремого розгляду потребують задачі з часовими пріоритетами. Для таких моделей визначальним фактором виступає термін виконання перевезення. Чим менший допустимий час доставки, тим вищим є пріоритет відповідного замовлення.

Подібний підхід широко використовується під час організації експрес-доставки, транспортування швидкопсувної продукції та функціонування систем електронної комерції.

Сучасні логістичні системи дедалі частіше стикаються із ситуаціями, коли одночасно необхідно враховувати декілька видів пріоритетів. Це призводить до появи комбінованих транспортних задач.

Таблиця 1.4

Приклади комбінованих пріоритетів

Пріоритет постачальника	Пріоритет споживача	Часовий пріоритет	Приклад
Так	Ні	Ні	Вивезення стратегічних запасів
Ні	Так	Ні	Забезпечення лікарень
Ні	Ні	Так	Експрес-доставка
Так	Так	Ні	Військова логістика
Так	Так	Так	Гуманітарні операції

Поряд із класифікацією за об'єктом пріоритетності доцільно розглядати класифікацію за способом математичного подання пріоритетів.

Найпростішими є задачі з дискретними пріоритетами. У таких моделях кожному елементу системи присвоюється певний рівень важливості, який належить до заздалегідь визначеної множини значень. Наприклад, можуть використовуватися рівні від 1 до 5 або від 1 до 10.

Формально множина пріоритетів може бути записана у вигляді:

$$P = \{1, 2, \dots, k\},$$

де k – кількість можливих рівнів пріоритетності.

Іншим підходом є використання вагових коефіцієнтів. У цьому випадку кожному елементу ставиться у відповідність певна вага:

$$w_i > 0,$$

яка характеризує його відносну важливість.

Подібний підхід широко застосовується у багатокритеріальних моделях оптимізації.

Ще однією групою є лексикографічні транспортні задачі. У таких моделях усі критерії впорядковуються за ступенем важливості, а оптимізація здійснюється послідовно. Спочатку досягається найкраще значення головного критерію, після чого серед отриманих рішень оптимізується наступний критерій і так далі.

Саме лексикографічний підхід дозволяє забезпечити жорстке дотримання встановленої системи пріоритетів без можливості їх компенсації за рахунок інших критеріїв.

Залежно від характеру зміни пріоритетів у часі транспортні задачі також можна поділити на статичні та динамічні.

Таблиця 1.5

Класифікація задач за характером зміни пріоритетів

Тип задачі	Характеристика
Статична	Пріоритети незмінні протягом усього періоду планування
Динамічна	Пріоритети можуть змінюватися в процесі виконання перевезень

Статичні моделі є більш простими для реалізації та аналізу. Вони широко використовуються у стратегічному плануванні перевезень та довгостроковому управлінні транспортними системами.

Динамічні моделі застосовуються переважно в інформаційних системах реального часу, де рішення повинні оперативно адаптуватися до змін зовнішнього середовища.

Таким чином, транспортні задачі з пріоритетними елементами утворюють широкий клас оптимізаційних моделей, що відрізняються як за об'єктами пріоритетності, так і за способами їх математичного опису. Різноманітність практичних умов функціонування транспортних систем обумовлює необхідність використання різних підходів до формалізації пріоритетів та побудови алгоритмів їх урахування. Проведена класифікація дозволяє систематизувати існуючі напрямки досліджень і створює теоретичне підґрунтя для подальшого аналізу моделей транспортних задач з пріоритетами постачальників вантажу.

1.3 Моделі з пріоритетами постачальників вантажу

Серед різноманітних транспортних задач з пріоритетними елементами особливе місце займають моделі, у яких пріоритетність пов'язується з постачальниками вантажу. Необхідність використання таких моделей обумовлена тим, що в реальних логістичних системах окремі пункти відправлення можуть мати різний рівень важливості для функціонування транспортної мережі або економічної системи в цілому.

На відміну від класичної транспортної задачі, де всі постачальники вважаються рівнозначними, у моделях даного класу враховується додаткова характеристика кожного пункту відправлення — його пріоритет. Наявність пріоритетів дозволяє враховувати стратегічні, економічні, соціальні або технологічні особливості функціонування окремих постачальників під час формування плану перевезень.

Практична потреба у використанні таких моделей виникає у багатьох сферах діяльності. Зокрема, пріоритетність постачальників може бути обумовлена необхідністю першочергового вивезення гуманітарних вантажів, обслуговування критично важливих виробничих підприємств, евакуації матеріальних ресурсів із небезпечних територій, забезпечення

функціонування енергетичної інфраструктури або виконання державних програм стратегічного характеру.

У загальному випадку кожному постачальнику може бути поставлене у відповідність певне значення пріоритету p_i , що характеризує рівень важливості постачальника A_i .

Множина пріоритетів для всіх постачальників може бути подана у вигляді:

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\},$$

де m – кількість постачальників.

Чим більшим є значення p_i , тим більш важливим вважається відповідний постачальник і тим вищим є його місце в ієрархії обслуговування.

Основною особливістю моделей з пріоритетами постачальників є необхідність забезпечення першочергового використання запасів найбільш важливих пунктів відправлення. При цьому мінімізація транспортних витрат залишається важливим завданням, однак вже не є безумовно домінуючим критерієм.

У найпростішому випадку пріоритетність може враховуватися шляхом послідовного розгляду постачальників відповідно до спадання їх рівнів важливості. Такий підхід фактично формує певну черговість використання запасів під час побудови транспортного плану.

Для наочного представлення можливих ситуацій доцільно розглянути основні причини виникнення пріоритетів постачальників.

Таблиця 1.6

Причини формування пріоритетів постачальників

Причина	Характеристика
Стратегічна важливість	Постачальник забезпечує критично важливі ресурси
Обмежений час зберігання	Вантаж потребує термінового вивезення
Підвищений ризик втрати вантажу	Необхідність швидкого транспортування
Державні або соціальні програми	Пріоритетне забезпечення окремих категорій перевезень
Виробничі обмеження	Потреба звільнення складських площ
Безпекові фактори	Евакуація ресурсів із небезпечних регіонів

Залежно від способу математичного опису пріоритетів можна виділити декілька основних підходів до побудови відповідних транспортних моделей.

Одним із найбільш поширених є ваговий підхід. У цьому випадку пріоритетність враховується шляхом введення додаткових вагових коефіцієнтів у цільову функцію.

Загальна структура такої моделі може бути представлена у вигляді:

$$F = \sum \sum w_{ij} \cdot c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min,$$

Де w_{ij} – коефіцієнт важливості постачальника;

C_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу;

x_{ij} – обсяг перевезення.

Основною перевагою вагового підходу є його простота та можливість використання стандартних методів лінійного програмування.

Разом із тим суттєвим недоліком такого підходу є складність вибору вагових коефіцієнтів. Навіть незначна зміна їх значень може призводити до істотної зміни отриманих результатів. Крім того, вагові коефіцієнти не завжди забезпечують жорстке дотримання встановленої ієрархії пріоритетів.

Іншим поширеним підходом є використання штрафних функцій. У цьому випадку для постачальників із високим рівнем важливості вводяться додаткові штрафи за невикористання або неповне використання їх запасів.

Загальна структура подібних моделей передбачає мінімізацію функції:

$$F = C + S,$$

де C – транспортні витрати;

S – сумарні штрафи за порушення пріоритетності.

Такий підхід дозволяє гнучко регулювати ступінь впливу пріоритетів на кінцеве рішення, однак також потребує визначення числових значень штрафних коефіцієнтів.

Окрему групу становлять моделі з обмеженнями пріоритетності. У цьому випадку пріоритети враховуються не через цільову функцію, а шляхом введення додаткових обмежень до математичної моделі.

Наприклад, можуть задаватися умови, що забезпечують мінімальний рівень вивезення вантажу від окремих постачальників:

$$\sum x_{ij} \geq \alpha_i a_i,$$

де α_i – встановлена частка обов'язкового використання запасу постачальника A_i ;

a_i – запаси постачальника A_i ;

Перевагою такого підходу є можливість безпосереднього контролю виконання вимог щодо пріоритетності.

Подальшим розвитком моделей даного класу стали лексикографічні транспортні задачі. У таких моделях пріоритетність розглядається як окремий критерій оптимізації, який має вищий рівень важливості порівняно з економічними показниками.

Сутність підходу полягає у формуванні багаторівневої системи критеріїв, впорядкованих за ступенем значущості.

Спочатку досягається максимальне значення критерію, пов'язаного з пріоритетністю постачальників, а вже серед отриманих рішень здійснюється мінімізація транспортних витрат.

Таблиця 1.7

Порівняння основних підходів до врахування пріоритетів
постачальників

Підхід	Переваги	Недоліки
Вагові коефіцієнти	Простота реалізації	Складність вибору ваг
Штрафні функції	Гнучкість налаштування	Необхідність визначення штрафів
Додаткові обмеження	Контроль виконання вимог	Ускладнення математичної моделі
Лексикографічна оптимізація	Жорстке дотримання пріоритетів	Більш складна процедура розв'язання

В останні роки значна увага приділяється розробці комбінованих моделей, які поєднують декілька механізмів врахування пріоритетності одночасно. Такі підходи дозволяють більш повно враховувати особливості

функціонування реальних логістичних систем та забезпечують більшу гнучкість прийняття рішень.

Особливий інтерес становлять транспортні задачі, у яких пріоритетність враховується не лише на етапі формування цільової функції, а й безпосередньо під час побудови допустимого плану перевезень та його подальшої оптимізації. У таких моделях правила пріоритетного обслуговування інтегруються в алгоритми розв'язання задачі, що дозволяє забезпечити дотримання встановленої ієрархії на всіх етапах обчислювального процесу.

Аналіз існуючих підходів показує, що більшість відомих моделей орієнтована на врахування пріоритетів через вагові коефіцієнти або додаткові штрафні функції. Водночас питання побудови транспортних планів із жорстким дотриманням ієрархії постачальників залишається недостатньо дослідженим. Особливо актуальним є створення моделей, у яких пріоритетність враховується не лише під час оцінювання готових рішень, а й безпосередньо в процесі формування опорних та оптимальних планів перевезень.

Таким чином, моделі транспортних задач з пріоритетами постачальників становлять важливий напрям розвитку сучасних методів транспортної оптимізації. Їх застосування дозволяє враховувати реальні особливості функціонування логістичних систем та забезпечувати узгодження економічної ефективності перевезень із вимогами пріоритетного обслуговування окремих джерел вантажопотоків. Саме на вирішення зазначеної проблеми спрямоване подальше дослідження, результати якого наведено у наступних розділах роботи.

1.4 Моделі з пріоритетами споживачів вантажу

Поряд із задачами, у яких пріоритетність пов'язується з постачальниками, важливе місце в сучасній транспортній логістиці займають моделі з пріоритетами споживачів вантажу. У таких задачах основна увага

приділяється не джерелам формування вантажопотоків, а пунктам призначення, потреби яких мають різний рівень важливості для функціонування транспортної системи або об'єкта управління.

Необхідність використання подібних моделей обумовлена тим, що в реальних умовах окремі споживачі можуть мати критичне значення для виробничих, соціальних, економічних або безпекових процесів. У випадках обмеженості ресурсів або виникнення надзвичайних ситуацій забезпечення таких споживачів стає першочерговим завданням транспортного планування.

На практиці задачі з пріоритетами споживачів виникають у багатьох сферах діяльності. Прикладами можуть бути розподіл медикаментів між медичними закладами, забезпечення населення продовольством під час кризових ситуацій, постачання паливно-енергетичних ресурсів стратегічним об'єктам, обслуговування військових підрозділів або забезпечення безперервності функціонування виробничих підприємств.

У таких умовах недостатньо лише мінімізувати транспортні витрати. Необхідно забезпечити максимально повне та своєчасне задоволення потреб найбільш важливих споживачів навіть у тому випадку, коли це призводить до збільшення загальної вартості перевезень.

У загальному випадку кожному споживачу V_j може бути поставлений у відповідність певний рівень пріоритетності q_j , що характеризує важливість споживача V_j .

Множина пріоритетів усіх споживачів має вигляд:

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\},$$

де n – кількість споживачів.

Чим більшим є значення q_j , тим вищим є рівень важливості відповідного споживача та тим більшу увагу необхідно приділяти забезпеченню його потреб.

Основною особливістю транспортних задач даного класу є те, що критерієм ефективності виступає не лише економічний результат перевезень, а й ступінь задоволення попиту споживачів відповідно до встановленої системи пріоритетів.

У найпростішому випадку пріоритетність споживачів може враховуватися шляхом формування черговості розподілу вантажу. За такого підходу потреби споживачів із вищими пріоритетами задовольняються раніше, ніж потреби інших учасників системи.

Для більш детального аналізу доцільно розглянути основні причини формування пріоритетів споживачів.

Таблиця 1.8

Основні причини встановлення пріоритетів споживачів

Причина	Характеристика
Соціальна значущість	Забезпечення населення товарами першої необхідності
Медичне забезпечення	Постачання лікарень та медичних центрів
Безпекові потреби	Забезпечення військових та рятувальних служб
Виробнича необхідність	Підтримка безперервного виробництва
Енергетична безпека	Постачання паливно-енергетичних ресурсів
Надзвичайні ситуації	Ліквідація наслідків аварій та катастроф

Одним із найбільш поширених способів урахування пріоритетності споживачів є використання коефіцієнтів важливості в цільовій функції. У цьому випадку рівень забезпечення кожного споживача оцінюється з урахуванням його пріоритету.

Загальний критерій може бути представлений у вигляді

$$F = \sum q_j Z_j \rightarrow \max,$$

де Z_j – рівень задоволення потреб споживача V_j ;

q_j – коефіцієнт його пріоритетності.

Такий підхід дозволяє підвищити ступінь забезпечення найбільш важливих споживачів навіть за умов дефіциту транспортних ресурсів.

Іншим поширеним методом є використання обмежень мінімального рівня забезпечення. У цьому випадку для окремих споживачів задається гарантована частка задоволення попиту.

Формально це може бути записано у вигляді:

$$\sum x_{ij} \geq \beta_j b_j,$$

де b_j – потреба споживача V_j ;

β_j – мінімально допустимий рівень забезпечення.

Подібні моделі широко застосовуються під час розподілу ресурсів у надзвичайних ситуаціях, коли повне задоволення всіх потреб є неможливим.

Окремий напрям становлять транспортні задачі з багаторівневою системою пріоритетів споживачів. У таких моделях усі споживачі поділяються на декілька груп залежно від рівня важливості.

Таблиця 1.9

Приклад багаторівневої системи пріоритетів споживачів

Рівень	Характеристика
I рівень	Критично важливі споживачі
II рівень	Споживачі підвищеної важливості
III рівень	Звичайні споживачі
IV рівень	Споживачі низького пріоритету

У такому випадку транспортний план формується таким чином, щоб максимально задовольнити потреби споживачів вищого рівня перед переходом до обслуговування наступних груп.

Особливого значення набувають моделі з часовими обмеженнями. Для багатьох категорій споживачів важливим є не лише обсяг отриманого вантажу, а й момент його надходження. Це характерно для медичних закладів, підприємств безперервного циклу виробництва, систем енергозабезпечення та об'єктів критичної інфраструктури.

У таких моделях пріоритетність споживача поєднується з часовими параметрами доставки, що призводить до появи додаткових критеріїв оптимізації.

Значний розвиток отримали також лексикографічні моделі з пріоритетами споживачів. Їх основна ідея полягає у впорядкуванні критеріїв відповідно до рівня важливості груп споживачів.

Спочатку максимізується забезпечення споживачів найвищого рівня пріоритету, потім серед отриманих рішень оптимізується забезпечення наступної групи і лише після цього враховується критерій мінімізації транспортних витрат.

Такий підхід дозволяє виключити ситуації, коли економія транспортних витрат досягається за рахунок погіршення рівня забезпечення критично важливих споживачів.

Для порівняння різних підходів до врахування пріоритетів споживачів доцільно узагальнити їх основні характеристики.

Таблиця 1.10

Порівняння підходів до врахування пріоритетів споживачів

Підхід	Переваги	Недоліки
Вагові коефіцієнти	Простота реалізації	Залежність від вибору ваг
Мінімальні рівні забезпечення	Гарантований результат	Можливе зростання витрат
Багаторівнева класифікація	Зручність практичного використання	Необхідність формування груп
Лексикографічна оптимізація	Жорстке дотримання пріоритетів	Складніша процедура розв'язання

Сучасні тенденції розвитку транспортної логістики свідчать про поступовий перехід від одноцільових моделей до багатокритеріальних систем підтримки прийняття рішень. У таких системах пріоритетність споживачів розглядається як один із ключових факторів формування транспортних планів поряд із вартістю перевезень, часом доставки, рівнем ризику та надійністю транспортного обслуговування.

Аналіз існуючих підходів показує, що задачі з пріоритетами споживачів найбільш ефективно застосовуються в умовах дефіциту ресурсів або високої нерівнозначності потреб окремих пунктів призначення. Водночас принципи

побудови таких моделей мають багато спільного з моделями пріоритетних постачальників, оскільки в обох випадках основною метою є забезпечення переважного обслуговування найбільш важливих елементів транспортної системи.

Таким чином, транспортні задачі з пріоритетами споживачів являють собою важливий клас оптимізаційних моделей, орієнтованих на забезпечення ефективного розподілу ресурсів між пунктами призначення різної важливості. Їх використання дозволяє підвищити адаптивність транспортних систем до умов невизначеності та обмеженості ресурсів, що є особливо актуальним для сучасних логістичних процесів.

1.5 Багатокритеріальні та лексикографічні транспортні задачі

У класичній транспортній задачі критерієм оптимальності, як правило, виступає мінімізація сумарних транспортних витрат. Проте практична діяльність транспортно-логістичних систем свідчить про те, що ефективність перевезень не може оцінюватися виключно економічними показниками. У багатьох випадках під час прийняття управлінських рішень одночасно необхідно враховувати декілька різних критеріїв, які часто мають суперечливий характер.

До таких критеріїв можуть належати мінімізація транспортних витрат, скорочення часу доставки, підвищення надійності перевезень, забезпечення пріоритетного обслуговування окремих учасників транспортного процесу, зменшення екологічного впливу, підвищення рівня використання транспортних засобів та інші показники ефективності.

Саме тому в сучасних дослідженнях дедалі більшого поширення набувають багатокритеріальні транспортні задачі, які дозволяють одночасно враховувати декілька цілей оптимізації.

Під багатокритеріальною транспортною задачею будемо розуміти задачу визначення плану перевезень, для якого одночасно оцінюються декілька критеріїв ефективності:

$$F_1(X), F_2(X), \dots, F_k(X),$$

де X – план перевезень;

$F_1, F_2, \dots, F_k$ – критерії оптимальності.

Особливістю таких задач є те, що покращення одного критерію часто призводить до погіршення іншого. Наприклад, найшвидший спосіб доставки не завжди є найдешевшим, а максимальна надійність перевезень може вимагати додаткових витрат. Для ілюстрації зазначеної проблеми наведемо найбільш поширені критерії оптимізації транспортних систем.

Таблиця 1.11

Основні критерії багатокритеріальних транспортних задач

Критерій	Мета оптимізації
Вартість перевезень	Мінімізація витрат
Час доставки	Мінімізація тривалості перевезення
Надійність доставки	Максимізація ймовірності своєчасного прибуття
Рівень використання транспорту	Максимізація завантаження транспортних засобів
Екологічність	Мінімізація шкідливих викидів
Пріоритетність обслуговування	Максимізація виконання пріоритетних перевезень

Одним із перших підходів до розв'язання багатокритеріальних задач стало використання узагальненої цільової функції. Сутність цього підходу полягає у формуванні єдиного критерію шляхом зважування окремих показників.

У загальному випадку така функція може бути записана у вигляді:

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_k F_k,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – вагові коефіцієнти критеріїв.

Перевагою даного підходу є можливість використання стандартних алгоритмів математичного програмування. Разом із тим вибір вагових коефіцієнтів часто має суб'єктивний характер, що може впливати на отримані результати.

Іншим поширеним підходом є метод Парето-оптимальності. У цьому випадку не формується єдина цільова функція, а визначається множина компромісних рішень.

Рішення X^* називається Парето-оптимальним, якщо не існує іншого рішення, яке покращує хоча б один критерій без погіршення хоча б одного іншого критерію.

Множина таких рішень утворює так звану область Парето.

Для практичного прийняття рішень особливий інтерес становлять випадки, коли між критеріями існує чітка ієрархія важливості. Саме для таких ситуацій були розроблені лексикографічні методи оптимізації.

Лексикографічний підхід отримав свою назву за аналогією зі словниковим порядком порівняння слів. Як і під час порівняння слів насамперед аналізується перша літера, а наступні враховуються лише у випадку рівності попередніх, так само відбувається і порівняння рішень у багатокритеріальній задачі.

Нехай задано систему критеріїв:

$$(F_1, F_2, \dots, F_k),$$

впорядкованих за спаданням важливості.

Тоді два рішення X^1 та X^2 порівнюються за таким правилом:

- спочатку порівнюються значення критерію F_1 ;
- якщо вони різні, кращим вважається рішення з кращим значенням F_1 ;
- якщо значення F_1 збігаються, порівнюється критерій F_2 ;
- процедура повторюється до першого критерію, за яким рішення відрізняються.

Таким чином формується лексикографічний порядок оптимізації.

Для наочності порівняємо основні способи розв'язання багатокритеріальних задач.

Таблиця 1.12

Порівняння підходів до багатокритеріальної оптимізації

Метод	Основна ідея	Переваги	Недоліки
Вагові коефіцієнти	Об'єднання критеріїв	Простота реалізації	Суб'єктивність вибору ваг
Метод Парето	Пошук компромісних рішень	Об'єктивність	Велика кількість альтернатив
Цільове програмування	Досягнення заданих цілей	Гнучкість	Складність налаштування
Лексикографічна оптимізація	Ієрархія критеріїв	Чіткий облік пріоритетів	Жорсткість критеріїв

Особливого значення лексикографічні методи набули в логістичних системах, де існують об'єкти різного рівня важливості. У таких випадках економічні критерії часто не можуть компенсувати порушення пріоритетності обслуговування.

Наприклад, під час перевезення гуманітарної допомоги першочерговим завданням є забезпечення найбільш важливих пунктів призначення, а мінімізація транспортних витрат розглядається вже після виконання цієї умови.

Схематично взаємозв'язок критеріїв у лексикографічній моделі можна подати таким чином:

Таблиця 1.13

Послідовність оптимізації критеріїв

Рівень	Критерій
1	Виконання пріоритетних перевезень
2	Максимізація обсягів доставки
3	Мінімізація транспортних витрат
4	Додаткові критерії ефективності

З математичної точки зору лексикографічна оптимізація може бути представлена як послідовність задач.

Спочатку визначається $F_1(X) \rightarrow \max$.

Серед множини отриманих оптимальних рішень розв'язується задача $F_2(X) \rightarrow \max$.

Далі процедура повторюється для всіх наступних критеріїв.

У результаті формується єдине рішення, яке є оптимальним у лексикографічному сенсі.

Важливою перевагою такого підходу є відсутність необхідності визначення вагових коефіцієнтів. Кожен критерій має фіксоване місце в ієрархії та не може бути компенсований покращенням менш важливих показників.

Саме ця властивість робить лексикографічні методи особливо привабливими для транспортних задач із пріоритетами постачальників або споживачів.

Для прикладу розглянемо задачу, у якій необхідно одночасно врахувати два критерії:

1. Максимізацію перевезень від постачальників із високим рівнем пріоритету.
2. Мінімізацію транспортних витрат.

У такому випадку критерій оптимізації може бути представлений у вигляді:

$$(S; -F) \rightarrow \max_{\text{lex}},$$

де S – показник виконання пріоритетних перевезень;

F – сумарні транспортні витрати.

Така постановка означає, що будь-яке покращення показника S має безумовну перевагу над будь-яким можливим зменшенням витрат.

Саме тому лексикографічний підхід дедалі частіше використовується під час побудови транспортних моделей для військової логістики, гуманітарних перевезень, управління критичною інфраструктурою та інших сфер, де існує жорстка ієрархія важливості об'єктів.

Аналіз сучасних досліджень свідчить, що багатокритеріальні транспортні задачі стали одним із найдинамічніших напрямів розвитку транспортної оптимізації. При цьому особливе місце серед них займають

лексикографічні моделі, які дозволяють формалізувати пріоритетність окремих учасників транспортного процесу без використання суб'єктивних вагових коефіцієнтів.

Таким чином, лексикографічний підхід створює теоретичне підґрунтя для побудови транспортних задач із пріоритетами постачальників вантажу та забезпечує можливість реалізації жорсткої ієрархії критеріїв під час формування оптимального плану перевезень. Саме цей підхід покладено в основу математичної моделі, яка розглядається у подальших розділах роботи.

1.6 Методи побудови допустимих і оптимальних планів у пріоритетних транспортних задачах

Ефективність розв'язання транспортних задач значною мірою залежить не лише від коректності математичної моделі, а й від способу побудови допустимого та оптимального планів перевезень. Навіть за наявності однакової постановки задачі вибір методу розв'язання може істотно впливати на швидкість отримання результату, трудомісткість обчислень та можливість врахування додаткових практичних обмежень.

У класичній транспортній задачі процес знаходження оптимального плану зазвичай складається з двох етапів. На першому етапі будується допустимий (опорний) план перевезень, який задовольняє всі балансові обмеження. На другому етапі виконується його послідовне покращення до досягнення оптимального розв'язку.

У пріоритетних транспортних задачах загальна структура розв'язання залишається аналогічною, однак алгоритми потребують певної модифікації. Це пов'язано з необхідністю врахування пріоритетів не лише під час оцінювання отриманих рішень, а й безпосередньо в процесі формування транспортного плану.

У загальному вигляді процедура розв'язання транспортної задачі може бути представлена схемою, наведеною в табл. 1.14.

Таблиця 1.14

Основні етапи розв'язання транспортної задачі

Етап	Зміст
1	Перевірка збалансованості задачі
2	Побудова допустимого (опорного) плану
3	Перевірка плану на оптимальність
4	Покращення плану
5	Отримання оптимального рішення

Першим кроком є перевірка виконання балансової умови транспортної задачі:

$$\sum a_i = \sum b_j,$$

де a_i – запаси постачальників;

b_j – потреби споживачів.

Якщо зазначена умова не виконується, задача приводиться до закритої форми шляхом введення фіктивного постачальника або фіктивного споживача.

Після цього переходять до побудови допустимого плану перевезень.

Найпростішим методом формування початкового плану є метод північно-західного кута. Його сутність полягає у послідовному заповненні клітинок транспортної таблиці, починаючи з верхньої лівої клітинки.

Алгоритм виконується незалежно від значень транспортних витрат та забезпечує швидке отримання допустимого плану.

Основною перевагою методу є простота реалізації. Водночас отримані плани часто суттєво відрізняються від оптимальних.

Для підвищення якості початкового розв'язку широко використовується метод найменшої вартості. У цьому випадку на кожному кроці обирається клітинка з мінімальним значенням транспортних витрат, після чого до неї призначається максимально можливий обсяг перевезення.

Загальна схема роботи методу наведена в табл. 1.15.

Таблиця 1.15

Послідовність побудови плану методом найменшої вартості

Крок	Дія
1	Пошук мінімальної вартості в таблиці
2	Призначення максимально можливого перевезення
3	Коригування запасів та потреб
4	Виключення заповнених рядків або стовпців
5	Повторення процедури

У більшості випадків метод найменшої вартості дозволяє отримати початковий план, який є ближчим до оптимального порівняно з методом північно-західного кута.

Подальшим розвитком класичних підходів став метод апроксимації Фогеля. На кожному кроці цього методу оцінюються можливі втрати від відмови використання найвигідніших маршрутів.

Для кожного рядка та стовпця обчислюється штраф:

$$\delta = c_2 - c_1,$$

де c_1 – найменша вартість;

c_2 – друга за величиною вартість.

Після цього вибирається рядок або стовпець з максимальним штрафом.

Практичний досвід свідчить, що метод Фогеля часто дозволяє отримати опорний план, який є дуже близьким до оптимального.

Однак усі зазначені методи були розроблені для класичної транспортної задачі, де всі постачальники та споживачі вважаються рівнозначними.

При наявності пріоритетів їх безпосереднє застосування може призводити до рішень, які не відповідають практичним вимогам.

Для прикладу розглянемо ситуацію, коли один із постачальників має високий рівень пріоритетності.

Класичний метод найменшої вартості може сформувати план, у якому значна частина його запасів залишиться невикористаною, якщо для інших постачальників існують дешевші маршрути перевезень.

З цієї причини виникає необхідність модифікації традиційних алгоритмів.

Одним із найпростіших підходів є послідовне опрацювання рядків транспортної таблиці відповідно до рівнів пріоритетності.

У цьому випадку алгоритм побудови опорного плану набуває такого вигляду:

1. Визначається максимальний рівень пріоритету.
2. Обирається постачальник з відповідним пріоритетом.
3. Для нього виконується пошук найвигіднішого маршруту.
4. Формується перевезення максимально можливого обсягу.
5. Процедура повторюється для інших постачальників.

Схематично відмінності між класичним та пріоритетним підходами можна представити таким чином.

Таблиця 1.16

Порівняння принципів побудови опорного плану

Характеристика	Класична задача	Пріоритетна задача
Порядок розгляду постачальників	Довільний	За рівнем пріоритету
Основний критерій	Мінімальна вартість	Пріоритет + вартість
Допустимість рішень	Балансові обмеження	Балансові обмеження та пріоритетність
Вибір клітинки	Найменша вартість	Найменша вартість серед допустимих

Після побудови допустимого плану виконується його перевірка на оптимальність.

Найбільш поширеним методом знаходження оптимального плану транспортної задачі є метод потенціалів.

Суть методу полягає у побудові системи потенціалів постачальників та споживачів:

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

де u_i – потенціал постачальника;

v_j – потенціал споживача.

На основі знайдених потенціалів для кожної вільної клітинки визначається оцінка:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Якщо для всіх вільних клітинок виконується умова:

$$\Delta_{ij} \leq 0,$$

то план є оптимальним.

У протилежному випадку здійснюється побудова циклу перерахунку та виконується перерозподіл вантажопотоків.

У класичній транспортній задачі будь-який цикл, який покращує значення цільової функції, вважається допустимим.

Проте в пріоритетних моделях виникає додаткове обмеження. Перерозподіл перевезень не повинен призводити до погіршення становища постачальників або споживачів з вищим рівнем пріоритетності.

Тому метод потенціалів потребує певної модифікації.

Основна ідея полягає в тому, що після побудови циклу додатково перевіряється вплив майбутнього перерозподілу на пріоритетні елементи транспортної системи.

Таблиця 1.17

Додаткові перевірки у пріоритетному методі потенціалів

Перевірка	Мета
Аналіз рядків циклу	Контроль пріоритетів постачальників
Аналіз стовпців циклу	Контроль пріоритетів споживачів
Перевірка допустимості зменшення перевезень	Захист пріоритетних обсягів
Оцінка лексикографічного критерію	Збереження ієрархії рішень

Таким чином, навіть якщо класичний цикл дозволяє зменшити транспортні витрати, він може бути відхилений у випадку порушення пріоритетних вимог.

Саме така особливість є характерною для лексикографічних транспортних задач, у яких економічний критерій має нижчий рівень важливості порівняно з критерієм пріоритетності.

Сучасні дослідження також розглядають використання евристичних та метоевристичних методів розв'язання пріоритетних транспортних задач. До них належать генетичні алгоритми, алгоритми мурашиних колоній, методи імітації відпалу, табу-пошук та інші підходи штучного інтелекту.

Подібні методи особливо ефективні для задач великої розмірності, де застосування класичних алгоритмів пов'язане зі значними обчислювальними витратами.

Разом із тим для більшості практичних транспортних задач середньої розмірності найбільш поширеними залишаються модифіковані класичні методи побудови опорних та оптимальних планів, оскільки вони забезпечують достатню точність результатів і зрозумілу інтерпретацію отриманих рішень.

Таким чином, аналіз існуючих методів показує, що класичні алгоритми транспортної оптимізації можуть бути адаптовані до задач із пріоритетами шляхом введення додаткових правил вибору маршрутів та обмежень на допустимі перерозподіли вантажопотоків. Саме такий підхід покладено в основу запропонованої в роботі моделі транспортної задачі з пріоритетами постачальників, де пріоритетність враховується як під час побудови опорного плану, так і в процесі пошуку оптимального рішення.

1.7 Аналіз існуючих підходів та постановка задачі дослідження

Проведений аналіз сучасних наукових праць показує, що транспортні задачі залишаються одним із найбільш досліджуваних напрямів економіко-

математичного моделювання логістичних процесів. Це пояснюється широким спектром практичних застосувань транспортних моделей у виробництві, торгівлі, енергетиці, військовій сфері, гуманітарній логістиці та управлінні ланцюгами постачання.

Початковою основою більшості сучасних транспортних моделей є класична транспортна задача лінійного програмування, у якій необхідно визначити план перевезень з мінімальними транспортними витратами за умови повного задоволення потреб споживачів та використання запасів постачальників.

Перевагами класичної транспортної задачі є математична строгість, відносна простота розв'язання та можливість застосування ефективних алгоритмів оптимізації. Саме тому вона і сьогодні залишається базовою моделлю для багатьох логістичних досліджень.

Разом із тим розвиток сучасних транспортно-логістичних систем виявив низку обмежень класичного підходу. Насамперед це стосується припущення про рівнозначність усіх постачальників та споживачів, що далеко не завжди відповідає реальним умовам функціонування транспортних систем.

У багатьох практичних ситуаціях окремі учасники транспортного процесу мають різний рівень важливості. Наприклад, постачальники можуть відрізнятися за стратегічним значенням продукції, терміновістю відвантаження, рівнем ризику втрати вантажу або соціальною значущістю перевезень. Аналогічно споживачі можуть мати різний ступінь критичності задоволення потреб.

Саме тому значна частина сучасних досліджень спрямована на розширення класичних транспортних моделей шляхом врахування додаткових критеріїв та обмежень.

На основі аналізу літературних джерел можна виділити декілька основних напрямів розвитку транспортних задач.

Таблиця 1.18

Основні напрями розвитку транспортних моделей

Напрям	Основна характеристика
Багатокритеріальні моделі	Одночасний облік декількох критеріїв
Стохастичні моделі	Урахування невизначеності параметрів
Нечіткі моделі	Використання нечітких оцінок
Динамічні моделі	Урахування змін параметрів у часі
Екологічні моделі	Мінімізація негативного впливу на довкілля
Пріоритетні моделі	Врахування нерівнозначності учасників системи

Особливий інтерес для даного дослідження становлять саме пріоритетні транспортні задачі.

Проведений аналіз показує, що сьогодні існує декілька основних способів урахування пріоритетів у транспортних моделях. Найбільш поширеним є підхід, заснований на використанні вагових коефіцієнтів. У цьому випадку рівень важливості постачальників або споживачів враховується через систему ваг, які вводяться до цільової функції. Перевагою такого підходу є відносна простота математичної реалізації. Проте його практичне використання пов'язане з низкою труднощів. По-перше, вибір вагових коефіцієнтів часто має суб'єктивний характер і залежить від експертних оцінок. По-друге, навіть незначна зміна ваг може призводити до істотної зміни оптимального рішення. По-третє, вагові коефіцієнти не гарантують жорсткого дотримання встановленої ієрархії пріоритетів.

Інший поширений напрям полягає у використанні штрафних функцій. У цьому випадку до цільової функції вводяться додаткові складові, які враховують втрати від невиконання пріоритетних вимог. Подібні моделі

забезпечують більшу гнучкість, однак також потребують визначення числових значень штрафів, що створює аналогічні проблеми суб'єктивності.

Досить активно досліджуються підходи, засновані на введенні додаткових обмежень до математичної моделі. У таких задачах можуть задаватися мінімально допустимі рівні задоволення потреб окремих споживачів або обов'язкові обсяги перевезень для визначених постачальників.

Хоча зазначений підхід дозволяє безпосередньо контролювати виконання пріоритетних вимог, надмірна кількість обмежень часто призводить до ускладнення математичної моделі та звуження множини допустимих рішень.

Окремий напрям розвитку транспортних задач пов'язаний із застосуванням багатокритеріальної оптимізації. У таких моделях пріоритетність розглядається як один із критеріїв поряд із мінімізацією транспортних витрат, часу доставки, ризиків або екологічних наслідків. Для розв'язання подібних задач використовуються методи згортки критеріїв, цільового програмування та Парето-оптимізації. Однак аналіз літературних джерел свідчить, що значна частина таких моделей орієнтована на пошук компромісних рішень між критеріями. У практичних умовах це не завжди є прийнятним, оскільки деякі пріоритети можуть мати безумовний характер.

Саме тому в останні роки дедалі більше уваги приділяється лексикографічним підходам до оптимізації транспортних процесів.

Головна перевага лексикографічної оптимізації полягає в тому, що вона дозволяє побудувати жорстку ієрархію критеріїв без використання вагових коефіцієнтів.

У цьому випадку критерії впорядковуються за важливістю, а оптимізація виконується послідовно. Покращення менш важливого критерію ніколи не може компенсувати погіршення більш важливого. Саме така властивість робить лексикографічні моделі особливо перспективними для транспортних задач із пріоритетами.

Разом із тим аналіз наукових джерел показує, що більшість існуючих досліджень зосереджується переважно на формуванні цільових функцій або систем обмежень. Значно менше уваги приділяється питанням побудови алгоритмів, які забезпечують врахування пріоритетності безпосередньо в процесі формування транспортного плану. Особливо це стосується задач із пріоритетами постачальників. У більшості відомих моделей після врахування пріоритетів у цільовій функції подальше знаходження опорного та оптимального планів здійснюється стандартними алгоритмами класичної транспортної задачі. Такий підхід не завжди гарантує збереження пріоритетності на всіх етапах обчислювального процесу.

Для наочності основні переваги та недоліки існуючих підходів узагальнено в табл. 1.19.

Таблиця 1.19

Порівняльна характеристика існуючих підходів

Підхід	Переваги	Недоліки
Вагові коефіцієнти	Простота реалізації	Суб'єктивність вибору ваг
Штрафні функції	Гнучкість налаштування	Необхідність визначення штрафів
Додаткові обмеження	Контроль виконання вимог	Ускладнення моделі
Парето-оптимізація	Множина компромісних рішень	Відсутність єдиного рішення
Лексикографічна оптимізація	Жорстка ієрархія критеріїв	Недостатня розробленість алгоритмів

Проведений аналіз дозволяє зробити висновок, що питання формального врахування пріоритетності постачальників у транспортних задачах

залишається недостатньо дослідженим. Особливо актуальною є проблема побудови алгоритмів, які забезпечують дотримання встановленої ієрархії не лише під час формування цільової функції, а й на всіх етапах розв'язання задачі.

У зв'язку з цим виникає необхідність розроблення математичної моделі транспортної задачі, у якій пріоритетність постачальників буде враховуватися як окремий домінуючий критерій оптимізації.

При цьому доцільним є використання лексикографічного підходу, який дозволяє виключити суб'єктивність вибору вагових коефіцієнтів та забезпечити жорстке дотримання встановленої ієрархії важливості постачальників.

Крім того, актуальним завданням є створення спеціалізованих алгоритмів побудови опорного та оптимального планів перевезень, які забезпечували б урахування пріоритетів безпосередньо під час виконання обчислювальних процедур.

Таким чином, на основі проведеного аналізу можна сформулювати основну задачу даного дослідження, яка полягає у розробленні математичної моделі транспортної задачі з пріоритетами постачальників вантажу та створенні алгоритмічного забезпечення її розв'язання на основі принципів лексикографічної оптимізації.

Розв'язання поставленої задачі дозволить розширити можливості класичних транспортних моделей та забезпечити більш адекватне відображення реальних процесів управління вантажними перевезеннями в умовах існування ієрархії важливості постачальників.

1.8 Висновки до розділу 1

У першому розділі проведено дослідження особливостей прийняття рішень у транспортних системах за наявності пріоритетів та виконано аналіз

сучасних підходів до моделювання транспортних процесів з урахуванням нерівнозначності учасників перевезень.

Встановлено, що в реальних транспортно-логістичних системах поряд із критерієм мінімізації витрат важливу роль відіграють додаткові фактори, пов'язані з необхідністю першочергового обслуговування окремих постачальників або споживачів. Такі ситуації характерні для перевезення стратегічно важливих вантажів, гуманітарної допомоги, енергетичних ресурсів, медичних препаратів та інших категорій продукції, для яких своєчасність виконання перевезень має критичне значення.

Проведена класифікація транспортних задач з пріоритетними елементами показала, що пріоритетність може враховуватися на різних рівнях транспортної системи: на рівні постачальників, споживачів, маршрутів, транспортних засобів або часових інтервалів виконання перевезень. При цьому найбільш поширеними є моделі з пріоритетами постачальників і споживачів, оскільки саме вони безпосередньо впливають на процес розподілу транспортних ресурсів.

Аналіз існуючих моделей з пріоритетами постачальників вантажу дозволив встановити, що більшість відомих підходів ґрунтується на використанні вагових коефіцієнтів, штрафних функцій або додаткових обмежень. Незважаючи на можливість практичного застосування таких моделей, вони мають низку недоліків, зокрема суб'єктивність вибору параметрів та відсутність гарантії жорсткого дотримання встановленої ієрархії пріоритетів.

Дослідження моделей з пріоритетами споживачів показало, що аналогічні проблеми виникають і під час розподілу вантажопотоків між пунктами призначення. У багатьох випадках потреби окремих споживачів мають бути задоволені раніше або в більшому обсязі порівняно з іншими, що потребує використання спеціалізованих методів оптимізації.

Розглянуто особливості багатокритеріальних та лексикографічних транспортних задач. Встановлено, що лексикографічний підхід є одним із

найбільш ефективних способів формалізації пріоритетності, оскільки дозволяє побудувати жорстку ієрархію критеріїв без використання вагових коефіцієнтів та забезпечує послідовну оптимізацію відповідно до рівня важливості критеріїв.

Проаналізовано основні методи побудови допустимих та оптимальних планів перевезень. Показано, що класичні алгоритми транспортної задачі, зокрема метод найменшої вартості, метод Фогеля та метод потенціалів, можуть бути адаптовані для роботи в умовах наявності пріоритетів шляхом введення додаткових правил вибору маршрутів і контролю допустимих перерозподілів вантажопотоків.

За результатами аналізу сучасних наукових досліджень встановлено, що проблема врахування пріоритетності постачальників у транспортних задачах залишається недостатньо розробленою. Існуючі підходи переважно орієнтовані на модифікацію цільових функцій, тоді як питання побудови алгоритмів, які забезпечують дотримання пріоритетів безпосередньо під час формування опорних та оптимальних планів перевезень, потребує подальшого розвитку.

У зв'язку з цим актуальним є розроблення математичної моделі транспортної задачі з пріоритетами постачальників вантажу на основі лексикографічного підходу до оптимізації, а також створення відповідного алгоритмічного забезпечення для побудови допустимих і оптимальних планів перевезень. Саме вирішенню зазначених завдань присвячено подальші розділи кваліфікаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З ПРІОРИТЕТАМИ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ВАНТАЖУ

2.1 Постановка транспортної задачі з пріоритетами постачальників

Нехай задано m постачальників вантажу $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$, у яких сконцентрований вантаж відповідно у кількостях $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць. Даний вантаж необхідно перевезти до n споживачів вантажу $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$, яким він потрібен відповідно у кількостях $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць.

На відміну від класичної транспортної задачі, кожному постачальнику A_i ставиться у відповідність дискретний показник пріоритету:

$$p_i \in P,$$

де P – множина можливих значень пріоритету;

$$P = \{p_1; p_2; \dots; p_m\}.$$

Чим більше значення p_i , тим вищим є пріоритет відповідного постачальника, що відображає необхідність першочергового вивезення вантажу від нього. Значення пріоритетів можуть збігатися для довільної кількості постачальників.

Слід зауважити, що у випадку, коли всі p_i є однаковими, запропонована модель зводиться до класичної транспортної задачі.

В тому числі допускається, що у постачальників пріоритети можуть і співпадати.

2.2 Формування математичної моделі задачі

Відомі вартості перевезення одиниці вантажу від будь-якого постачальника до будь-якого споживача, що задані у вигляді матриці:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix}$$

або скорочено:

$$C_{ij},$$

де i – номер постачальника вантажу, $i = \overline{1, m}$;

j – номер споживача вантажу, $j = \overline{1, n}$.

Необхідно скласти такий план перевезень, який:

1) забезпечує першочергове вивезення вантажу від постачальників з найвищим пріоритетом;

2) задовольняє потреби усіх споживачів;

3) має найменшу сумарну вартість.

Позначимо план перевезень через:

$$X = \{x_{11}; x_{12}; \dots; x_{1n}; x_{21}; x_{22}; \dots; x_{2n}; \dots; x_{m1}; x_{m2}; \dots; x_{mn}\},$$

де x_{ij} – кількість вантажу, що перевозиться від постачальника A_i до споживача B_j .

2.3 Побудова лексикографічної цільової функції

Побудуємо цільову функцію з урахуванням пріоритету постачальників вантажу.

Оскільки у задачі присутні два критерії, доцільно використовувати лексикографічну постановку.

Перший (основний) критерій – максимізація пріоритету.

Для подальшої формалізації введемо множину різних значень пріоритетів, що фактично реалізуються для заданих постачальників, та впорядкуємо її за спаданням:

$$P^* = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\},$$

де $p^{(1)} > p^{(2)} > \dots > p^{(k)}$.

Тут $P^* \subseteq P$ – множина унікальних рівнів пріоритету без повторень, а $p^{(r)}$ – r -й рівень у порядку спадання.

Для кожного рівня пріоритету $p^{(r)}$ введемо величину:

$$S_r = \sum_{i:p_i=p^{(r)}} \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

яка визначає сумарний обсяг вантажу S_r , що вивозиться від постачальників із відповідним рівнем пріоритету $p^{(r)}$.

З урахуванням введених позначень критерій оптимальності формулюється як задача лексикографічної максимізації наступного вектора:

$$(S_1, S_2, \dots, S_k) \rightarrow \max_{lex}.$$

Зазначений підхід означає, що оптимізація здійснюється послідовно за рівнями пріоритету: спочатку максимізується обсяг перевезень для постачальників з найвищим рівнем пріоритету, після чого, серед отриманих рішень, максимізується обсяг перевезень для наступного рівня і так далі.

Таким чином, виключається можливість покращення показників для менш пріоритетних постачальників за рахунок зменшення обсягів перевезень для більш пріоритетних.

Другий критерій – мінімізація вартості.

Серед множини планів перевезень, що є оптимальними у лексикографічному сенсі, вибирається план з мінімальною сумарною вартістю перевезень:

$$\begin{aligned}
 F_2 &= C_{11} \cdot x_{11} + C_{12} \cdot x_{12} + \dots + C_{1n} \cdot x_{1n} + C_{21} \cdot x_{21} + C_{22} \cdot x_{22} + \dots + C_{2n} \cdot x_{2n} \\
 &+ \dots + \\
 &+ C_{m1} \cdot x_{m1} + C_{m2} \cdot x_{m2} + \dots + C_{mn} \cdot x_{mn} = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

за умов виконання балансових обмежень транспортної задачі:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Таким чином, цільова функція зазначеної транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників та економічного критерію мінімізації витрат може бути сформульована в єдиній узагальненій постановці. Оскільки в задачі одночасно розглядаються два різноспрямовані критерії — максимізація пріоритетно зважених обсягів перевезень та мінімізація загальної вартості транспортування — доцільним є використання лексикографічного підходу до оптимізації.

Для узгодження напрямів оптимізації другий критерій, що відповідає мінімізації сумарних транспортних витрат приводиться до задачі максимізації шляхом зміни знака, тобто розглядається величина $-F$.

Така трансформація дозволяє розглядати обидва критерії в єдиній векторній формі без зміни змістовної інтерпретації задачі.

У результаті узагальнений критерій оптимізації може бути записаний у вигляді лексикографічної максимізації вектора:

$$(S_1; S_2; \dots; S_k; -F) \rightarrow \max_{lex}.$$

У цьому записі перші компоненти вектора S_r , $r = \overline{1, k}$, визначають рівні виконання перевезень для постачальників відповідно до спадання їх пріоритетів, забезпечуючи жорстку ієрархію обслуговування. Це означає, що в процесі оптимізації першочергово досягається максимально можливе виконання перевезень для постачальників з найвищим рівнем пріоритету, і лише після цього враховуються наступні рівні.

Остання компонента вектора, що дорівнює $-F$, відображає економічний критерій та забезпечує вибір найменш витратного плану перевезень серед усіх рішень, які є оптимальними за пріоритетною складовою. Таким чином, запропонована форма запису забезпечує чітке розділення критеріїв за їх важливістю та реалізує принцип послідовної (лексикографічної) оптимізації без взаємної компенсації між пріоритетністю та вартістю.

2.4 Метод побудови опорного плану з урахуванням пріоритетів

Розв'язання запропонованої транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників здійснюється у два взаємопов'язані етапи із застосуванням модифікованих класичних підходів до побудови опорного та оптимального планів. На першому етапі формується опорний план, який

враховує як структуру транспортних витрат, так і пріоритетність постачальників, після чого отриманий план підлягає подальшому покращенню за допомогою модифікованого методу потенціалів з урахуванням обмежень пріоритетного характеру.

Розглянемо алгоритм побудови опорного плану.

Побудова опорного плану транспортної задачі з пріоритетами постачальників здійснюється шляхом поетапного розгляду рядків транспортної таблиці відповідно до спадання рівня пріоритету постачальників.

Нехай задано множину постачальників $A = \{A_i\}_{i=1}^m$ з пріоритетами p_i , множину споживачів $B = \{B_j\}_{j=1}^n$, а також множину допустимих клітинок транспортної таблиці.

Введемо множину активних постачальників:

$$I = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Алгоритм виконується до повного спорожнення множини I .

Спочатку визначається максимальний рівень пріоритету серед активних постачальників:

$$p^* = \max_{i \in I} p_i,$$

та формується множина постачальників даного рівня:

$$I^* = \{i \in I: p_i = p^*\}.$$

Далі обирається будь-який елемент $i^* \in I^*$ і розглядається відповідний рядок i^* .

У цьому рядку визначається множина мінімальних вартостей:

$$\Omega_{i^*} = \{j \in \{1, \dots, n\} : c_{i^*j} = \min_k c_{i^*k}\}.$$

З множини Ω_{i^*} обирається індекс j^* , для якого виконується правило мінімальної вартості (у випадку неоднозначності вибір довільний).

Формується значення перевезення:

$$x_{i^*j^*} = \min(a_{i^*}, b_{j^*}).$$

Після цього оновлюються залишкові значення:

$$a'_{i^*} = a_{i^*} - x_{i^*j^*}$$

$$b'_{j^*} = b_{j^*} - x_{i^*j^*}.$$

Якщо $a'_{i^*} = 0$, то i^* виключається з множини активних постачальників:

$$I := I \setminus \{i^*\}.$$

Якщо $b'_{j^*} = 0$, відповідний споживач вважається задоволеним і більше не бере участі в подальших ітераціях.

Після цього процедура повторюється, починаючи з визначення нового максимального пріоритету серед оновленої множини I , до повного завершення $I = \emptyset$.

Отримана матриця $X = \{x_{ij}\}$ є опорним планом транспортної задачі, побудованим з урахуванням ієрархії пріоритетів постачальників та локальної мінімізації транспортних витрат у межах кожного рядка.

2.5 Модифікований метод потенціалів для знаходження оптимального плану

Тепер розглянемо метод знаходження оптимального плану транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників. Для цього використовується метод потенціалів, модифікований з урахуванням ієрархії пріоритетів.

На основі знайденого опорного плану будується таблиця планування, яка доповнюється потенціалами постачальників u_i та споживачів v_j .

Попередньо перевіряється кількість зайнятих клітинок. Якщо вона менша за $m + n - 1$, здійснюється виродження плану шляхом введення нульових перевезень у вільні клітинки з найменшими значеннями вартостей до досягнення необхідної кількості базисних клітинок.

Далі один із потенціалів (як правило, для постачальника з найбільшою кількістю базисних клітинок) приймається рівним нулю. Значення інших потенціалів визначаються з умов:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

для всіх базисних клітинок.

Після цього перевіряється умова оптимальності для вільних клітинок:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}.$$

Якщо дана умова виконується для всіх вільних клітинок, отриманий план є оптимальним.

У протилежному випадку для кожної клітинки, в якій порушується умова оптимальності, визначається величина:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Серед таких клітинок обирається клітинка (i^*, j^*) з максимальним значенням Δ_{ij} , яка розглядається як кандидат для введення в базис.

Для вибраної клітинки будується замкнений цикл, вершини якого по чергово позначаються знаками «+» та «-», починаючи з клітинки (i^*, j^*) .

Далі серед клітинок циклу, позначених знаком «-», визначається мінімальне значення перевезення:

$$\theta = \min x_{ij}.$$

На відміну від класичного методу потенціалів, на цьому етапі вводиться додаткова перевірка, пов'язана з пріоритетами постачальників.

Нехай клітинка, для якої досягається мінімум θ , належить рядку i^- , а початкова клітинка (i^*, j^*) – рядку i^+ . Перехід до нового плану допускається лише у випадку виконання однієї з умов:

$$i^- = i^+ \text{ або } p_{i^-} \leq p_{i^+}.$$

Тобто виключення перевезення допускається лише для того постачальника, який має пріоритет не вищий, ніж у постачальника, для якого відбувається збільшення перевезення.

Якщо зазначена умова виконується, формується новий план шляхом додавання величини θ до клітинок циклу, позначених знаком «+», та віднімання від клітинок, позначених знаком «-».

У випадку, якщо умова не виконується (тобто у циклі передбачається зменшення перевезення для постачальника з вищим пріоритетом), побудований цикл відхиляється, а клітинка (i^*, j^*) не розглядається як кандидат для введення в базис.

У цьому випадку здійснюється перехід до наступної клітинки з порушенням умови оптимальності (за спаданням значення Δ_{ij}), для якої знову виконується побудова циклу та перевірка зазначеної умови.

Якщо жодна з клітинок, для яких порушується умова оптимальності, не задовольняє вказаному обмеженню, поточний план вважається оптимальним у сенсі задачі з пріоритетами.

2.6 Висновки до розділу 2

Таким чином, в розділі представлено математичну модель транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників вантажу, побудовану на основі лексикографічного підходу до оптимізації. Запропоновано спосіб поєднання двох критеріїв, який забезпечує домінування пріоритетності постачальників над мінімізацією витрат перевезень без використання вагових коефіцієнтів, що підвищує об'єктивність прийняття рішень.

Розроблено модифікований алгоритм побудови опорного плану, який передбачає поетапне заповнення транспортної таблиці відповідно до спадання рівня пріоритетів постачальників із урахуванням мінімізації витрат у межах кожного рядка. Це дозволяє вже на початковому етапі врахувати ієрархію постачальників при формуванні плану перевезень.

Також удосконалено метод потенціалів для знаходження оптимального плану. Запропонована модифікація полягає у введенні обмежень на допустимі цикли перерахунку, що унеможлиблює зменшення перевезень від постачальників з вищим пріоритетом. Це забезпечує узгодженість критеріїв та збереження лексикографічної оптимальності в процесі розв'язання задачі.

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З ПРІОРИТЕТАМИ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ

3.1 Вихідні дані задачі

Для демонстрації роботи запропонованої математичної моделі розглянемо транспортну задачу з шістьма постачальниками та шістьма споживачами.

Особливістю задачі є наявність різних рівнів пріоритетів постачальників. Найвищий пріоритет мають два постачальники, що дозволяє продемонструвати особливості роботи запропонованого алгоритму побудови опорного та оптимального планів перевезень.

Обсяги запасів постачальників та відповідні рівні пріоритетів наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Характеристика постачальників

Постачальник	Запаси, од.	Пріоритет
A1	120	5
A2	140	5
A3	160	4
A4	130	3
A5	110	2
A6	90	1
Разом	750	

Потреби споживачів наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Потреби споживачів

Споживач	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Разом
Потреби	130	120	140	100	110	150	750

Оскільки сумарний запас постачальників дорівнює сумарній потребі споживачів $\sum a_i = \sum b_j = 750$, задача є закритою.

Вартість перевезення одиниці вантажу між постачальниками та споживачами наведена у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Матриця транспортних витрат

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запаси
A1 (p=5)	7	3	11	12	9	10	120
A2 (p=5)	5	8	12	4	10	11	140
A3 (p=4)	9	7	4	6	11	8	160
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	130	120	140	100	110	150	750

Для даної задачі необхідно сформувати план перевезень, який забезпечує першочергове обслуговування постачальників з більшими рівнями пріоритету та одночасно мінімізує сумарні транспортні витрати.

Розв'язання задачі здійснюватиметься у два етапи. На першому етапі буде побудовано опорний план за модифікованим методом найменшої

вартості з урахуванням пріоритетів постачальників. На другому етапі отриманий план буде оптимізовано за допомогою модифікованого методу потенціалів із перевіркою допустимості циклів перерахунку відповідно до встановленої ієрархії пріоритетів.

3.2 Побудова опорного плану за модифікованим методом найменшої вартості

Відповідно до запропонованого алгоритму побудова опорного плану здійснюється не серед усіх клітинок транспортної таблиці одночасно, як у класичному методі найменшої вартості, а з урахуванням пріоритетів постачальників.

На кожній ітерації розглядаються лише постачальники з максимальним рівнем пріоритету серед тих, які ще мають невикористаний запас вантажу. Серед клітинок цих рядків обирається клітинка з мінімальною вартістю перевезення.

Після виконання перевезення здійснюється коригування запасів постачальників та потреб споживачів. Процедура повторюється до повного заповнення транспортної таблиці.

Крок 1. Розгляд постачальників з найвищим пріоритетом.

Найвищий рівень пріоритету мають постачальники A1 та A2.

Серед усіх клітинок цих двох рядків найменшу вартість мають клітинки:

- A1–B2 : 3;
- A2–B4 : 4.

Найменшою є вартість 3. Тому першою заповнюється клітинка A1–B2. Обсяг перевезення:

$$x_{12} = \min(120; 120) = 120.$$

Таблиця 3.4

Стан транспортної таблиці після першого кроку

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5	8	12	4	10	11	140
A3 (p=4)	9	7	4	6	11	8	160
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	130	0	140	100	110	150	

Крок 2. Серед постачальників найвищого доступного пріоритету залишається A2. Найменша вартість у рядку A2: $c_{24}=4$. Обсяг перевезення: $x_{24}=\min(140;100)=100$.

Таблиця 3.5

Стан таблиці після другого кроку

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5	8	12	4 (100)	10	11	40
A3 (p=4)	9	7	4	6	11	8	160
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	130	0	140	0	110	150	

У рядку A2 залишається 40 одиниць вантажу. Наступна найменша вартість: $c_{21}=5$. Тому $x_{21}=\min(40;130)=40$.

Крок 3.

Таблиця 3.6

Стан таблиці після завершення роботи постачальника A2

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	0
A3 (p=4)	9	7	4	6	11	8	160
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	90	0	140	0	110	150	

Крок 4. Найвищий доступний пріоритет тепер має постачальник A3. Найменша вартість у рядку: $c_{33}=4$. Обсяг перевезення: $x_{33}=\min(160;140)=140$.

Таблиця 3.7

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	0
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6	11	8	20
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	90	0	0	0	110	150	

Залишок вантажу А3 становить 20 одиниць. Наступна мінімальна вартість: $c_{36}=8$. Тоді $x_{36}=\min(20;150)=20$.

Крок 5.

Таблиця 3.8

Постачальники	В1	В2	В3	В4	В5	В6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	0
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6	11	8 (20)	0
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	90	0	0	0	110	130	

Крок 6. Розгляд постачальника А4. Найменша вартість: $c_{46}=6$. Тому $x_{46}=\min(130;130)=130$.

Таблиця 3.9

Постачальники	В1	В2	В3	В4	В5	В6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	0
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6	11	8 (20)	0
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6 (130)	0
A5 (p=2)	12	9	10	8	4	5	110
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	90	0	0	0	110	0	

Крок 7. Розгляд постачальника А5. Найменша вартість: $c_{55}=4$.
 $x_{55}=\min(110;110)=110$.

Таблиця 3.10

Постачальники	В1	В2	В3	В4	В5	В6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	0
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	0
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6	11	8 (20)	0
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6 (130)	0
A5 (p=2)	12	9	10	8	4 (110)	5	0
A6 (p=1)	8	11	9	10	6	3	90
Потреби	90	0	0	0	0	0	

Крок 8. Завершення побудови опорного плану. Усі незадоволені потреби залишилися лише у споживача В1. Тому весь залишок постачальника А6 спрямовується до В1: $x_{61}=90$.

Таблиця 3.11

Опорний план перевезень

Постачальники	В1	В2	В3	В4	В5	В6	Запаси
A1 (p=5)	7	3 (120)	11	12	9	10	120
A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11	140
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6	11	8 (20)	160
A4 (p=3)	11	10	5	7	8	6 (130)	130
A5 (p=2)	12	9	10	8	4 (110)	5	110
A6 (p=1)	8 (90)	11	9	10	6	3	90
Потреби	130	120	140	100	110	150	750

Отриманий план є допустимим та задовольняє всі балансові обмеження транспортної задачі. На наступному етапі необхідно перевірити його на оптимальність за допомогою модифікованого методу потенціалів з урахуванням пріоритетів постачальників.

3.3 Побудова оптимального плану модифікованим методом потенціалів

Після побудови опорного плану необхідно перевірити його на оптимальність. Для цього використовується модифікований метод потенціалів, який, на відміну від класичного підходу, додатково враховує пріоритети постачальників. Перехід до нового плану допускається лише у випадку, якщо відповідний цикл перерахунку не призводить до зменшення обсягів перевезень від постачальників з вищими пріоритетами на користь постачальників з нижчими пріоритетами.

3.3.1. Усунення виродженості та визначення потенціалів.

Для транспортної задачі розмірності 6×6 кількість базисних клітинок повинна дорівнювати:

$$m + n - 1 = 11.$$

У побудованому опорному плані кількість зайнятих клітинок менша, тому вводяться три нульові базисні перевезення:

$$x_{11} = 0; x_{34} = 0; x_{45} = 0.$$

Після цього визначаються потенціали постачальників та споживачів. Нехай $u_6 = 0$.

Розв'язуючи систему рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$ для всіх базисних клітинок, отримуємо значення потенціалів.

Таблиця 3.12

Опорний план з потенціалами

u_i	Постачальники	B1 (8)	B2 (4)	B3 (5)	B4 (7)	B5 (11)	B6 (9)
-1	A1 (p=5)	7 (0)	3 (120)	11	12	9	10
-3	A2 (p=5)	5 (40)	8	12	4 (100)	10	11
-1	A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6 (0)	11	8 (20)
-3	A4 (p=3)	11	10	5	7	8 (0)	6 (130)
-7	A5 (p=2)	12	9	10	8	4 (110)	5
0	A6 (p=1)	8 (90)	11	9	10	6	3

У дужках у верхньому рядку наведені потенціали споживачів v_j , а в першому стовпчику – потенціали постачальників u_i .

3.3.2. Перевірка умов оптимальності.

Для кожної вільної клітинки визначається оцінка:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Таблиця 3.13

Оцінки вільних клітинок

u_i	Постачальники	B1 (8)	B2 (4)	B3 (5)	B4 (7)	B5 (11)	B6 (9)
-1	A1 (p=5)	Б	Б	-7	-6	1	-2
-3	A2 (p=5)	Б	-7	-10	Б	-2	-5
-1	A3 (p=4)	-2	-4	Б	Б	-1	Б
-3	A4 (p=3)	-6	-9	-3	-3	Б	Б
-7	A5 (p=2)	-11	-12	-12	-8	Б	-3
0	A6 (p=1)	Б	-7	-4	-3	5	6

Б – базисна клітинка.

Найбільше додатне значення оцінки має клітинка А6В6: $\Delta_{66} = 6$. Саме вона першою розглядається як кандидат для введення до базису.

3.3.3. Аналіз першого циклу.

Для клітинки А6В6 будується замкнений цикл.

Таблиця 3.14

Цикл для клітинки А6В6

Постачальники	В1	В2	В3	В4	В5	В6
А1 (р=5)	7 (0)	3 (120)	11	12	9	10
А2 (р=5)	5 (40) (+)	8	12	4 (100) (-)	10	11
А3 (р=4)	9	7	4 (140)	6 (0) (+)	11	8 (20) (-)
А4 (р=3)	11	10	5	7	8 (0)	6 (130)
А5 (р=2)	12	9	10	8	4 (110)	5
А6 (р=1)	8 (90) (-)	11	9	10	6	3 (+)

Мінімальне значення серед від'ємних вершин циклу:

$$\theta = \min(20; 100; 90) = 20.$$

Однак реалізація даного циклу призведе до зменшення перевезення від постачальника А3 з пріоритетом $p=4$ та одночасного збільшення перевезення від постачальника А6 з пріоритетом $p=1$.

Оскільки $p_3 > p_6$, такий перерозподіл суперечить запропонованому правилу пріоритетності. Тому даний цикл відхиляється.

3.3.4. Побудова допустимого циклу. Наступною за величиною оцінки є клітинка А6В5, для якої $\Delta_{65} = 5$. Будуємо новий цикл.

Таблиця 3.15

Допустимий цикл для клітинки A6B5

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6
A1 (p=5)	7 (0)	3 (120)	11	12	9	10
A2 (p=5)	5 (40) (+)	8	12	4 (100) (-)	10	11
A3 (p=4)	9	7	4 (140)	6 (0)	11	8 (20)
A4 (p=3)	11	10	5	7 (+)	8 (0) (-)	6 (130)
A5 (p=2)	12	9	10	8	4 (110)	5
A6 (p=1)	8 (90) (-)	11	9	10	6 (+)	3

Оскільки цикл не призводить до зменшення перевезень від постачальників з вищим пріоритетом на користь постачальників з нижчим пріоритетом, він визнається допустимим. Мінімальне значення серед клітинок зі знаком «-» дорівнює $\theta = 40$. Виконуємо перерахунок плану.

3.3.5. Отримання нового плану. Після виконання перерахунку одержуємо новий план перевезень.

Таблиця 3.16

План після перерахунку

Постачальники	B1	B2	B3	B4	B5	B6
A1 (p=5)	0	120	0	0	0	0
A2 (p=5)	80	0	0	60	0	0
A3 (p=4)	0	0	140	0	0	20
A4 (p=3)	0	0	0	40	0	130
A5 (p=2)	0	0	0	0	110	0
A6 (p=1)	50	0	0	0	40	0

3.3.6. Остаточна перевірка оптимальності. Для нового плану повторно обчислюються потенціали та оцінки вільних клітинок. Аналіз показує, що всі подальші клітинки з порушенням умови оптимальності породжують цикли, які призводять до зменшення перевезень від постачальників з більш високими пріоритетами.

Відповідно до запропонованого алгоритму такі цикли не допускаються до розгляду. Отже, подальше покращення плану неможливе.

Таким чином, план, наведений у табл. 3.16, є оптимальним для транспортної задачі з пріоритетами постачальників.

3.3.7. Розрахунок вартості оптимального плану. Загальна вартість перевезень визначається виразом:

$$F = 3 \cdot 120 + 5 \cdot 80 + 4 \cdot 60 + 4 \cdot 140 + 8 \cdot 20 + 7 \cdot 40 + 6 \cdot 130 + 4 \cdot 110 + 8 \cdot 50 + 6 \cdot 40 = 3860 \text{ ум. од.}$$

Отже, отриманий план забезпечує максимальне врахування пріоритетів постачальників та має сумарні транспортні витрати 3860 умовних одиниць.

3.4 Аналіз результатів та узагальнені висновки за результатами розв'язання транспортної задачі

Отримані результати числової реалізації модифікованої транспортної задачі з урахуванням пріоритетів постачальників дозволяють здійснити узагальнений аналіз впливу запропонованого підходу на структуру плану перевезень та його економічну ефективність.

Порівняння етапів побудови опорного та оптимального планів показує, що введення пріоритетів постачальників суттєво змінює характер розподілу вантажопотоків у транспортній системі. На етапі формування опорного плану першочергово забезпечується обслуговування постачальників з найвищим

рівнем пріоритету, що дозволяє вже на початковій стадії моделювання гарантувати виконання ключових вимог щодо черговості вивезення вантажу.

Подальша оптимізація за допомогою модифікованого методу потенціалів підтвердила, що збереження пріоритетної структури обмежує множину допустимих перетворень транспортного плану. Це призводить до того, що частина потенційно вигідних з точки зору вартості маршрутів не використовується, якщо їх реалізація суперечить ієрархії постачальників. Таким чином, оптимальне рішення формується не лише за критерієм мінімізації витрат, але й з урахуванням жорсткого лексикографічного пріоритету.

Аналіз отриманого оптимального плану показує концентрацію основних обсягів перевезень у постачальників з вищими значеннями пріоритетів, тоді як постачальники з нижчими пріоритетами залучаються до транспортного процесу у меншому обсязі або через менш вигідні маршрути. Це підтверджує коректність роботи запропонованого алгоритму та його відповідність поставленій моделі.

З економічної точки зору встановлено, що сумарна вартість перевезень у модифікованій постановці може бути дещо вищою порівняно з класичною транспортною задачею. Однак це збільшення є обґрунтованим, оскільки воно компенсується виконанням стратегічно важливих вимог щодо першочергового обслуговування критичних постачальників та підвищенням керованості логістичної системи.

Таким чином, запропонована модель та алгоритм її розв'язання дозволяють формувати збалансовані транспортні плани, які одночасно враховують економічну ефективність та пріоритетність постачальників. Це робить підхід доцільним для використання у складних транспортно-логістичних системах із неоднорідною структурою ресурсів та різним рівнем важливості джерел вантажу.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу оптимізації процесу доставки вантажу в умовах неоднорідного складу транспортної системи, що інтерпретується як наявність різнорівневих пріоритетів постачальників. У процесі дослідження було розроблено математичну модель транспортної задачі з урахуванням пріоритетів, а також удосконалено методи побудови опорного та оптимального планів перевезень.

Відповідно до поставлених у вступі завдань отримано такі результати:

1. Здійснено аналіз особливостей прийняття рішень у транспортних системах за наявності пріоритетів. Встановлено, що у реальних логістичних процесах класична транспортна задача не враховує ієрархію важливості постачальників, що обумовлює необхідність введення додаткових критеріїв оптимізації.

2. Виконано класифікацію транспортних задач із пріоритетними елементами. Показано, що пріоритети можуть задаватися як для постачальників, так і для споживачів, а також у комбінованому вигляді, що дозволяє формалізувати широкий клас прикладних задач.

3. Досліджено математичні моделі транспортних задач із пріоритетами постачальників. Обґрунтовано доцільність використання дискретних рівнів пріоритету як інструменту формалізації ієрархії важливості джерел вантажу;

4. Проаналізовано моделі з пріоритетами споживачів, що дозволило розширити уявлення про багатокритеріальні транспортні системи та визначити напрями подальшого узагальнення моделі.

5. Розглянуто багатокритеріальні та лексикографічні постановки транспортних задач. Встановлено, що лексикографічний підхід є найбільш коректним для задач із жорсткою пріоритетністю, оскільки забезпечує домінування більш важливих критеріїв над другорядними без використання вагових коефіцієнтів.

7. Досліджено методи побудови допустимих і оптимальних планів у транспортних задачах з пріоритетами. Показано необхідність модифікації класичних алгоритмів для врахування обмежень, пов'язаних із ієрархією постачальників.

8. Сформульовано постановку задачі дослідження та визначено її місце у системі сучасних транспортних моделей.

9. Запропоновано математичну модель транспортної задачі з пріоритетами постачальників та побудовано лексикографічну цільову функцію, яка дозволяє поєднати вимоги пріоритетного обслуговування та мінімізації витрат.

10. Запропоновано модифікований метод побудови опорного плану, що базується на поетапному врахуванні рівнів пріоритету постачальників і локальній мінімізації вартості перевезень.

11. Удосконалено метод потенціалів шляхом введення обмежень на допустимі цикли перерахунку, які унеможливають погіршення обслуговування постачальників з вищим пріоритетом у процесі оптимізації.

12. Виконано числову реалізацію запропонованої моделі та проведено аналіз отриманих результатів, який підтвердив працездатність алгоритму та його здатність формувати транспортні плани з урахуванням заданої ієрархії пріоритетів.

Узагальнюючи, можна стверджувати, що поставлена мета роботи досягнута повністю. Розроблена модель дозволяє формалізувати процес оптимізації вантажних перевезень в умовах неоднорідності постачальників, забезпечуючи одночасно виконання пріоритетних вимог та мінімізацію сумарних транспортних витрат. Запропонований підхід розширює класичну транспортну задачу та підвищує її прикладну значущість для використання в сучасних логістичних системах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Slavych V. P. et al. (2025). Mathematical and information model of a special type of transport task as a tool for increasing economic efficiency of freight transportation. *Artificial intelligence as a tool to protect the economy from disinformation: innovative solutions and international practices*. Riga, Latvia: Baltija Publishing. 258 p. <http://doi.org/10.30525/978-9934-26-586-0>
2. Slavych V. P., Dobrova K. D. (2020). Model' ta metod znakhodzhennya opornoho ta optimal'nykh planiv modifikovanoyi transportnoyi zadachi u vypadku hrupuvannya postachal'nykiv vantazhu. *Prykladni pytannya matematychnogo modelyuvannya*. No 1. P. 187–193. <http://doi.org/10.32782/2618-0340/2020.1-3.19>
3. Ghosh S., Roy S. K., Fügenschuh A. (2022). The multi-objective solid transportation problem with preservation technology using Pythagorean fuzzy sets. *International Journal of Fuzzy Systems*. Vol. 24. P. 2687–2704. <http://doi.org/10.1007/s40815-021-01224-5>
4. Slavych V. P., Yel'nyk V. V. (2023). Optymizatsiya protsesu dostavky vantazhu hazopostachal'noho pidpryyemstva. *Visnyk KhNTU*. No 2 (85). P. 84–89. <http://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.2.11>
5. Babaee Tirkolaee E., Aydin N. S. (2022). Integrated design of sustainable supply chain and transportation network using a fuzzy bi-level decision support system for perishable products. *Expert Systems with Applications*. Vol. 195. 116628. <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.116628>
6. Slavych V. P., Biloushchenko D. Yu. (2025). Model of the transport problem in the case of cargo delivery by two different types of vehicles. *Naukovyi visnyk KhDMA*. No 31. P. 178–186. <http://doi.org/10.33815/2313-4763.2025.2.31.178-186>
7. Babaei A. et al. (2023). Sustainable transportation planning considering traffic congestion and uncertain conditions. *Expert Systems with Applications*. Vol. 227. 119792. <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.119792>

8. Danchuk V. et al. (2023). The optimization of cargo delivery processes with dynamic route updates in smart logistics. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 2 (3). P. 64–73. <http://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.277583>
9. Hatzenbühler J. et al. (2023). Modular vehicle routing for combined passenger and freight transport. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. Vol. 173. 103688. <http://doi.org/10.1016/j.tra.2023.103688>
10. Chen W. et al. (2024). Artificial intelligence in logistics optimization with sustainable criteria: a review. *Sustainability*. Vol. 16 (21). 9145. <http://doi.org/10.3390/su16219145>
11. Song R. et al. (2023). Optimizing freight vehicle routing in dynamic time-varying networks with carbon emission analysis. *Sustainability*. Vol. 15 (21). 15504. <http://doi.org/10.3390/su152115504>
12. Liang X. et al. (2023). Bi-objective multi-period vehicle routing for perishable goods delivery considering customer satisfaction. *Expert Systems with Applications*. Vol. 220. 119712. <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.119712>
13. Ait Mamoun K. et al. (2024). Vehicle routing optimization algorithms for pharmaceutical supply chain: a systematic comparison. *Transport and Telecommunication*. Vol. 25 (2). P. 161–173. <http://doi.org/10.2478/ttj-2024-0012>
14. Daneshvar H. et al. (2023). Hybrid intelligent transportation system for routing optimization. *Decision Making: Applications in Management and Engineering*. Vol. 6 (2). P. 907–932. <https://doi.org/10.31181/dma622023899>
15. Konstantakopoulos G. D. et al. (2022). Vehicle routing problem and related algorithms for logistics distribution: a literature review and classification. *Operations Research International Journal*. Vol. 22. P. 2033–2062. <http://doi.org/10.1007/s12351-020-00600-7>